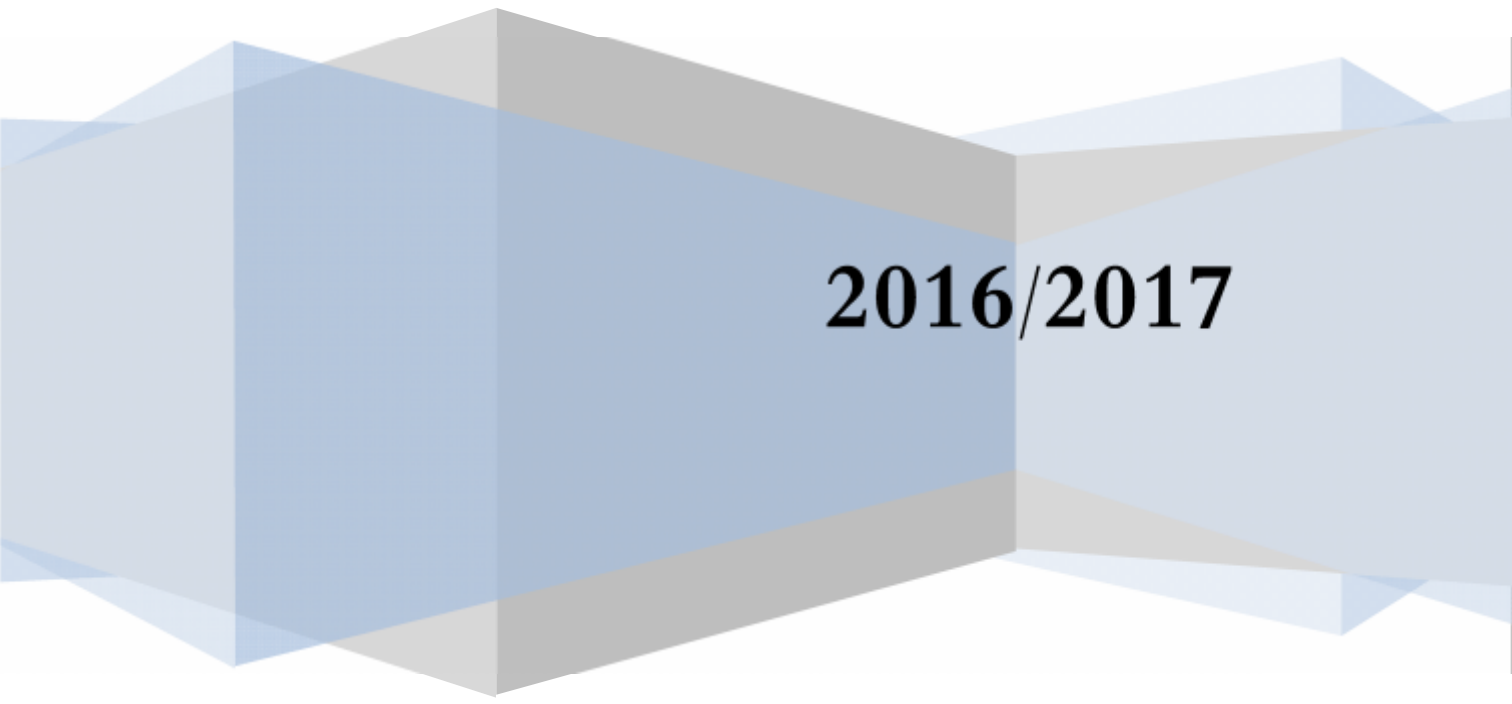
جامعة علي لونيسي – البليدة 2–

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

محاضرات في تحليل المعطيات

د. حمدي باشا نادية



2016/2017

فهرس المحتويات	الصفحة
فهرس المحتويات	2
قائمة الجداول	4
قائمة الاشكال	5
قائمة الملاحق	5
المقدمة	6
الفصل الاول: مفاهيم اولية حول تحليل المعطيات	7
1. تحليل المعطيات وعلم الاحصاء	7
2. المعطيات الاحصائية	8
3. جمع المعطيات	10
4. وصف المعطيات	12
الفصل الثاني: وصف المتغيرات	13
1. التوزيع التكراري	13
2. التمثيل البياني للتوزيعات التكرارية	18
3. مقاييس النزعة المركزية	20
4. مقاييس التشتت	23
5. مقاييس الالتواء والتفرطح	25
6. التطبيق العملي باستخدام SPSS	28
الفصل الثالث: اختبار الفرضيات	41
1. الفروض الاحصائية	41
2. الاختبارات الاحصائية	45

3. الاختبارات المعلمية	46
4. الاختبارات اللا معلمية	57
5. التطبيق العملي باستخدام SPSS	72
الفصل الرابع: تحليل الارتباط والانحدار	87
1. دراسة الارتباط الخطي البسيط	87
2. دراسة الانحدار البسيط	95
3. دراسة الانحدار الخطي المتعدد	102
4. التطبيق العملي باستخدام SPSS	108
الفصل الخامس: التحليل العاملي	124
1. مفهوم التحليل العاملي	124
2. التحليل بطريقة المركبات الاساسية	128
3. التطبيق العملي باستخدام SPSS	139
الخاتمة	147
قائمة المراجع	148
الملاحق	150

قائمة الجداول

رقم الجدول	اسم الجدول	الصفحة
1	اساليب وصف المتغيرات حسب عددها	12
2	جدول التوزيع التكراري البسيط	15
3	جدول التوزيع التكراري النسبي والمئوي	15
4	جدول التوزيع التكراري المتجمع	16
5	جدول تفريغ المعطيات المزدوج	17
6	جدول التوزيع التكراري المزدوج	17
7	جدول التوزيع التكراري البسيط لتقديرات مذكرات تخرج الماستر/ الدكتوراه	18
8	انواع الأخطاء في اتخاذ القرار	43
9	خصائص الاساليب الاحصائية	45
10	اهم الاختبارات الاحصائية المعلمية	47
11	اهم الاختبارات الاحصائية اللامعلمية	58
12	جدول الاقتران للصفات المشتركة بين المتغيرين X و Y	92
13	جدول الاقتران الموسع للصفات المشتركة بين المتغيرين X و Y	93

قائمة الاشكال

رقم الشكل	اسم الشكل	الصفحة
1	فئات الطلبة المسجلين في تخصص ماستر مالية وبنوك من 2011 الى غاية 2015	19
2	المدرج التكراري لفئات الراتب	20
3	شكل التوزيع المتماثل والملتوي	26
4	شكل التفلطح والتدبب مقارنة بمنحنى التوزيع الطبيعي	27
5	منطقة رفض H_0 في الاختبار في اتجاهين	44
6	منطقة رفض H_0 في الاختبار في الاتجاه الواحد	44
7	اشكال انتشار المعطيات	88
8	نوع وقوة الارتباط	89
9	توزيع المعاينة لـ $\hat{\beta}_1$ ثنائي الاتجاه	99
10	توزيع المعاينة لـ $\hat{\beta}_j$ في الاختبار ثنائي الاتجاه	107

قائمة الملاحق

رقم الملحق	اسم الملحق	الصفحة
1	مكونات البرنامج الاحصائي SPSS	150
2	الجداول الاحصائية	154
3	معطيات المثال التطبيقي 37	179

مقدمة

يعتبر تحليل المعطيات او البيانات اداة هامة من ادوات البحث العلمي. فاغلبية الدراسات والأبحاث العلمية تعتمد على استخدام اساليبه المتنوعة في معالجة وتحليل الاشكاليات المختلفة وتعميم النتائج او مقارنتها بين عدة مجتمعات، وهذا انطلاقا من معطيات العينة ودون الحاجة لاجراء مسح شامل لكل افراد الدراسة. فالتحليل الاحصائي الوصفي يمدنا بعدة طرق لتلخيص الكميات الكبيرة من المعطيات الى معلومات اقل يسهل فهمها والتعامل معها ووصفها وتحديد اهم خصائصها. كما يمكننا التحليل الاستقرائي للمعطيات من التعرف على خصائص مجتمعات الدراسة وتقدير معالمه المجهولة واختبار الفروض المتعلقة به من خلال مشاهدة مقاييس العينات الماخوذة من هذه المجتمعات. فهذه الاساليب الاحصائية المتنوعة تسمح لنا بالتعامل مع المعطيات بطريقة علمية منهجية ومنظمة مما يمكننا من اجراء المقارنات واستخلاص النتائج بمنطقية ودقة وموضوعية.

تندرج هذه المحاضرات ضمن برنامج السداسي الثالث لطلبة الماستر II تخصص تجارة دولية، إلا انها في الواقع تخدم كل الطلبة وبالاخص طلبة اقسام التخرج من ليسانس، ماستر ودكتوراه في كل التخصصات. وهذا باعتبار ان مقياس تحليل المعطيات (المعطيات) من المقاييس المهمة في مسار التحصيل العلمي للطلبة. لأنها تمكنهم من فهم واستيعاب كيفية تحليل معطيات دراساتهم التطبيقية والميدانية وكيفية تحديد الاساليب الاحصائية المناسبة لمعالجتها ومن ثمة استخلاص واستقراء النتائج وتدوينها ضمن مذكرات ورسائل التخرج. كما تساعدهم في مستقبلهم العملي على اتخاذ قرارات صائبة انطلاقا من قدرتهم على ترجمة نتائج التحليلات الاحصائية لمختلف الدراسات والأبحاث سواء التي يشرفون عليها او التي ستتوفر لهم.

ان الهدف من هذه المحاضرات هو تمكين الطلبة من فهم وتطبيق اهم الاساليب الاحصائية الوصفية والاستقرائية على مختلف المعطيات. فاعطاء الصيغ الحسابية لمختلف الطرق الاحصائية يسمح للطلبة بتطبيقها على المعطيات من خلال اجراء الحسابات يدويا. كما ان تعلم كيفية تنفيذ هذه الاساليب باستخدام البرنامج الاحصائي الجاهز SPSS يجعل من مهمة التحليل الاحصائي عملية سهلة وسريعة فيمكننا من الحصول على النتائج دون الخوض في العمليلت الحسابية المعقدة وبأقل تكلفة مادية وزمنية. وعليه فسنتطرق في هذه المحاضرات للنقاط التالية:

- استعراض بعض المفاهيم المرتبطة بموضوع تحليل المعطيات.
- وصف المعطيات باستخدام ادوات الاحصاء الوصفي.
- كيفية اختبار الفرضيات المعلمية واللامعلمية.
- تحليل الارتباط الثنائي والانحدارالخطي البسيط والمتعدد.
- التحليل العاملي للمعطيات مع التركيز على التحليل بطريقة المركبات الاساسية.

الفصل الاول

تحليل المعطيات: مفاهيم اولية

تحليل المعطيات مفهوم احصائي يشير الى الاجراءات الخاصة باختبار الفروض وتقدير معالم المجتمع في ضوء المعطيات المستخلصة من العينة وهذا استنادا على التوزيعات الاحصائية. كما يشير بالنسبة للبعض الاخر الى الاساليب الاحصائية متعددة الابعاد والمبنية على الطرق الجبرية والهندسية الخالية من الفرضيات المتعلقة بتوزيع المتغيرات. سنتطرق في هذه المطبوعة الى التحليل الاحصائي للمعطيات من المنظور الكلاسيكي أي بالتركيز على ادوات التحليل احادي وثنائي المتغيرات في تقدير معالم المجتمع واختبار الفرضيات. وارتأينا قبل ذلك ان نستعرض في هذا الفصل مجموعة من العناصر المرتبطة بعملية تحليل المعطيات والتي نرى انه من الافضل الالمام بها اولا لتسهيل فهم مختلف النقاط التي سنتطرق لها لاحقا في هذا العمل.

1. تحليل المعطيات وعلم الاحصاء

يرتبط تحليل المعطيات ارتباطا وثيقا بعلم الإحصاء، باعتبار ان الوظائف الاساسية لعلم الاحصاء هي جمع ووصف المعطيات واستقراء النتائج ثم اتخاذ القرارات بناءا على ذلك. فعلم الاحصاء يسمح بتوفير الطرق والأدوات والأساليب لجمع وتبويب وتلخيص وعرض المعطيات واستخلاص النتائج والاستنتاجات والتوصل لأحسن القرارات لمختلف المشكلات على اساس من التحليل العلمي للمعطيات المتوفرة. والمقصود بتحليل المعطيات هو عملية ترتيب وتنظيم ومعالجة المعطيات بما يسمح بالإجابة عن مشكلة ما او شرح العلاقة بين السبب والأثر لظاهرة ما او الوصول الى استنتاج بشان ظاهرة معينة. والهدف من التحليل الاحصائي للمعطيات هو الحصول على مقاييس تمثل واقع الظاهرة موضوع الدراسة تمثيلا علميا وليس كمجرد تعبير عن رأي الباحث. ويستخدم في ذلك كل من ادوات الاحصاء الوصفي وأدوات الإحصاء الاستقرائي.

1.1 الاحصاء الوصفي: يتضمن الاحصاء الوصفي مجموعة من الطرق والأساليب الخاصة بجمع وتنظيم وتلخيص ووصف المعطيات كما نشاهدها في الواقع لتوفير معلومات عن الاتجاهات المختلفة للظاهرة محل الدراسة وجعلها اكثر وضوحا. وتقتصر وظيفة الاحصاء الوصفي على وصف العينات فقط انطلاقا من المعطيات التي يتم جمعها من هذه العينات. حيث يتم وصف المعطيات باستخدام مجموعة من الاساليب الاحصائية الوصفية والمتمثلة اساسا في:

- الجداول الاحصائية التكرارية،
- التمثيل او الرسم البياني،
- مقاييس النزعة المركزية،

- مقاييس التشتت،
- مقاييس الالتواء او التماثل،
- مقاييس الاعتدال (التفلطح والتدبب).

2.1 الاحصاء الاستقرائي: يتعلق الاحصاء الاستقرائي او الاستدلالي بمجموعة الطرق والأساليب التي تستخدم لاستخلاص نتائج وقرارات تعمم على كل مجتمع الدراسة انطلاقا من دراسة معطيات العينة أي وصف الكل (المجتمع) انطلاقا من الجزء (العينة). وكذلك للتعرف على خصائص المجتمع الاصلي باستنتاجها من خصائص العينة التي سحبت منه. ويعتمد الاحصاء الاستقرائي على القيم العددية لمقاييس النزعة المركزية التي تم التوصل اليها من الاحصاء الوصفي للاستدلال منها على حكم او نتيجة ما متعلقة بالمجتمع الاصلي للعينة. وتتلخص الاهداف الرئيسية للإحصاء الاستقرائي في:

- تقدير معالم او خواص المجتمع انطلاقا من مقاييس العينة.
- اختبار فرضيات الدراسات اعتمادا على معطيات العينة او العينات.

ويتم التوصل الى استقراء النتائج باستخدام مجموعة من الاساليب الاحصائية الاستدلالية والتي تعتمد على:

- الاستقراء حول شكل التوزيع: اى اختبار ما اذا كانت المعطيات تتبع توزيعا طبيعيا او لا واختبار ما اذا كانت توزيعات عدة مجتمعات متماثلة.
- الاستقراء حول النسبة: تقدير نسبة متغير ما في مجتمع الدراسة كنسبة الامية او اختبار فرض تساوي النسب في عدة مجتمعات كافتراض تساوي نسبة الامية بين الاناث والذكور.
- الاستقراء حول المتوسط الحسابي: كتقدير متوسط الاجور لمجتمع ما او مقارنته في عدة مجتمعات.
- الاستقراء حول التباين والانحراف المعياري: من خلال تقدير التباين والانحراف المعياري للمجتمع او اختبار تجانس او تساوي التباينات في عدة مجتمعات.
- الاستقراء حول الارتباط بين المتغيرات: كتقدير الارتباط بين الاعلان والمبيعات.
- الاستقراء حول تقدير المتغيرات بدلالة اخري.
- الاستقراء حول عشوائية المعطيات.

2. المعطيات الاحصائية

تتمثل المعطيات الاحصائية في المعلومات او المشاهدات او الملاحظات التي يقوم الباحث بجمعها عن ظاهرة الدراسة. وتشكل المعطيات التي نحصل عليها من المفردات محل الدراسة المادة الرئيسية للتحليل الإحصائي، فعلى قدر توفرها ودقتها تتوقف دقة التحليل وأهمية النتائج وصحة القرارات المتخذة على اساسها. وتتميز المعطيات الاحصائية بالخصائص التالية:

- المعطيات عبارة عن مجموعة من القيم يتم الحصول عليها عادة من العينة.
- المعطيات تشير الى قيم فعلية للمتغيرات موضوع البحث.
- المعلم Paramètre مصطلح يتعلق بمعطيات المجتمع وتمثل خاصية تميز المجتمع ككل.
- الاحصائية Statistique مصطلح يتعلق بمعطيات العينة وتمثل خاصية تميز العينة.

1.2 تصنيف المعطيات الإحصائية: تصنف المعطيات الاحصائية بالنظر الى مصادرها ونوعها.

اولا– حسب المصدر: تصنف الى معطيات تاريخية ومعطيات ميدانية.

- المعطيات التاريخية: او غير المباشرة هي المعطيات التي نحصل عليها من الوثائق والنشرات التاريخية والحالية، ومن اهم مصادرها النشرات والوثائق والمطبوعات الاحصائية التي تصدرها الهيئات المختلفة. وتنقسم بدورها الى معطيات اولية ومعطيات ثانوية.
  - المعطيات الاولية: هي المعطيات التي تقوم بنشرها المنظمة او المؤسسة التي قامت بجمعها، كالنشرات الاحصائية للديوان الوطني للاحصاء او نشرات غرفة التجارة او الوزارات.
  - المعطيات الثانوية: هي المعطيات التي تقوم بنشرها جهة اخرى غير التي قامت بجمعها، كالمجلات والصحف والكتب.
- المعطيات الميدانية او المباشرة: هي المعطيات التي يقوم الباحث بجمعها بنفسه من المفردات محل الدراسة، وذلك بملاحظتها مباشرة او بتحصيل معلومات عنها عن طريق الاتصال المباشر بتلك المفردات.

ثانيا– حسب النوع: تصنف الى معطيات نوعية ومعطيات كمية.

- المعطيات النوعية: (الوصفية او الكيفية) هي معطيات تمثل خصائص لا يمكن قياسها كميا، تستعمل فيها الارقام لوصف المعطيات (لترميز مستويات او فئات المتغير) وليس لتحديد كميتها. مثال ذلك المستوى التعليمي او الوظيفة المشغولة...الخ.
- المعطيات الكمية: هي معطيات تمثل خصائص يمكن قياسها بالعد ويعبر عنها بأرقام عددية تمثل القيمة الفعلية او كمية الظاهرة. ومثال ذلك عدد العمال، عدد الوحدات المنتجة، الوزن، درجة الحرارة...الخ. وتنقسم المعطيات الكمية الى معطيات او متغيرات منفصلة ومعطيات او متغيرات متصلة.
  - المعطيات المنفصلة او غير المستمرة هي المعطيات التي تأخذ قيما متباعدة ومتقطعة او هي المعطيات التي نحصل عليها عن طريق العد كعدد افراد الاسرة او عدد القطع المباعة.

- المعطيات المتصلة او المستمرة هي المعطيات التي يمكنها ان تأخذ أية قيمة في مدى معين او بين رقمين او هي المعطيات التي نحصل عليها عن طريق القياس كالزمن والطول.

2.2 قياس المعطيات الإحصائية: لاستخدام الطرق والأساليب الاحصائية يجب تحديد مستوى قياس المعطيات او المتغيرات. بحيث تم تحديد اربعة مستويات لقياس المعطيات: الاسمي والترتيبي لقياس المعطيات النوعية ، الفتري والنسبي لقياس المعطيات الكمية. وتختلف هذه المقاييس من حيث كمية المعلومات التي تحتويها وبالتالي تختلف العمليات الحسابية والإحصائية التي يمكن اجراؤها.

اولا– المقياس الاسمي Mesure nominale: هو ادنى مستويات القياس. يسمح بتقسيم او تصنيف معطيات متغير ما ضمن مجموعات متنافية، كل مجموعة لها خصائص تميزها عن الاخرى كما لا يمكن المفاضلة بينها. كالجنس او الحالة الاجتماعية.

ثانيا– المعيار الترتيبي Mesure ordinale: هو اعلى مستوى من السابق. يسمح بتقسيم او تصنيف معطيات متغير ما ضمن مجموعات يمكن ترتيبها تصاعديا او تنازليا على اساس الرتبة او الاهمية النسبية لأي عنصر في المجتمع كتقدير الاداء والمستوى التعليمي. هذا المقياس على عكس المقياس السابق يمكننا من ترتيب القيم وإجراء المقارنات لكنه لا يمكننا من تحديد مقدار الفروق بين القيم.

ثالثا– المقياس الفتري Mesure d'intervalle: هو اقوى من السابق لأنه يمكننا من تحديد مقدار الفروق بين القيم لكن لا يسمح لنا بإجراء النسبة بين القيم. ويمثل هذا القياس معطيات رقمية متصلة تقاس بمقدار بعدها عن الصفر تدل على صفة يمكن قياسها وترتيبها وتأخذ القيم الصحيحة والكسرية. وللصفر دلالة على وجود الظاهرة كدرجة الحرارة او نقاط الطلبة في الامتحان. ويعتبر هذا المقياس هو الاكثر استعمالا في الدراسات الاقتصادية والاجتماعية وهذا من خلال استعمال سلم ليكارت.

رابعا– المقياس النسبي Mesure ratio: هو اقوى مستويات القياس لأنه يحمل مزايا المقاييس السابقة بالإضافة لإجراء النسبة بين القيم. وهو عبارة عن معطيات رقمية منفصلة تدل على صفة يمكن عدها وتأخذ قيم صحيحة فقط. وللصفر دلالة على عدم وجود الظاهرة كعدد الاناث والذكور في البيت او عدد الاطفال او عدد الوحدات المنتجة من طرف العامل.

3. جمع المعطيات

جمع المعطيات يعتبر عملية هامة وأساسية تعتمد عليها دقة الوصف ومنطقية التحليل وواقعية النتائج وصلاحية القرار. مما يستدعي الاهتمام التام والحرص الشديد في اختيار طرقها وتحديد اساليبها.

1.3 طرق جمع المعطيات: يمكن جمع المعطيات بطرق مختلفة اهمها:

اولا– النشرات والسجلات: التي تصدرها الهيئات والمنضمات والمؤسسات العامة والخاصة والتي تتضمن معطيات عن انشطتها المختلفة. فعندما يقوم الباحث بدراسات لها علاقة بهذه الانشطة يمكنه الاتصال بالجهات المعنية للحصول على المعطيات المرادة.

ثانيا– التجارب: تعتبر من المصادر الرئيسية والهامة في الحصول على المعطيات في مجالات العلوم الطبيعية بحيث يقوم الباحث بتصميم التجربة وتطبيقها وتدوين النتائج المتحصل عليها.

ثالثا– الاستمعطيات: تعتبر من اهم طرق جمع المعطيات وأكثرها انتشارا في معظم الدراسات الاقتصادية والاجتماعية والنفسية. بحيث يتم الحصول على المعطيات من خلال الاجابة على اسئلة معينة تتعلق بموضوع الدراسة، حيث تكون الاسئلة سهلة، واضحة، بسيطة ولا تحتمل التأويل.

رابعا– المقابلات: بحيث يتم جمع المعطيات مباشرة من مصادرها من خلال المقابلة الشخصية للأطراف المعنية وتدوين اجاباتهم.

2.3 اساليب جمع المعطيات: يمكن جمع المعطيات باللجوء الى اسلوبيين:

اولا– اسلوب المسح الشامل: أي اخذ معطيات عن جميع مفردات المجتمع قيد الدراسة وهي افضل الطرق من حيث دقة النتائج وتفصيلها. إلا انها صعبة ومكلفة جدا ماديا وتحتاج الى امكانات بشرية عالية والى وقت طويل لجمع المعطيات وتقديم النتائج.

ثانيا – اسلوب العينة: اذا تعذر على الباحث جمع معطيات عن كل مفردات مجتمع الدراسة يلجا الى اختيار جزء من المجتمع المراد دراسته يسمى بالعينة. ويراعى في اختيار العينة ان تضمن تمثيل المجتمع تمثيلا صحيحا لتعميم النتائج على المجتمع ككل وذلك باستخدام طرق علمية معينة. هذا الاسلوب هو الاكثر استعمالا من طرف الباحثين في جمع المعطيات لأنه اقل تكلفة وجهد ويوفر كثيرا من الوقت إلا ان نتائجه اقل دقة بسبب الاخطاء التي تؤثر عليها والناتجة عن اخطاء الصدفة او التحيز. ويتم اللجوء الى اختيار العينات بأسلوبين يناسب كل منها طبيعة المجتمع المراد دراسته ونوع مشكلة الدراسة والهدف منها وكذلك التكاليف التي يتحملها، وهذا اما باستخدام الاسلوب العشوائي او باستخدام الاسلوب العمدي.

- العينات العشوائية: يتم فيها سحب المفردات عشوائيا من بين مفردات مجتمع الدراسة وبالتالي تتاح لكل مفردة من المجتمع الفرصة للظهور في العينة.
- العينات العمدية: يتم اختيارها من بين مفردات مجتمع الدراسة حسب غرض الباحث وتستخدم من اجل الحصول على تقديرات تقريبية لتكوين فكرة سريعة عن مشكلة معينة او في حالة عدم امكانية استخدام العينة العشوائية.

4. وصف المعطيات

يمثل وصف المعطيات المرحلة الاولى في تحليل المعطيات لان المعطيات التي تم تجميعها هي معطيات خام غير مجهزة لا نستطيع ان نستخلص منها معلومات مفيدة بالشكل الذي هي عليه. لذلك نستعين بأساليب ومقاييس تسمح لنا بتلخيص المعطيات ومعرفة اهم خواصها. وتختلف هذه الاساليب حسب عدد المتغيرات ومستوى قياسها. ويعرض الجدول التالي تقسيما لهذه المقاييس حسب عدد المتغيرات.

الجدول 1: اساليب وصف المتغيرات حسب عددها

عدد المتغيرات المستقلة	عدد المتغيرات التابعة	
	واحد	**اثنان او اكثر**
لا يوجد	**1- لوصف متغير وحيد،** يمكن استعمال: - التوزيع التكراري - التمثيل البياني - مقاييس النزعة المركزية - مقاييس التشتت - مقاييس الالتواء والتفرطح	**2- لوصف عدة متغيرات،** يمكن استعمال: - اساليب المجموعة 1 - الارقام القياسية - التحليل العاملي
واحد	**3- لوصف العلاقة بين متغيرين،** يمكن استعمال: - التوزيع التكراري المتقاطع - الارتباط الثنائي - التقدير بالانحدار البسيط - التقدير بالسلاسل الزمنية	**4- لوصف العلاقة بين متغير مستقل وعدة متغيرات تابعة،** يمكن استعمال: - اساليب المجموعة 2 - اساليب المجموعة 3 - اساليب المجموعة 5
اثنان او اكثر	**5- لوصف العلاقة بين متغير تابع وعدة متغيرات مستقلة،** يمكن استعمال: - الارتباط المتعدد - الارتباط الجزئي - الانحدار المتعدد - تحليل التمايز - تحليل المسار	**6- لوصف العلاقة بين عدة متغيرات تابعة وعدة متغيرات مستقلة،** يمكن استعمال: - اساليب المجموعة 2 - اساليب المجموعة 5 - الارتباط الشرعي

المصدر: بتصرف من: مصطفى زايد، "الاحصاء والاستقراء-الجزء الاول: اسس الاستقراء- "، هجر للطباعة والنشر، 1990، مصر، ص 27.

الفصل الثاني: عرض المعطيات الاحصائية ووصفها

في الحياة العملية نتعامل مع كم هائل من المعطيات يصعب علينا استيعابها ومقارنتها ما لم نقم بعرضها بطريقة مبسطة وعملية مع إبراز الخصائص الاساسية لها. ومن اهم الاساليب التي تسمح لنا بذلك نجد التوزيع التكراري ومقاييس النزعة المركزية والتشتت بالإضافة الى مقاييس الالتواء والتفلطح.

1. التوزيع التكراري

تعتمد اغلب العمليات الاحصائية على التوزيع التكراري للمعطيات، فهو يمثل نقطة البدء لها لأنه يمكننا من تنظيم واختصار المعطيات الكثيرة دون ان تخسر هذه المعطيات من اهميتها.

1.1 جدول التوزيع التكراري البسيط: هو عبارة عن توزيع المعطيات المتحصل عليها على فئات متغير او ظاهرة الدراسة، بحيث تقع كل مفردة في فئة واحدة فقط ثم نقوم بعد المفردات التي تقع في نفس الفئة ونضعها في جدول يسمى الجدول التكراري.

ولبناء التوزيع التكراري لمتغير ما نتبع الخطوات التالية:

- نحدد مدى المعطيات أي نحسب الفرق بين اصغر مشاهدة للمتغير واكبر مشاهدة: المدى= اكبر قيمة مشاهدة – اصغر قيمة مشاهدة. مع ملاحظة انه اذا كان مدى المعطيات صغيرا فانه يمكننا بناء التوزيع التكراري بترتيب المعطيات ترتيبا تصاعديا من اقل قيمة الى اكبر قيمة ووضعها في عمود خاص بالقيم ثم نحسب عدد المرات التي تتكرر فيها كل قيمة في المعطيات الخام ووضعها في عمود خاص بالتكرارات وبالتالي نحصل على جدول التوزيع التكراري. اما اذا كان المدى كبيرا فنواصل الخطوات التالية.

- نقسم قيم المعطيات الى عدد فئات مبدئي مناسب لعدد المعطيات: من 5 الى 15 فئة حسب كون عدد المعطيات صغيرا او كبيرا.

- نحسب طول الفئة بقسمة المدى على عدد الفئات مع التقريب الى الواحد الصحيح بالنسبة للقيم الكسرية مهما كانت قيمة الكسر.

- نختار أصغر قراءة فى المعطيات لتكون بداية الفئة الأولى ويضاف إليها طول الفئة فنحصل بذلك على بداية الفئة الثانية، تحدد بداية الفئة الثالثة بإضافة طول الفئة لبداية الفئة الثانية وهكذا لباقى الفئات. ولإيجاد نهاية أى فئة نضيف إلى بدايتها طول الفئة مطروحا منه واحد، ثم نسجل الفئات المتحصل عليها في عمود خاص بالفئات.

- نحدد الحد الادنى للفئة الاولى ثم نطرح منه $0,5$ لتحديد الحد الادنى الفعلي للفئة الاولى.

- نحدد الحد الاعلى الفعلي للفئة الاولى وذلك بإضافة طول الفئة للحد الادنى الفعلي لتلك الفئة. ثم نحدد الحد الادنى والحد الادنى الفعلي والحد الاعلى والحد الاعلى الفعلي لباقي الفئات بإضافة طول الفئة لكل حد على التوالي.

- نعين مراكز الفئات وذلك بتعيين مركز الفئة الاولى ثم اضافة طول الفئة له لتعيين مركز الفئة الثانية وهكذا. ويحسب مركز الفئة الاولى كما يلي: (الحد الفعلي الادنى للفئة الاولى+ الحد الفعلي الاعلى للفئة الاولى)/2.

- نوزع المعطيات على الفئات ونحسب التكرارات لكل فئة ونسجلها في عمود خاص بالتكرارات.

ولشرح الخطوات السابقة نأخذ المثال التالي:

المثال 1: تمثل المعطيات الخام التالية رواتب 45 موظف، والمطلوب تكوين جدول توزيع تكراري من خمسة فئات.

32 31 33 35 35 39 34 31 34 30 33 30 31 32 34 32 31 30 34 32 31 30 27 26 26 28 29
48 46 43 39 41 45 40 49 44 35 40 44 37 42 38 38 37 36 39 35 37 38

لتكوين جدول التوزيع التكراري، نتبع الخطوات التالية:

- نحسب المدى: 49 – 26 = 23.
- نحدد عدد الفئات وهو 5
- نحسب طول الفئة كمايلي: طول الفئة =5/23= 4,6 وبالتقريب للاعلى نتحصل على 5.
- نحدد الحدود الدنيا والعليا للفئات كمايلي: الحد الادنى للفئة الاولى يمثل اصغر مشاهدة اي 26 والحد الادنى للفئة الثانية هو 26+5=31 والحد الاعلى للفئة الاولى هو 26+4=30 وهكذا. وبالتالي نحصل على حدود الفئات كمايلي: 26-30، 31-35، 36-40، 41-45، 46- 50.
- نحسب الحد الادنى الفعلي والحد الاعلى الفعلي للفئة الاولى كمايلي: الحد الادنى الفعلي للفئة الاولى= الحد الادنى – 0,5 = 25,5 و والحد الاعلى الفعلي للفئة الاولى= الحد الادنى الفعلي للفئة الاولى+طول الفئة= 30,5 وهكذا بالنسبة للحدود الفعلية الدنيا والعليا لباقي الفئات.
- نعين مراكز الفئات بتعيين مركز الفئة الاولى كما يلي: (25,5+30.5)/2=28 نظيف له طول الفئة لتعيين مركز الفئة الثانية وهكذا.

وبعد توزيع المعطيات على الفئات نحصل على جدول التوزيع التكراري كمايلي:

الجدول 2: جدول التوزيع التكراري البسيط

الفئات	الحدود الفعلية	مركز الفئة Xi	التكرار Fi
30-26	30,5-25,5	28	8
35-31	35,5-30,5	33	16
40-36	40,5-35,5	38	12
45-41	45,5-40.5	43	6
50-46	50,5-45,5	48	3
المجموع			45

وانطلاقا من جدول التوزيع التكراري يمكن ان نتحصل على التوزيع التكراري النسبي والتوزيع التكراري المتجمع.

2.1 التوزيع التكراري النسبي والمئوي: يمثل التكرار النسبي للفئة نسبة تكرار تلك الفئة الى مجموع التكرارات، فاذا كان مجموع التكرارات هو n وتكرار فئة معينة هو f فان التكرار النسبي للفئة هو p=f/n. ومجموع التكرارات النسبية لابد ان يساوي 1. واذا ضربنا كل تكرار نسبي في 100 نحصل على التوزيع التكراري المئوي. وهذا ما سنوضحه في الجدول التالي لمعطيات المثال السابق.

الجدول 3: جدول التوزيع التكراري النسبي والمئوي

الفئات	التكرار Fi	التكرار النسبي	التكرار المئوي
30-26	8	0,178=45/8	17,8%
35-31	16	0,355=45/16	35 ,5%
40-36	12	0,267=45/12	26,7%
45-41	6	0,133=45/6	13,3%
50-46	3	0,067=45/3	6,7%
المجموع n	45	1	100%

3.1 التوزيع التكراري المتجمع: يمثل التوزيع التكراري المتجمع لفئة ما مجموع تكرارات جميع القيم التي تقل عن الحد الاعلى الفعلي لهذه الفئة او تساويه. ويستعمل لمعرفة عدد المشاهدات التي قيمها تساوي قيمة معينة او تكون اصغر منها. والتوزيع التكراري المتجمع للمثال السابق يظهر كمايلي:

الجدول 4: جدول التوزيع التكراري المتجمع

الفئات	الحدود الفعلية	التكرار Fi	التكرار المتجمع	التكرار المتجمع المئوي
30-26	**30,5**-25,5	8	8	17,8%
35-31	**35,5**-30,5	16	24	53,33%
40-36	**40,5**-35,5	12	36	80%
45-41	**45,5**-40.5	6	42	93,33%
50-46	**50,5**-45,5	3	45	100%
المجموع n		45		

4.1 جدول التوزيع التكراري المزدوج: يستعمل جدول التوزيع التكراري المزدوج او التقاطعي عندما نريد معرفة تكرار معطيات الدراسة اخذا بعين الاعتبار صفتين او خاصيتين للمجتمع في نفس الوقت. حيث توزع المعطيات وترتب في هذا الجدول حسب صفتين وليس صفة واحدة كما هو الحال في التوزيعات البسيطة. ولعمل جدول التوزيع التكراري المزدوج نقوم بتدوين حالات او قيم الصفة الاولى افقيا وحالات او قيم الصفة الثانية عموديا ثم نقوم بتفريغ المعطيات في الجدول اخذا بعين الاعتبار الحالات او القيم المختلفة لكلتا الصفتين. اذا كانت صفات او خاصيات الدراسة تتكون من حالتين او قيمتين يسمى جدول التوزيع التكراري المزدوج بجدول التوافق اما كانت صفات او خاصيات الدراسة تتكون من اكثر من حالتين او قيمتين يسمى جدول التوزيع التكراري المزدوج بجدول الاقتران. وسنوضح كيفية اعداد جدول التوزيع التكراري المزدوج من خلال المثال التالي.

المثال 2: معطيات الجدول الموالي تمثل تقديرات 30 طالب في مذكرات تخرج الماستر والدكتوراه. المطلوب: اعداد جدول التوزيع التكراري المزدوج لمعطيات الجدول.

الماستر	الدكتوراه	الماستر	الدكتوراه	الماستر	الدكتوراه
مقبول	جيد	جيد	جيد جدا	مقبول	مقبول
جيد	جيد جدا	جيد	مقبول	جيد	جيد جدا
جيد	مقبول	جيد	جيد	جيد جدا	جيد جدا
جيد	جيد جدا	مقبول	جيد	جيد	مقبول
جيد جدا	جيد جدا	جيد	جيد جدا	مقبول	جيد
جيد	جيد	جيد جدا	ممتاز	ممتاز	جيد
ممتاز	ممتاز	جيد	مقبول	جيد جدا	مقبول
جيد جدا	جيد جدا	مقبول	جيد	ممتاز	جيد
مقبول	مقبول	جيد جدا	مقبول	جيد	مقبول
جيد	مقبول	ممتاز	جيد	مقبول	مقبول

الحل: اول خطوة في اعداد جدول التوزيع التكراري المزدوج هي اعداد جدول التفريغ ويتضمن هذا الجدول تقديرات مذكرات تخرج الماستر افقيا وتقديرات مذكرات تخرج الدكتوراه عموديا، حيث نحسب عدد الطلبة الذين لديهم نفس التقدير في مذكرات تخرج الماستر ونفس التقدير في مذكرات تخرج الدكتوراه لكل حالة من الحالات. ثم يضاف صف اخير وعمود اخير للتأكد من ان مجموع تقديرات مذكرات تخرج الماستر (التكرارات الافقية) مساوي لمجموع تقديرات مذكرات الدكتوراه (التكرارات العمودية) أي يجب ان يكون العدد الاجمالي لكل منهما مساو لعدد الطلبة (30). وجدول التفريغ يكون كمايلي.

الجدول 5: جدول تفريغ المعطيات المزدوج

الماستر / الدكتوراه	مقبول	جيد	جيد جدا	ممتاز	**المجموع**
مقبول	///	////			**7**
جيد	//////	//	/////		**13**
جيد جدا	//		///	/	**6**
ممتاز		///		/	**4**
المجموع	**11**	**9**	**8**	**2**	**30**

ومن جدول التفريغ يمكن اشتقاق جدول التوزيع التكراري المزدوج وهذا عن طريق تعويض العلامات بعددها بالأرقام كما هو مبين في الجدول اللاحق.

الجدول 6: جدول التوزيع التكراري المزدوج

الماستر / الدكتوراه	مقبول	جيد	جيد جدا	ممتاز	**المجموع**
مقبول	3	4	–	–	**7**
جيد	6	2	5	–	**13**
جيد جدا	2	–	3	1	**6**
ممتاز	–	3	–	1	**4**
المجموع	**11**	**9**	**8**	**2**	**30**

ويمكن الحصول على جدول التوزيع التكراري البسيط لتقديرات مذكرات تخرج الماستر عن طريق اخذ الصف الاول والصف الاخير من جدول التوزيع التكراري المزدوج. كما يمكن الحصول على جدول التوزيع التكراري البسيط لتقديرات مذكرات تخرج الدكتوراه عن طريق اخذ العمود الاول والعمود الاخير من جدول التوزيع التكراري المزدوج كما يلي:

الجدول 7: جدول التوزيع التكراري البسيط لتقديرات مذكرات تخرج الماستر/ الدكتوراه

الماستر	التكرار
مقبول	11
جيد	9
جيد جدا	8
ممتاز	2
المجموع	**30**

الدكتوراه	التكرار
مقبول	7
جيد	13
جيد جدا	6
ممتاز	4
المجموع	**30**

2. التمثيل البياني للتوزيعات التكرارية

بالإضافة الى تبويب المعطيات ضمن الجداول التكرارية يمكن توضيح المعطيات بطريقة اخرى باستعمال التمثيل او الرسم البياني. وتختلف الرسوم البيانية باختلاف المعطيات إلا ان اكثرها استعمالا هي الاعمدة البيانية وتستخدم لعرض المعطيات الوصفية والمدرجات التكرارية التي تستخدم لعرض المعطيات الكمية.

1.2 الاعمدة البيانية: تستخدم الأعمدة البيانية لوصف المعطيات النوعية والمعطيات المنفصلة، وهي عبارة عن اعمدة تستعمل لتوضيح قيم او تكرارات ظاهرة ما (المتغير) في فترات زمنية مختلفة وذلك لمتابعة تطورها خلال زمن الدراسة. كما تستعمل لعرض الفئات المختلفة لظاهرة معينة لغرض المقارنة بين هذه الفئات.

تظهر الاعمدة البيانية على شكل مستطيلات ذات سمك واحد ومنفصلة عن بعضها بحيث يمثل كل عمود فترة او فئة الظاهرة وطول كل عمود يمثل عدد مفرداتها او تكراراها أي انه يتم تمثيل المتغير في المحور الافقي والتكرارات او القيم على المحور العمودي.

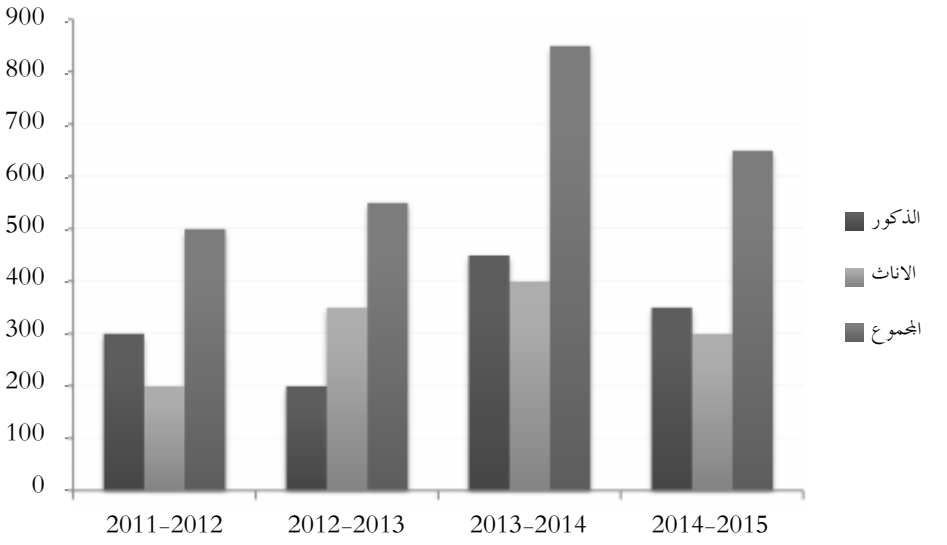
وتعتبر طريقة الأعمدة البيانية من اكثر الطرق استعمالا في عرض المعطيات لسهولة رسمها وفهمها، وسنوضح طريقة عملها في المثال التالي.

المثال 2: معطيات الجدول الموالي تمثل فئات الطلبة المسجلين في تخصص ماستر مالية وبنوك في كلية العلوم الاقتصادية لعدة سنوات. المطلوب: عرض هذه المعطيات باستعمال الاعمدة البيانية.

سنوات التسجيل	الذكور	الاناث	المجموع
2011-2012	300	200	500
2012-2013	200	350	550
2013-2014	450	400	850
2014-2015	350	300	650

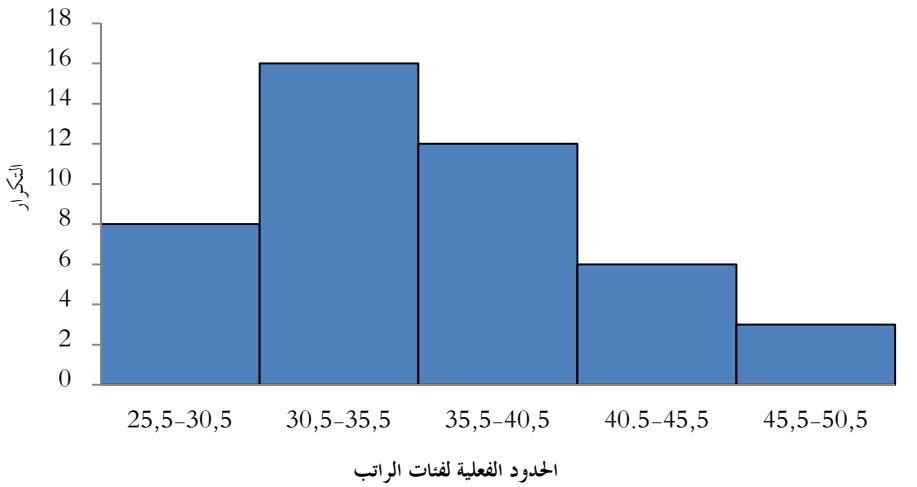
لعرض هذه المعطيات على شكل اعمدة نقوم بتمثيل السنوات على المحور الافقي ونرسم مقابل كل سنة ثلاثة مستطيلات: المستطيل الاول يمثل فئة الذكور المسجلين في التخصص، المستطيل الثاني يمثل فئة الاناث

المسجلات في التخصص والمستطيل الثالث يمثل مجموع الطلبة المسجلين في التخصص. وطول ارتفاع كل مستطيل يمثل التكرارات او عدد الطلبة في كل فئة. ويظهر الرسم البياني للاعمدة بالشكل التالي.



الشكل 1: فئات الطلبة المسجلين في تخصص ماستر مالية وبنوك من 2011 الى غاية 2015

2.2 المدرج التكراري: المدرج التكراري هو عبارة عن مستطيلات متلاصقة، يمثل كل مستطيل تكرار كل فئة من فئات التوزيع التكراري حيث حدود قاعدة المستطيل هي الحدود الفعلية لتلك الفئة وارتفاعه هو التكرار المعدل والذي يساوي تكرار الفئة/طول الفئة. وهذا يعني ان تكرار الفئة يتناسب مع مساحة المستطيل الذي يمثلها. وإذا كان للتوزيع التكراري فئات متساوية فإننا نمثل كل فئة بمستطيل حدود قاعدته الحدود الفعلية لتلك الفئة وطول ارتفاعه يتناسب مع تكرارها. أي اننا نضع على المحور الافقي الحدود الفعلية لكل فئة ونرسم ضمن حدود الفئة مستطيل طوله يساوي تكرار الفئة. كما يمكن ان نرسم المدرج التكراري بتحديد مراكز الفئات على المحور الافقي ومنها يرسم ارتفاع المستطيل الممثل للتكرار في منتصف قاعدة المستطيل على ان يكون البعد من احد جوانب مراكز الفئة مساويا لبعد الجانب الاخر. وحسب هذه الطريقة يظهر المدرج التكراري لمعطيات المثال 1 كمايلي.



الشكل 2: المدرج التكراري لفئات الراتب

3. مقاييس النزعة المركزية Paramètres de tendance centrale

تهدف مقاييس النزعة المركزية الى تلخيص اهم صفات او خصائص مجموعة من المعطيات وهذا من خلال اختيار قيمة معينة لتمثيل هذه القيم والتعبير عنها وتميل هذه القيمة لان تكون نموذجية ولها القدرة على اعطاء فكرة عامة عن مجموعة القيم التي تنتمي اليها. ومن اهم مقاييس النزعة المركزية نجد الوسط الحسابي، الوسيط والمنوال بالإضافة الى الربيعات والعشيرات والمئينات والتي تقل اهمية عن سابقاتها لكنها تدخل في حساب بعض المقاييس الاخرى.

1.3 الوسط الحسابي La moyenne arithmétique : يعتبر من اهم مقاييس النزعة المركزية وأكثرها شيوعا في التطبيقات العملية وخاصة في المقارنات الاحصائية بين الظواهر المختلفة، كما ان قيمته تدخل في حساب العديد من المؤشرات والمقاييس والاختبارات الاحصائية. ومن عيوبه انه يتأثر بالقيم المتطرفة الكبيرة او الصغيرة.

اولا– الوسط الحسابي للمعطيات غير المبوبة او الخام: يستخرج بقسمة مجموع القيم على عددها كمايلي:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Xi}{n}$$

بحيث $\bar{X}$ = المتوسط الحسابي و $\sum_{i=1}^{n} Xi$ تمثل مجموع قيم المشاهدات.

والمتوسط الحسابي للمعطيات الخام للمثال السابق يحسب كمايلي:

$\bar{X}$ =(32+31+33+…+37+38)/45

$\bar{X}$ = 1614/45=35,87

ثانيا– الوسط الحسابي للمعطيات المبوبة او الفئات: يستخرج الوسط الحسابي في هذه الحالة على افتراض ان التكرارات تتراكم على مراكز الفئات وهكذا فان الوسط الحسابي يستخرج كمايلي:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{h} Xi\ fi}{\sum_{i=1}^{h} fi}$$

بحيث $\bar{X}$= المتوسط الحسابي

Xi = مراكز الفئات

n = $\sum_{i=1}^{h} fi$: مجموع التكرارات

h: عدد الفئات.

والمتوسط الحسابي لفئات المثال السابق يحسب كمايلي:

الفئات	مركز الفئة Xi	التكرار fi	Xifi
30-26	28	8	224
35-31	33	16	528
40-36	38	12	456
45-41	43	6	258
50-46	48	3	144
المجموع		45	1610

$\bar{X}$ = 1610/45=35,78

نجد اختلاف بسيط بين المتوسط الحسابي للمعطيات الخام و المتوسط الحسابي المعطيات المبوبة في فئات بسبب ان المتوسط الحسابي الاول اكثر دقة من الثاني، والذي تم حسابه بافتراض ان تكرار الفئة يتعلق بقيمة مركز تلك الفئة لكن في الواقع التكرار جاء من قيم مختلفة تقع ضمن مجال الفئة.

2.3 الوسيط La médiane: يعرف الوسيط على انه القيمة التي تقسم المعطيات الى جزئين متساويين. فالوسيط هو القيمة التي توازن بين المعطيات الصغيرة والمعطيات الكبيرة من حيث عددها. ولاستخراج الوسيط لابد من ترتيب المعطيات ترتيبا تصاعديا او تنازليا.

اولا– الوسيط للمعطيات الخام: الوسيط لمجموعة من المعطيات مرتبة ترتيبا تصاعديا او تنازليا هو القيمة التي ترتيبها $(n+1)/2$ أي $X_{(n+1)/2}$ اذا كان عدد القيم n فرديا. وهو المتوسط الحسابي للقيمتين اللتين ترتيبهما هو $n/2$ و $(n+2)/2$ أي $[X_{n/2}+X_{(n+2)/2}]/2$ اذا كان عدد القيم n زوجيا.

والوسيط للمعطيات الخام للمثال السابق يحسب كمايلي:

- لابد اولا من ترتيب القيم ترتب تصاعديا:

26 26 27 28 29 30 30 30 31 31 31 31 32 32 32 33 33 34 34 34 35 35

35 35 36 37 37 37 38 38 38 39 39 39 40 40 41 42 43 44 44 45 46 48 49

- بما ان $n=45$ أي عدد فردي، فان الوسيط يقابل القيمة التي ترتيبها هو $(45+1)/2=23$ أي الوسيط هو 35.

ثانيا– الوسيط للمعطيات المبوبة: الفئة الوسيطية هي اول فئة يزيد تكرارها المتجمع عن $n/2$ او يساويه حيث n هو مجموع التكرارات. ويحسب الوسيط للمعطيات المبوبة اي للتوزيع التكراري بالعلاقة:

$$M = a + \frac{(n/2 - n_1)}{fm} * C$$

بحيث:

n = مجموع التكرارات؛

C = طول الفئة الوسيطية؛

a = الحد الادنى الفعلي للفئة الوسيطية؛

fm = تكرار الفئة الوسيطية؛

n1 = التكرار المتجمع للفئة التي تسبق الفئة الوسيطية مباشرة؛

b = الحد الاعلى الفعلي للفئة الوسيطية.

والوسيط للتوزيع التكراري للمثال السابق يحسب كمايلي:

- نقوم اولا بتحديد الفئة الوسيطية التي تتمثل في اول فئة يزيد تكرارها المتجمع عن $45/2=22,5$ وهي الفئة الثانية وحدودها الفعلية هي: 30,5-35,5.

- نحدد القيم المجهولة لمعادلة الوسيط: n=45؛ C=5؛ a =30,5؛ fm= 16؛ n1=8؛ b=35,5.

- نحسب الوسيط بتعويض القيم السابقة في معادلة السابقة نجد ان الوسيط للتوزيع التكراري= 35,03.

3.3 المنوال Le mode: المنوال هو القيمة التي تتكرر اكثر من غيرها أي انه اذا وضعنا المعطيات في توزيع تكراري فان المنوال يكون تلك القيمة او الفئة التي يقابلها اكبر تكرار. والفئة التي يقابلها كبر تكرار تسمى الفئة المنوالية ومركزها يسمى المنوال التقريبي.

في المثال السابق للمعطيات الخام اكثر من منوال لان القيمة 31 والقيمة 35 تكررت كل منها 4 مرات. اما الفئة المنوالية لهذه المعطيات فهي الفئة 31-35 لانه يقابلها اكبر تكرار (16) والمنوال التقريبي هو مركزها أي 33.

4.3 الربيعات والعشيرات والمئينات: تعتمد الربيعات والعشيرات والمئينات على فكرة الوسيط. فالوسيط هو القيمة التي تقسم المعطيات الى جزئين متساويين، لكن عندما يتم تقسيم المعطيات الى اربعة اجزاء متساوية نحصل على الربيعات، واذا قمنا بتقسيمها الى عشرة اجزاء متساوية نحصل على العشيرات، واذا قمنا بتجزئتها الى مائة جزء متساو نحصل على المئينات. ويرمز للربيعات Q1,Q2,Q3 وللعشيرات D1,D2,…,D9 وللمئينات P1,P2,…,P99.

4. مقاييس التشتت Paramètres de dispersion

على الرغم من اهمية مقاييس النزعة المركزية في اغطاء صورة واضحة لوصف مجموعة المعطيات إلا ان هذه المقاييس تبقى قاصرة عن اعطاء فكرة عن كيفية او مدى انتشار هذه القيم مقارنة بوسطها الحسابي لذلك تستخدم مقاييس التشتت لقياس انتشار او تبعثر المعطيات حول نقطة التمركز (الوسط الحسابي) لقياس مدى اختلاف المعطيات فيما بينها ومدى التفاوت او التقارب بين مفرداتها. وكلما اقتربت قيم المقاييس من الصفر كلما كان التشتت ضعيفا والعكس صحيح. ومن اهم مقاييس التشتت نجد: المدى، الانحراف المعياري والتباين.

1.4 المدى L'étendue: المدى هو الفرق بين اكبر قيمة واصغر قيمة في المعطيات الخام، وهو الفرق بين الحد الاعلى للفئة العليا والحد الادنى للفئة الدنيا في المعطيات المبوبة. فإذا كان المدى صغيرا نستنتج ان قيم المعطيات تمتد لمسافة قصيرة وإذا كان المدى كبيرا فان قيم المعطيات تمتد لمسافة طويلة. من عيوب هذا المقياس انه لا ياخذ بعين الاعتبار جميع القيم المكونة للمعطيات وانما يركز فقط على القيمتين العليا والدنيا.

في مثالنا السابق المدى للمعطيات الخام هو 49-26= 23، والمدى للمعطيات المبوبة هو 50,5-25,5= 25.

2.4 التباين La variance: يعرف التباين بانه متوسط مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابي. ويتم استخراجه في المعطيات الخام بقسمة مجموع مربعات انحرافات القيم عن المتوسط الحسابي على عدد القيم.

اما بالنسبة للمعطيات المبوبة فيتم ترجيح مربعات انحرافات القيم عن المتوسط الحسابي بالتكرارات المقابلة لها كما يتم تخفيض المقسوم عليه (التكرارات) بمقدار واحد صحيح للحصول على افضل تقدير لتباين المجتمع الذي اخذت منه العينة. ويرمز لتباين المجتمع الاحصائي $(\sigma X)^2$.

اولا– صيغة التباين للمعطيات الخام:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(Xi-\bar{X})^2}{n-1}$$

المثال2: اوجد التباين للمعطيات التالية: 5 7 8 12 6 9 11 6

– لحساب التباين لابد من حساب المتوسط الحسابي للمعطيات الخام كمايلي:

$$\bar{X} = \frac{6+11+9+6+12+8+7+5}{8} = 8$$

– نقوم الان بحساب التباين كمايلي:

$$S^2 = \frac{(6-8)^2+(11-8)^2+(9-8)^2+(6-8)^2+(12-8)^2+(8-8)^2+(7-8)^2+(5-8)^2}{7}$$

$S^2=6,28$

ثانيا– صيغة التباين للمعطيات المبوبة:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{h}(Xi-\bar{X})^2 fi}{n-1}$$

حيث: $\bar{X}$= المتوسط الحسابي للتوزيع التكراري

$n = \sum_{i=1}^{h} fi$: مجموع التكرارات

h: عدد الفئات.

المثال 3: لديك مركز الفئة والتكرار لمجموعة معطيات والمطلوب حساب تباينها:

مركز الفئة Xi	التكرار fi	Xifi	$Xi-\bar{X}$	$(Xi-\bar{X})^2$	$(Xi-\bar{X})^2 fi$
12	6	72	-11	121	726
17	5	85	-6	36	180
22	12	264	-1	1	12
27	9	243	4	16	144
32	8	256	9	81	648
المجموع	**40**	**920**			**1710**

– في الجدول قمنا باجراء الحسابات اللازمة لحساب كل من المتوسط الحسابي والتباين ويكفي ان نعوضها في معادلاتهما لنتحصل على النتائج التالية:

$$\bar{X} = \frac{920}{40} = 23$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{h}(Xi-\bar{X})^2 fi}{\sum_{i=1}^{h} fi-1} = \frac{1710}{39} \qquad S^2=43,85$$

3.4 الانحراف المعياري L'écart type: يقيس الانحراف المعياري درجة تشتت القيم عن وسطها الحسابي بوحدات قياس المعطيات ويمثل الجذر التربيعي للتباين أي $S=\sqrt{S^2}$. ويعتبر الانحراف المعياري ادق واهم مقاييس التشتت لارتباطه الوثيق بالدلالة الاحصائية لأغلب المقاييس أي مدى الثقة بالقيمة العددية لها إلا انه يعاب عليه تأثره بالوسط الحسابي للمعطيات.

والانحراف المعياري لمعطيات المثال 2:

$S=\sqrt{6,28}$ $S=2,50$

والانحراف المعياري لمعطيات المثال 3:

$S=\sqrt{43,85}$ $S=6,62$

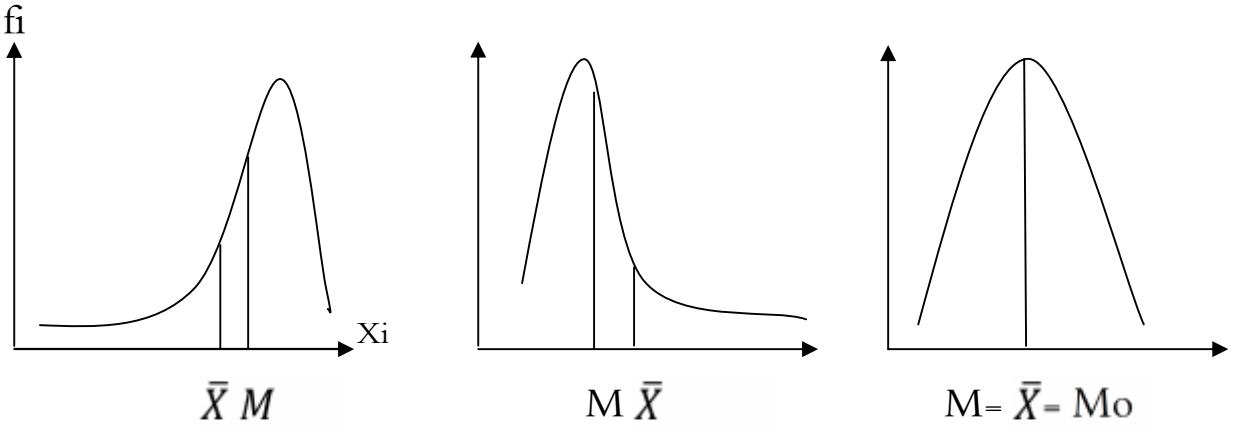
5. مقاييس الالتواء والتفلطح Paramètres de distribution

تساعد مقاييس التوزيع (الالتواء والتفلطح) في تحديد شكل توزيع المعطيات والتي يتم تصنيفها اجمالا ضمن مجموعتين: اما ضمن التوزيعات المتماثلة او ضمن التوزيعات غير المتماثلة. يكون التوزيع متماثلا اذا انطبق نصفيه على بعضهما تمام الانطباق انطلاقا من نقطة التمركز، وفي هذه الحالة يتساوى كل من الوسط الحسابي والوسيط والمنوال. ويكون التوزيع غير متماثلا اي ملتويا في الحالات الاخرى. ويتحدد شكل توزيع المعطيات من خلال دراسة درجة التواءها ومدى تفرطحها. والهدف من دراسة شكل التوزيع هو معرفة اذا كان توزيع المعطيات توزيعا طبيعيا أي متماثلا او لا وهذا لاختيار الاسلوب الاحصائي المناسب لتحليل المعطيات: فاذا كان توزيع المعطيات متماثلا –طبيعيا- نختار الطرق الاحصائية المعلمية وإذا كان توزيع المعطيات غير متماثل نختار الطرق الاحصائية اللامعلمية.

1.5 مقاييس الالتواء Skewness/L'asymétrie: يقيس الالتواء تماثل التوزيع. ومقاييس الالتواء توضح درجة ابتعاد المنحنى التكراري للمعطيات عن حالة التماثل، ويسمى ابتعاد المنحنى عن حالة التماثل بالالتواء. فيكون التوزيع متماثلا اذا كان معامل الالتواء معدوم، وملتويا اذا امتد احد طرفيه بشدة نحو اليمين او نحو اليسار.

عندما يكون طرف التوزيع ممتدا نحو اليمين نقول ان التوزيع ملتوي نحو اليمين أي موجب الالتواء لان القيم المتطرفة نحو اليمين تؤثر على الوسط الحسابي وتسحبه نحو اليمين وبذلك يكون الوسط الحسابي اكبر من

الوسيط. وإذا كان طرف التوزيع ممتدا نحو اليسار نقول ان التوزيع ملتوي نحو اليسار أي سالب الالتواء لان الوسط الحسابي سيكون اصغر من الوسيط كما هو موضح في الاشكال التالية:



ا–توزيع متماثل التواء معدوم | **ب– توزيع ملتوي نحو اليمين التواء موجب** | **ج– توزيع ملتوي نحو اليسار التواء سالب**

الشكل3: شكل التوزيع المتماثل والملتوي

حيث: $\bar{X}$= المتوسط الحسابي، M= الوسيط، Mo= المنوال.

ويمكن حساب مقياس الالتواء لتوزيع تكراري او مجموعة من المعطيات باستخدام معامل بيرسون للالتواء وفق الصيغة التالية:

$$Sk= \frac{3(\bar{X}-M)}{S}$$

حيث: : $\bar{X}$= المتوسط الحسابي، M= الوسيط، S= الانحراف المعياري.

ويستفاد من حساب مقياس الالتواء في معرفة نوعية التواء التوزيع التكراري (موجب الالتواء أي ملتوي نحو اليمين وبالتالي $\bar{X} > M$ او سالب الالتواء أي ملتوي نحو اليسار وبالتالي $\bar{X} < M$) وللمقارنة بين التواء توزيعين تكرارين. ويعتبر العديد من الباحثين ان توزيع المعطيات يكون شبه متماثل (أي قريب من التوزيع الطبيعي) ما لم تتجاوز قيمة معامل الالتواء 3 بالقيمة المطلقة I3I.

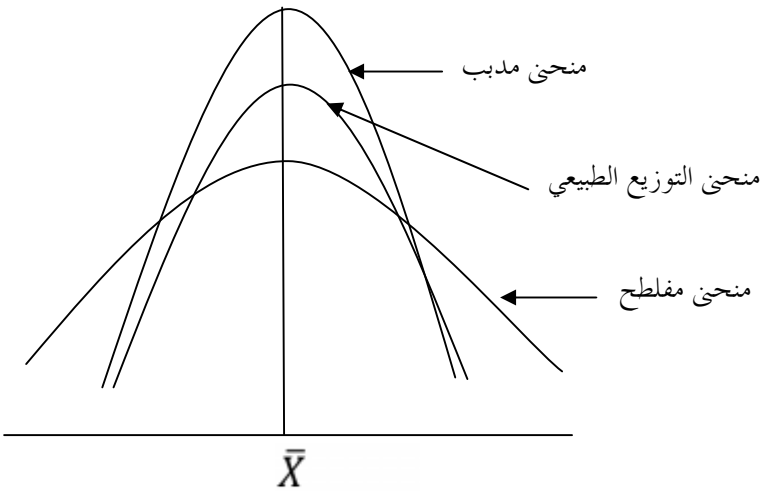
مثال 4: توزيع تكراري وسطه الحسابي $\bar{X}$= 32 والوسيط M=37 وتباينه S^2 =36، اوجد معامل التوائه.

– نحسب معامل الالتواء بالتعويض في المعادلة:

$$Sk= \frac{3(\bar{X}-M)}{S}= \frac{3(32-37)}{6} \quad Sk= -2,5$$

نلاحظ ان معامل الالتواء سالب هذا يعني ان التوزيع ملتو نحو اليسار.

5.2 مقاييس التفلطح Kurtosis: ان اختلاف اشكال التوزيعات التكرارية عن حالة التماثل التي يمثلها التوزيع الطبيعي قد لا يكون بسبب التوائها فقط، بل قد يأخذ الاختلاف شكلا اخر وذلك بارتفاعها او انخفاضها عن المنحنى الطبيعي على الرغم من تماثل المنحنى حول المحور الراسي الذي يمر بالوسط الحسابي. وهذا ما يوضحه الشكل التالي:



الشكل4: شكل التفلطح والتدبب مقارنة بمنحنى التوزيع الطبيعي

يقيس معامل التفلطح درجة علو او تسطح قمة التوزيع بالنسبة للتوزيع الطبيعي. ويأخذ معامل التفلطح الصيغة التالية:

- في حالة المعطيات الخام:

$$K = \frac{\sum_{i=1}^{n}(Xi-\bar{X})^4}{nS^4}$$

حيث: $\bar{X}$= المتوسط الحسابي، n= مجموع التكرارات، S= الانحراف المعياري.

- في حالة المعطيات المبوبة:

$$K = \frac{\sum_{i=1}^{h}(Xi-\bar{X})^4 fi}{nS^4}$$

حيث: $\bar{X}$= المتوسط الحسابي،fi= التكرار، n= مجموع التكرارات، S= الانحراف المعياري.

إذا كان معامل التفلطح كبير سمي التوزيع كبير التفلطح وهذا يعني ان المعطيات مسطحة مقارنة بالتوزيع الطبيعي. وإذا كانت قيمته صغيرة سمي التوزيع مدببا او قليل التفلطح أي للتوزيع قمة عالية وهذا يعني ان المعطيات اكثر علوا من التوزيع الطبيعي. ويعتبر العديد من الباحثين انه ما لم تتجاوز قيمة معامل التفلطح 8 بالقيمة المطلقة I8I يمكن اعتبار ان توزيع المعطيات يكون قريب من التوزيع الطبيعي.

مثال 5: احسب معامل التفلطح للتوزيع التكراري للمثال 3.

مركز الفئة Xi	التكرار fi	Xifi	$Xi-\bar{X}$	$(Xi_\bar{X})^2$	$\overline{(Xi_\bar{X})^4}$	$(Xi_\bar{X})^4fi$
12	6	72	-11	121	14641	87846
17	5	85	-6	36	1296	6480
22	12	264	-1	1	1	12
27	9	243	4	16	256	2304
32	8	256	9	81	6561	52488
المجموع	**40**	**920**				**149130**

مع $\bar{X}$=23 و S^2 =43,85

-نعوض القيم المحسوبة في الجدول في المعادلة ونحصل على:

$$K = \frac{\sum_{i=1}^{h}(Xi-\bar{X})^4 fi}{nS^4} = \frac{149130}{76913} \qquad K = 1,94$$

نلاحظ ان معامل التفلطح صغير هذا يعني ان التوزيع قليل التفلطح مقارنة بالتوزيع الطبيعي.

6. تطبيقات عملية على برنامج SPSS

بعد معرفة كيفية تطبيق مختلف الصيغ الحسابية الاحصائية على المعطيات بالطريقة اليدوية ننتقل الى تعلم كيفية التحليل الاحصائي للمعطيات في المجال التطبيقي، وهذا باستخدام البرنامج الاحصائي الجاهز SPSS[1]. والذي يعتبر من البرامج الهامة والمتطورة التي يمكن استخدامها في تطبيقات كثيرة ومن ضمنها التطبيقات الاحصائية. فهذا البرنامج يمكننا من توخي السرعة والدقة في معالجة المعطيات وتفادي التعقيدات والأخطاء الحسابية خاصة اننا في الواقع العملي نتعامل مع عدد كبير من المتغيرات والمشاهدات. وفيما يلي سنستعرض بعض الامثلة التطبيقية وكيفية استعمال برنامج SPSS لحلها. وقبل ذلك لابد ان نتطرق الى اهم الخطوات الواجب اتباعها قبل البدء في عملية التحليل الاحصائي للمعطيات باستعمال البرنامج والمتمثلة في:

1- تعريف المتغيرات.

2- ادخال المعطيات الى البرنامج بالصيغ التي يقبل تنفيذها.

3- التعرف على الاوامر المطلوب تنفيذها وكيفية التعامل معها.

4- قراءة المخرجات وتفسيرها.

ويمكن التعرف على كيفية تنفيذ هذه الخطوات من خلال الاطلاع على الملحق رقم 2.

[1] سيتم استعمال الاصدار رقم 21 للبرنامج لسنة 2013 لتنفيذ العمليات التطبيقية لكن يمكن استعمال أي من الاصدارات القريبة للبرنامج.

مثال 6: الجدول الموالي يتضمن معطيات حول متوسط الاجر في مؤسستين متنافستين E1 و E2 مقارنة بالمستوى التعليمي للموظفين وجنسهم. والمطلوب القيام بدراسة احصائية وصفية لمعطيات العينة وهذا من خلال:

1- اعداد جداول التوزيع التكراري لمتغير المستوى.

2- حساب مقاييس النزعة المركزية ومقاييس التشتت وشكل التوزيع للمتغيرات الكمية.

3- التمثيل البياني للمتغيرات الكمية والوصفية.

4- اعداد جدول التوزيع التكراري المزدوج او التقاطعي لمتغير المستوى مع متغير الجنس.

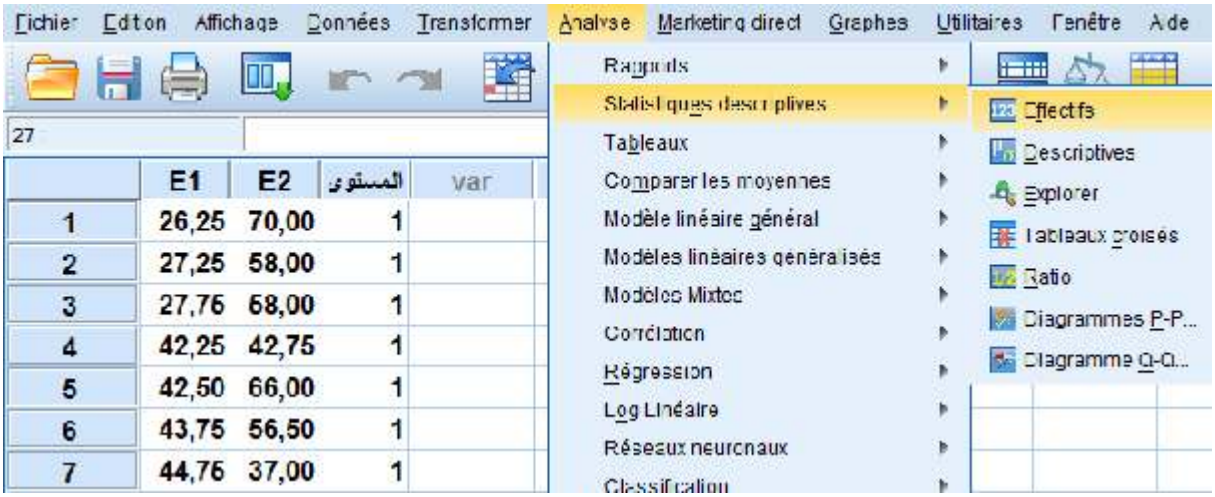
اجر E1	اجر E2	المستوى	الجنس	اجر E1	اجر E2	المستوى	الجنس	اجر E1	اجر E2	المستوى	الجنس
26,25	70,00	جامعي	ذكر	60,50	71,25	جامعي	ذكر	45,75	64,75	اقل من جامعي	ذكر
27,25	58,00	جامعي	انثى	62,75	68,50	جامعي	انثى	49,75	76,75	اقل من جامعي	انثى
27,75	58,00	جامعي	ذكر	64,00	29,25	جامعي	ذكر	50,75	64,25	اقل من جامعي	ذكر
42,25	42,75	جامعي	انثى	85,50	66,00	جامعي	انثى	63,50	73,25	اقل من جامعي	انثى
42,50	66,00	جامعي	ذكر	92,75	58,50	جامعي	ذكر	63,50	73,25	اقل من جامعي	ذكر
43,75	56,50	جامعي	انثى	94,75	73,50	جامعي	انثى	66,50	75,75	اقل من جامعي	انثى
44,75	37,00	جامعي	ذكر	98,00	43,75	جامعي	ذكر	71,00	66,00	اقل من جامعي	ذكر
49,00	59,25	جامعي	انثى	98,00	51,25	جامعي	انثى	71,75	66,75	اقل من جامعي	انثى
51,50	70,25	جامعي	ذكر	98,00	52,50	جامعي	ذكر	73,00	65,25	اقل من جامعي	ذكر
52,50	53,75	جامعي	انثى	30,75	64,25	اقل من جامعي	انثى	94,25	66,25	اقل من جامعي	انثى

ملاحظة: تم ترميز المتغيرات في البرنامج كما يلي:

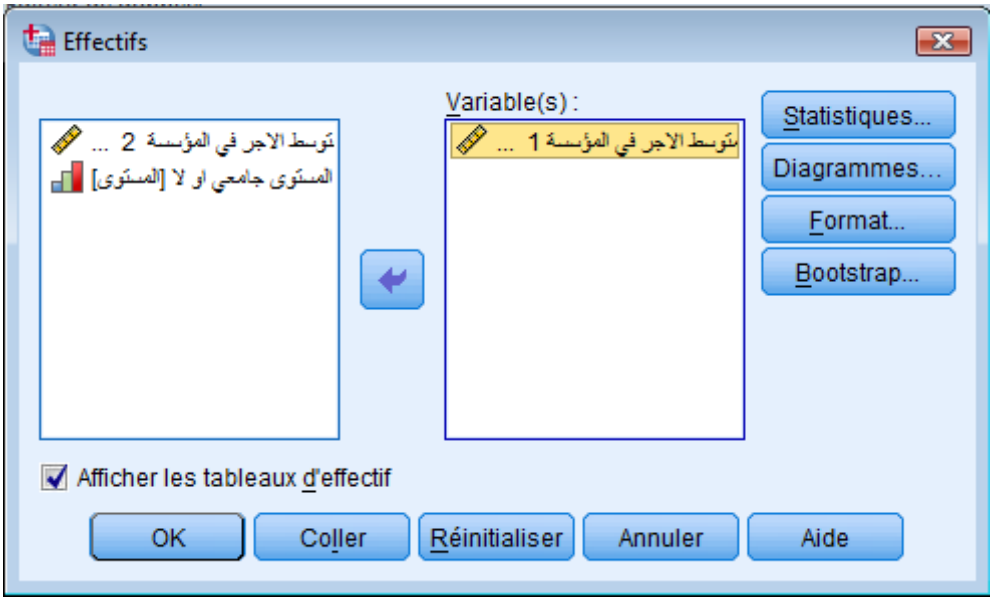
- متغير اجر المؤسسة 1: متغير كمي سلمي.
- متغير اجر المؤسسة 2: متغير كمي سلمي.
- متغير المستوى: متغير وصفي ترتيبي بحيث اعطي الرقم 1 كرمز للمستوى الجامعي وأعطي الرقم 2 كرمز للمستوى الاقل من الجامعي.
- متغير الجنس: متغير وصفي اسمي بحيث اعطي الرقم 1 كرمز للذكر وأعطي الرقم 2 كرمز للأنثى.

1.6 عرض المعطيات باستخدام الامر "Statistiques descriptives": للحصول على جداول التوزيع التكراري للمتغيرات الترتيبية والكمية ولتمثيلها بيانيا ولحساب مقاييس النزعة المركزية ومقاييس التشتت وشكل التوزيع لمتغير كمي او اكثر باستعمال برنامج SPSS نتبع الخطوات التالية:

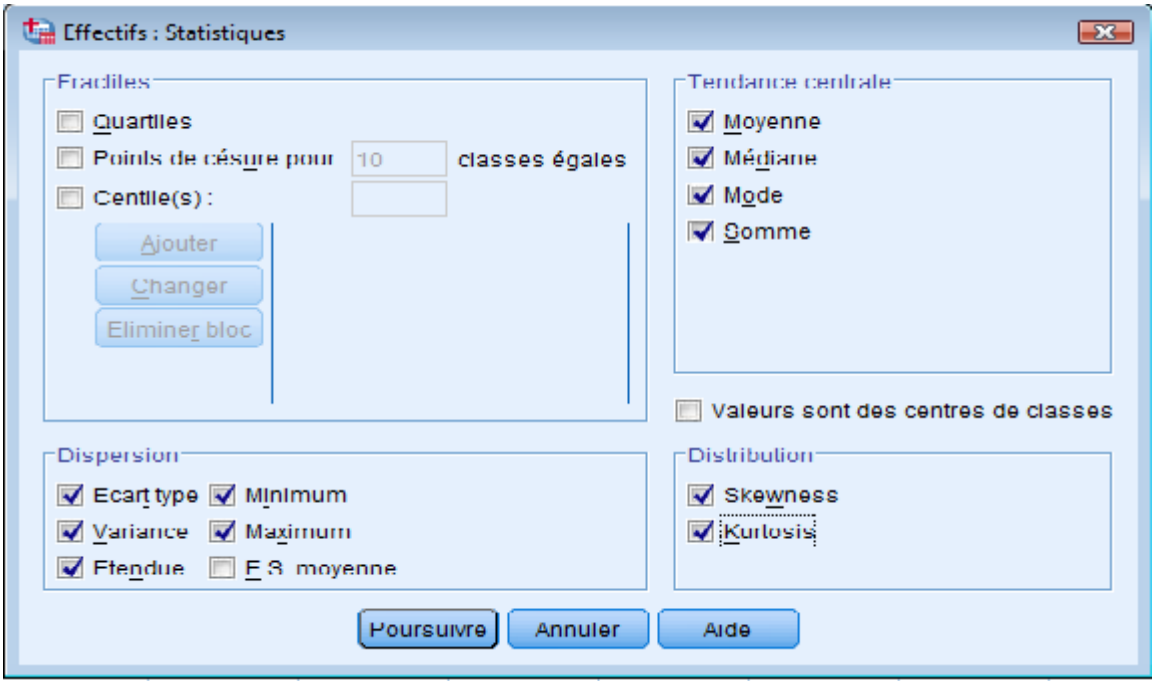
نختار من لائحة Analyse الامر Statistiques descriptives ثم ننقر على خيار Effectifs فيظهر مربع الحوار الخاص ونختار المتغيرات المراد حساب التكرارات لها وننقلها بالنقر على ثم ننقر على خانة Afficher les tableaux d'effectif لإظهار جدول التوزيع التكراري للمتغيرات المختارة. ثم ننقر على الخيار Statistiques فيظهر مربع الحوار الخاص بالإحصاءات الوصفية فنختار ضمن قائمة Tendance centrale المتوسطات المراد حسابها ونختار ضمن قائمة Dispersion المقاييس المراد حسابها ونختار ضمن قائمة Distribution مقاييس التوزيع المراد حسابها ثم ننقر على Poursuivre ثم ننقر على خيار Diagrammes فيظهر مربع الحوار الخاص بالتمثيل البياني نختار نوع الرسم ونوع القيمة ثم ننقر على Poursuivre ثم ننقر على OK.



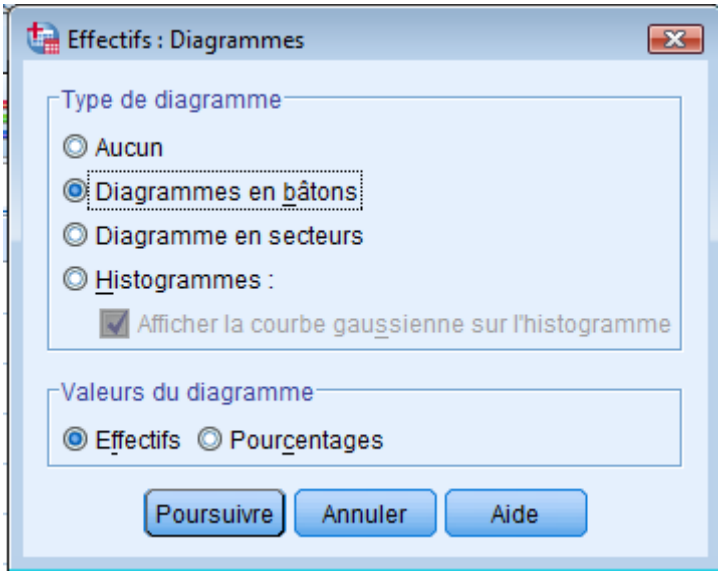
مربع الحوار الذي يسمح بحساب التكرارات يظهر بالشكل التالي:



مربع الحوار الذي يسمح بحساب مقاييس النزعة المركزية ومقاييس التشتت وشكل التوزيع للمتغيرات الكمية يظهر بالشكل التالي:



ومربع الحوار الذي يسمح بالتمثيل البياني للمتغيرات يظهر بالشكل التالي:



علما ان التمثيل البياني للمتغيرات النوعية (بالتكرارات اوالنسب المئوية) يتم باستخدام الاعمدة البيانية Diagrammes en bâtons او الدائرة البيانية Diagramme en secteurs، بينما التمثيل البياني للمتغيرات الكمية يتم باستخدام المدرج التكراري Histogrammes.

اولا– الجدول التكراري: تظهر مخرجات تنفيذ الامر:

" Statistiques descriptives/Effectifs/Afficher les tableaux d'effectif" على متغير المستوى بالشكل التالي:

Effectifs

Tableau de fréquences

المستوى جامعي او لا

		Effectifs	Pourcentage	Pourcentage valide	Pourcentage cumulé
Valide	جامعى	19	63,3	63,3	63,3
	اقل من جامعى	11	36,7	36,7	100,0
	Total	30	100,0	100,0	

يتكون الجدول التكراري للمتغير الذي اخترناه لتنفيذ الامر من اربعة اعمدة:

- العمود الاول يبين عدد مفردات العينة في كل فئة من فئات المتغير:
- العمود الثاني يبين النسبة المئوية لكل فئة.
- العمود الثالث يبين النسب المئوية بعد استبعاد المعطيات المفقودة.
- العمود الرابع يبين النسب التراكمية او المجمعة لفئات المتغير.

بالنسبة لمثالنا نلاحظ انه تم تقسيم العينة حسب متغير "المستوى" لفئتين هما: الجامعي واقل من الجامعي. ولكل فئة تم حساب التكرار Effectif بالقيمة وبالنسبة المئوية. فنجد ان 19 مفردة من مفردات العينة تنتمي للمستوى الجامعي أي بنسبة 63%، و 11 مفردة من مفردات العينة تنتمي للمستوى اقل من الجامعي أي بنسبة 37%.

ثانيا– مقاييس النزعة المركزية و التشتت والتوزيع:

تظهر مخرجات تنفيذ الامر Statistiques descriptives/Effectifs/Statistiques/Tendance centrale/Dispersion/Distribution على المتغيرين "اجر المؤسسة1" و"اجر المؤسسة 2" بالشكل التالي:

Statistiques

		متوسط الاجر في المؤسسة1	متوسط الاجر في المؤسسة2
N	Valide	30	30
	Manquante	0	0
Moyenne		61,4083	61,4167
Médiane		61,6250	65,0000
Mode		98,00	66,00
Ecart-type		22,56251	11,61994
Variance		509,067	135,023
Asymétrie		,269	-1,115
Erreur std. d'asymétrie		,427	,427
Aplatissement		-,924	,969
Erreur std. d'aplatissement		,833	,833
Intervalle		71,75	47,50
Minimum		26,25	29,25
Maximum		98,00	76,75
Somme		1842,25	1842,50

تظهر النتائج ضمن جدول يلخص المقاييس التالية:

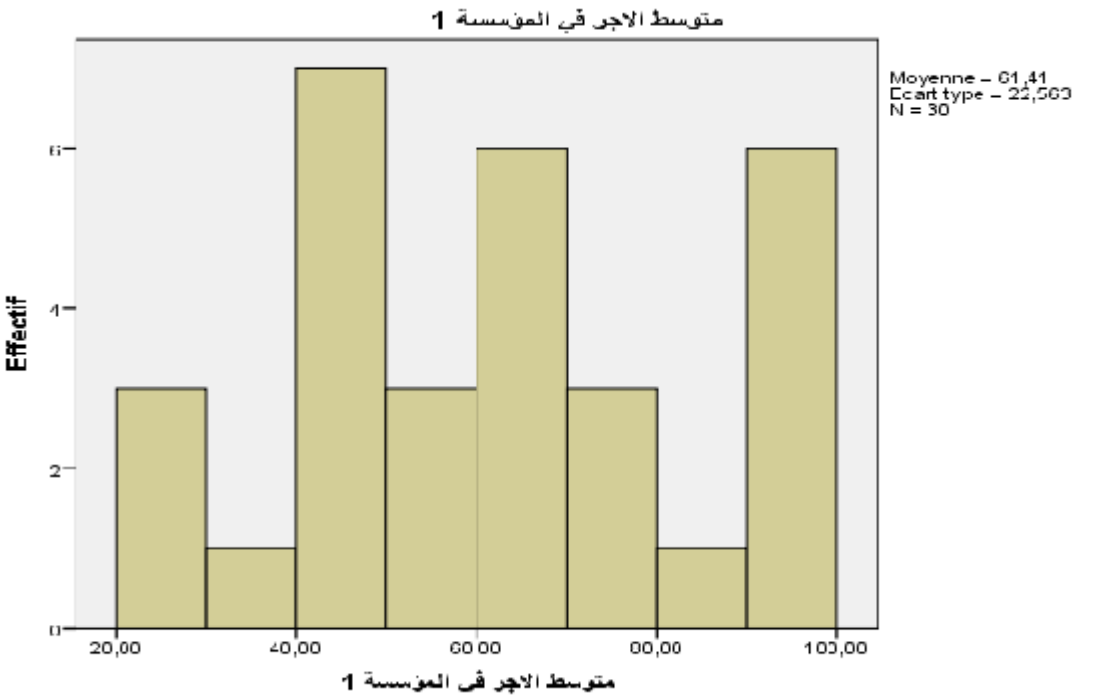
- عدد مفردات العينة (30) وعدد القيم الناقصة (0).
- المتوسط الحسابي للعينة لكل متغير: 61 ون كمتوسط للأجر في المؤسستين.
- القيمة الوسطى او وسيط اجر موظفي المؤسسة 1 (61,62 ون) ووسيط اجر موظفي المؤسسة 2 (65 ون).
- المنوال او الأجر الاكثر تكرارا بالنسبة لموظفي المؤسسة 1 (98 ون) والأجر الاكثر تكرارا بالنسبة لموظفي المؤسسة 2 (66 ون).
- الانحراف المعياري للقيم عن المتوسط الحسابي للمتغيرين: 22,56 و 11,62.
- تباين المجتمع او مربع الانحراف المعياري للقيم عن المتوسط الحسابي للمتغيرين: 509,07 و 135,02.
- معامل الالتواء للمتغيرين: معامل الالتواء لمتوسط اجر موظفي المؤسسة 1 يساوي 0,27 أي ان التواء هذا المتغير موجب بينما معامل الالتواء لمتوسط اجر موظفي المؤسسة 2 يساوي 1,115- أي ان التواء هذا المتغير سالب وكلاهما ضمن القيم المعيارية المعتمدة اي اقل من I3I، مما يعني انه يمكننا اعتبار ان توزيع المتغيرين توزيع قريب من التوزيع الطبيعي.
- الخطأ المعياري لمعامل الالتواء للمتغيرين يساوي 0,427.

- معامل التفرطح للمتغيرين: معامل التفرطح لكلا المتغيرين هو سالب (0,9) مما يدل على انهما اكثر تفرطحا من التوزيع الطبيعي وكلاهما ضمن القيم المعيارية المعتمدة اي اقل من I8I، مما يعني انه يمكننا اعتبار ان توزيع المتغيرين توزيع قريب من التوزيع الطبيعي.
- الخطأ المعياري لمعامل التفرطح للمتغيرين يساوي 0,833.
- المدى أي الفرق بين اقل واكبر قيمة مشاهدة في العينة للمتغيرين: 71,75 و 47,50.
- اقل واكبر قيمة مشاهدة في العينة للمتغيرين: 26ون/ون98 و 29ون/77ون.
- مجموع متوسط الاجور لكلتا المؤسستين: 1842,25 و 1842,50.

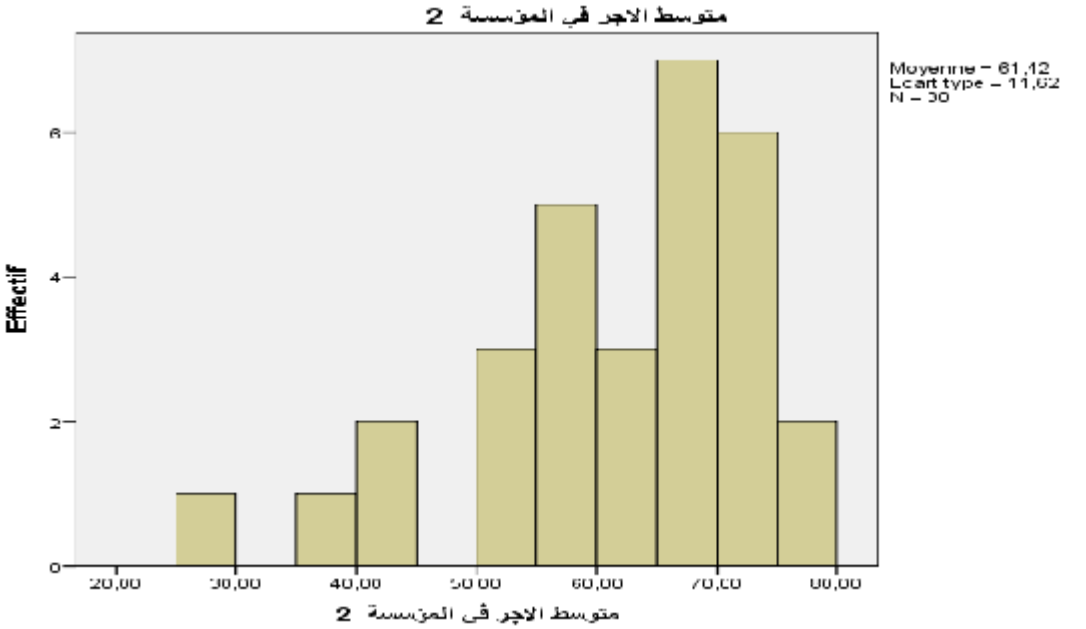
ثالثا– التمثيل البياني للمتغيرات: تظهر مخرجات تنفيذ الامر:

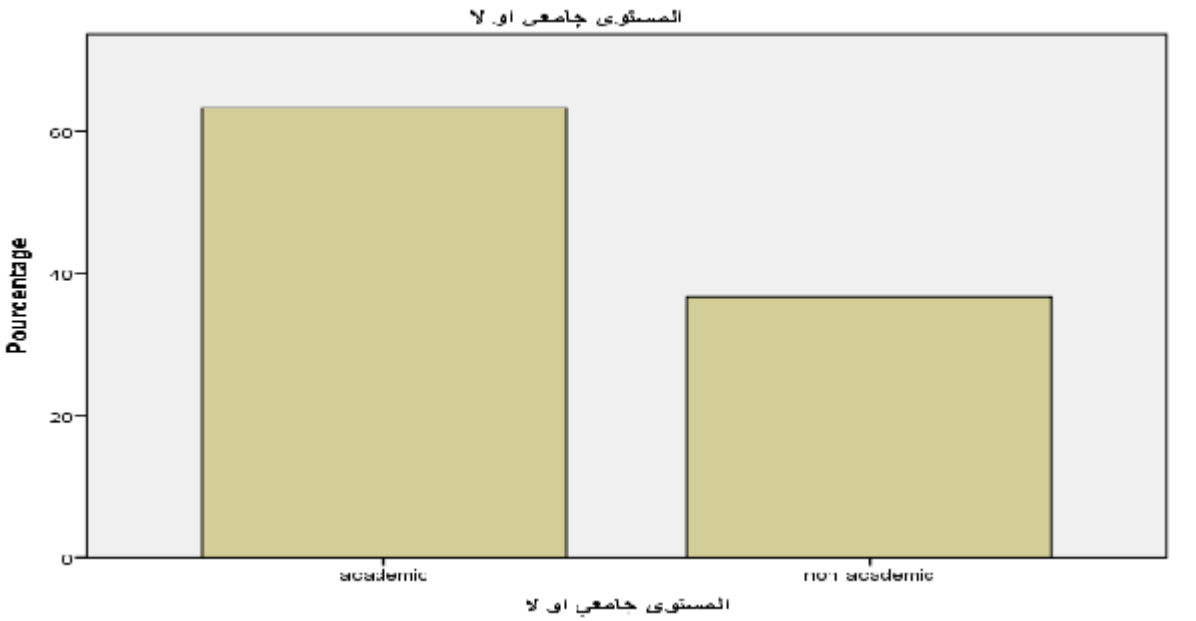
Statistiques descriptives/Effectifs/Diagrammes على المتغيرات "المستوى" و "اجر المؤسسة1" و "اجر المؤسسة 2"، بالشكل التالي:

Histogramme



Histogramme

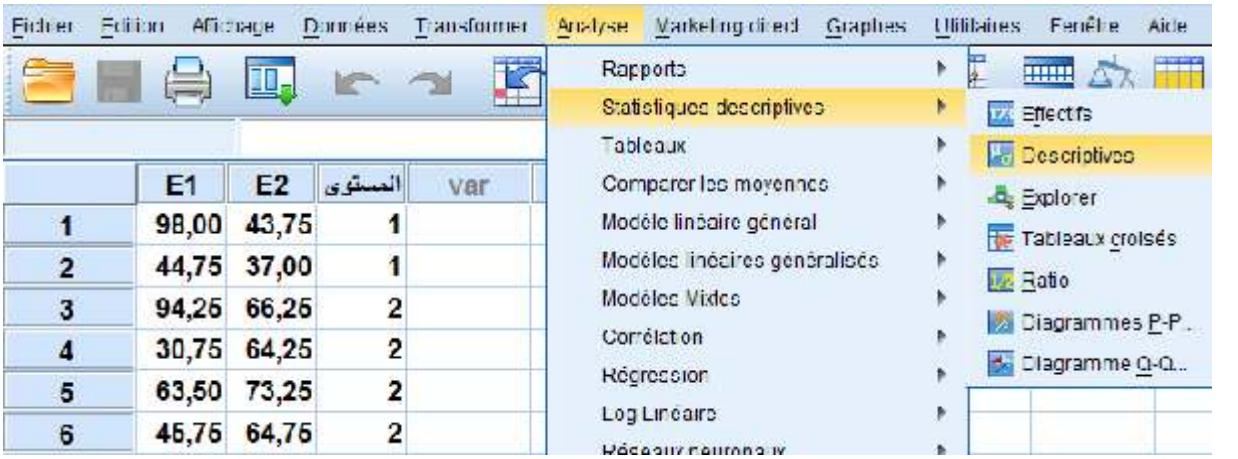




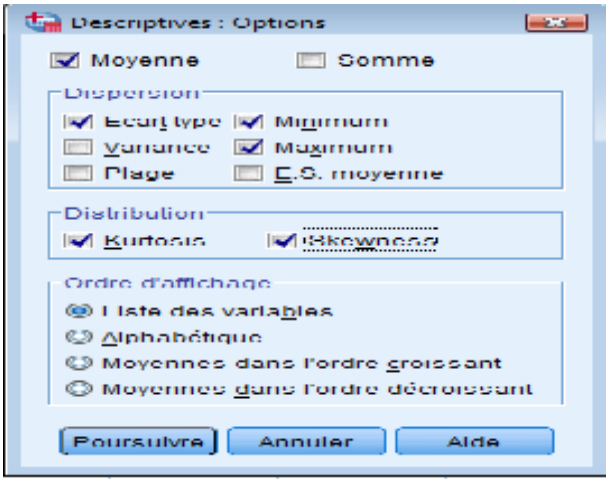
تظهر الاشكال (1) و (2) المدرج التكراري لمتغيري "الاجر في المؤسسة 1" و"الاجر في المؤسسة 2" حيث نلاحظ انه تم توزيع المعطيات ضمن عدة فئات بصفة اوتوماتيكية. بينما يظهر الشكل (3) التوزيع التكراري المئوي لفئات متغير "المستوى" باستعمال الاعمدة البيانية.

2.6 عرض المعطيات باستخدام الامر Descriptive : يمكننا الامر Descriptive من لائحة Analyse من قائمة Statistiques descriptives من الوصف المختصر لأهم خصائص المتغيرات

الكمية وهذا من خلال حساب بعض مقاييس النزعة المركزية ومقاييس التشتت وشكل التوزيع، دون امكانية عرض الجدول التكراري للمعطيات ولا تمثيلها البياني.



ومربع حوار الامر Descriptive يظهر بالشكل التالي:



وتظهر النتائج كما يلي:

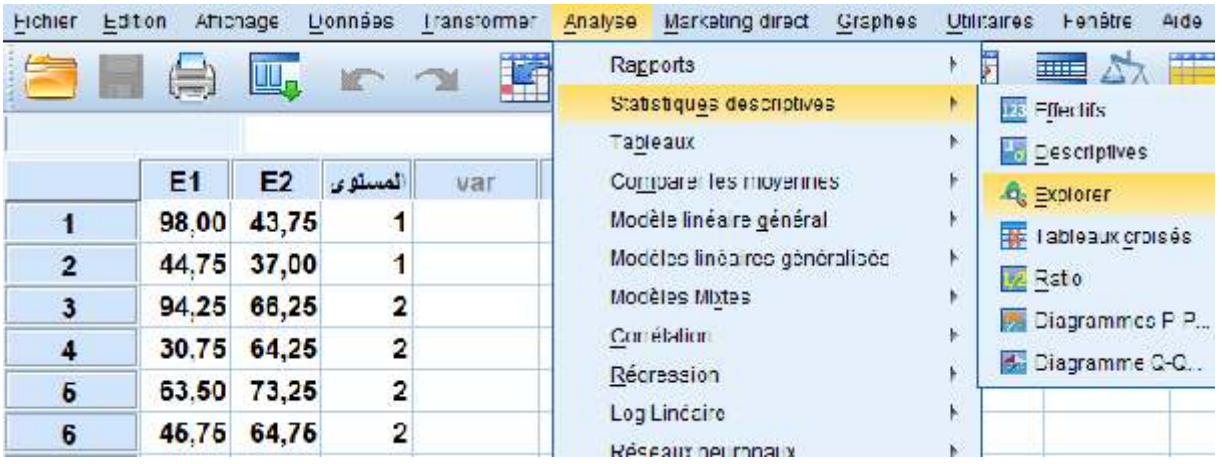
Descriptives

Statistiques descriptives

	N	Minimum	Maximum	Moyenne	Ecart type	Asymétrie		Kurtosis	
	Statistique	Statistique	Statistique	Statistique	Statistique	Statistique	Erreur std	Statistique	Erreur std
متوسط الاجر في المؤسسة1	30	26,25	98,00	61,4083	22,56251	,269	,427	-,924	,833
متوسط الاجر في المؤسسة2	30	29,25	76,75	61,4167	11,61994	-1,115	,427	,969	,833
N valide (listwise)	30								

نلاحظ ان الجدول يظهر اهم المقاييس الحسابية الوصفية والتي سبق ان تحصلنا عليها من خلال الخيار Effectifs وبالتالي تقرا كما سبق.

3.6 عرض المعطيات باستخدام الامر Explorer: يهدف الامر Explorer من لائحة Analyse من قائمة Statistiques descriptive لاستكشاف او الفحص الدقيق للمعطيات قبل تحليلها الاحصائي ومحاولة اكتشاف الاخطاء والقيم الشاذة. ويستخدم كذلك للتحقق من بعض الشروط التي تتطلبها بعض الاختبارات الاحصائية كالتوزيع الطبيعي للمتغير والتحقق من شرط تجانس التباين الضروري لإجراء تحليل الانحدار.



ويمكن استعمال هذا الاجراء كما يلي:

- تحديد المتغير او المتغيرات التابعة التي يراد اجراء تحليل احصائي لها Liste des variables dépendantes.
- تحديد المتغير المستقل الذي على اساسه تتم المقارنة في المتغير التابع Liste des facteurs.
- وصف المعطيات احصائيا مع تحديد مجال الثقة Statistiques avec intervalle de confiance.

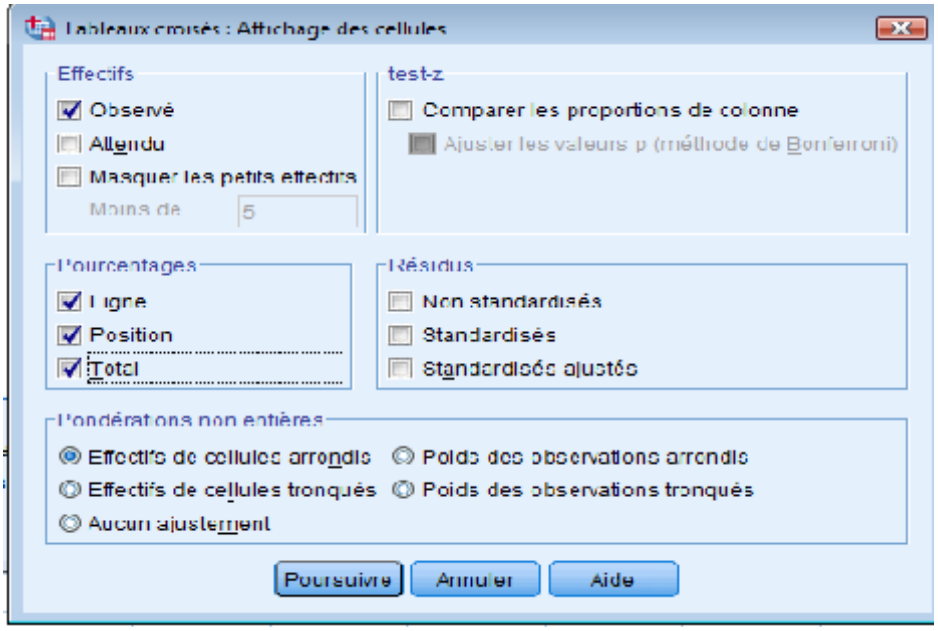
- تحديد القيم الشاذة Outliers وعرض اكبر ست درجات واقل ست درجات في المتغير والقيم المتطرفة Valeurs extrêmes في النتائج.
- الرسم البياني للمتغير لتحديد شكل التوزيع على شكل ساق وورقة Tige et feuille او مدرج Histogramme او صندوق Boite à moustaches/Boxplots.
- رسم التوزيع الطبيعي لمقارنته مع التوزيع الحالي مع تقديم اختبارات التوزيع للعينات التي تقل عن 50 مشاهدة Graphes de répartition Gaussiens avec tests وذلك عن طريق اختبار Shapiro Wilks واختبار تجانس التباين عن طريق اختبار Levène.
- تحديد القيم الناقصة.
- تقدير الاس المناسب لإجراء التحويلات على المعطيات لجعل التباين اكثر تماثلا.

ومربع الحوار لمختلف الخيارات يظهر بالشكل التالي:

4.6 الجداول التقاطعية لوصف متغيرين: لإعداد جدول التوزيع التكراري المزدوج للمتغيرين "الجنس" و "المستوى" نستعمل الامر Tableaux croisés او Crosstabs. ولتنفيذ هذا الامر نتبع الخطوات التالية:

نختار من لائحة Analyse الامر Statistiques descriptives ثم ننقر على خيار Tableaux croisés فيظهر مربع الحوار الخاص ونختار وننقل المتغير الاول في الاسطر ثم المتغير الثاني في الاعمدة ثم ننقر على Afficher les diagrammes en bâtons juxtaposés لإظهار الرسم البياني للمتغيرين معا ثم ننقر على الخيار Cellules ونختار كل خيارات Pourcentages ثم ننقر علىPoursuivre ثم OK.

ومربع الحوار لمختلف خيارات الجداول التقاطعية تظهر بالشكل التالي:

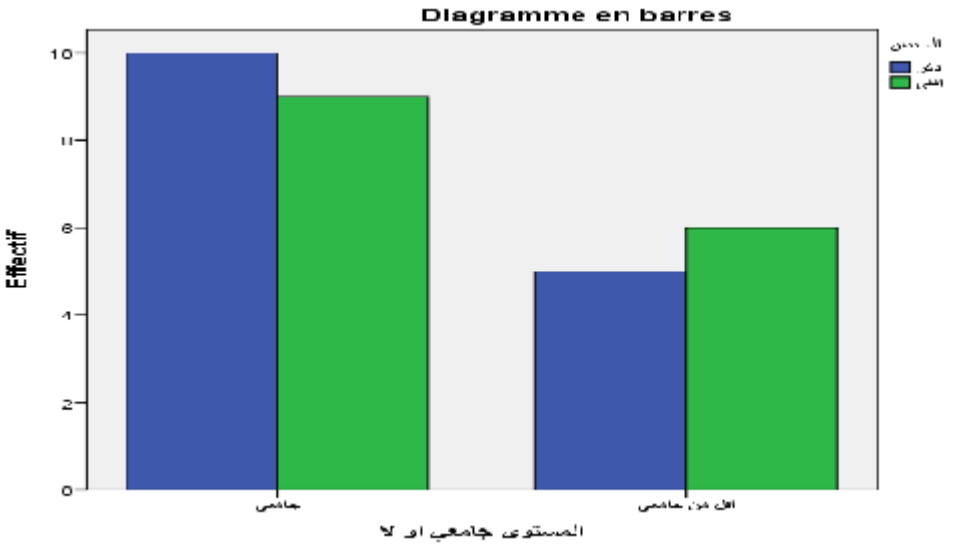


وتظهر النتائج كالتالي:

Tableaux croisés

Tableau croisé الجنس * المستوى

			الجنس		Total
			ذكر	انثى	
المستوى	جامعي	Effectif	10	9	19
		% compris dans المستوى	52,6%	47,4%	100,0%
		% compris dans الجنس	66,7%	60,0%	63,3%
		% du total	33,3%	30,0%	63,3%
	اقل من جامعي	Effectif	5	6	11
		% compris dans المستوى	45,5%	54,5%	100,0%
		% compris dans الجنس	33,3%	40,0%	36,7%
		% du total	16,7%	20,0%	36,7%
Total		Effectif	15	15	30
		% compris dans المستوى	50,0%	50,0%	100,0%
		% compris dans الجنس	100,0%	100,0%	100,0%
		% du total	50,0%	50,0%	100,0%



يمثل الجدول الاول الجدول التقاطعي بين المتغيرين الاسميين الجنس والمستوى. بحيث تم حساب التكرارات التقاطعية بين كل فئة من فئات متغير الجنس بالنسبة لكل فئة من فئات متغير المستوى بالإضافة لتوزيعها النسبي. بحيث نلاحظ ان 10 ذكور لديهم مستوى جامعي مقابل 9 اناث لديهن مستوى جامعي، بينما 5 ذكور لديهم مستوى اقل من جامعي مقابل 6 اناث لديهن مستوى اقل من جامعي. والشكل يظهر التمثيل البياني للتوزيع التكراري لفئات المتغيرين وهذا باستعمال الاعمدة البيانية لان المتغيرات قيد الدراسة هي متغيرات وصفية.

الفصل الثالث: اختبار الفرضيات

يساعد التحليل الاحصائي للمعطيات في عملية اتخاذ قرار حول صحة او عدم صحة افتراض ما يتعلق بالمجتمع الاحصائي الذي سحبت منه العينة، او توزيع هذا المجتمع او حول معلمة من معالمه كالمتوسط الحسابي او الانحراف المعياري. وذلك بناءاً على نتائج الاختبارات الاحصائية المستعملة على المعطيات. ونلجأ الى اختبار الفروض لأنه لا يمكننا في اغلب الاحيان ان ندرس المجتمع الاحصائي بالكامل عن طريق المسح الشامل له بل نحاول الاستدلال على مقاييسه او معالمه باستخدام معطيات او نتائج العينة. فمثلا يفترض باحث ان متوسط الدخل الشهري للفرد في بلد ما هو 2500 اورو بناءا على ما يراه من مستوى معيشة الافراد وأوضاعهم الاقتصادية، ويحتاج الى معرفة مدى صحة هذا الافتراض أي يحتاج الى اتخاذ قرار علمي بقبول الفرض او عدم قبوله وهذا ما سنتطرق اليه في هذا الفصل.

والهدف من اختبار الفرضيات هو: اما تحديد معالم او خصائص المجتمع الذي سحبت منه العينة، او لمقارنة معالم او خصائص عدة مجتمعات، او لتحليل العلاقة بين متغيرين او اكثر من متغيرين. ولتحقيق هذه الاهداف لابد من الاختيار بين مجموعة من الاختبارات الاحصائية للفرضيات يتم الاختيار بينها اخذاً بعين الاعتبار المعايير التالية:

- طبيعة سحب العينة: عشوائي او غير عشوائي.
- شكل توزيع المتغيرات في مجتمع الدراسة: توزيع طبيعي او غير طبيعي.
- المقاييس المستخدمة لقياس المتغيرات: اسمية، ترتيبية او كمية.
- عدد عينات الدراسة، نوعها وحجمها: عينة واحدة او عينتين او اكثر، عينات مرتبطة او مستقلة، عينات صغيرة (اقل من 30 مشاهدة) او عينات كبيرة (اكثر من 30 مشاهدة).
- هدف فروض البحث: اختبار فروق بين العينات او اختبار العلاقة بين المتغيرات.

وقبل ان نستعرض التفاصيل حول كيفية اختبار الفرضيات لابد ان نقدم اولا بعض المفاهيم والتعريفات الاساسية اللازمة لهذا الموضوع والمتعلقة بطريقة صياغة الفرضيات وأنواعها والأخطاء المتعلقة بها وكيفية اختيار الاختبار الاحصائي الملائم لاتخاذ قرار قبولها او رفضها.

1. الفروض الاحصائية

تعرف الفرضية الاحصائية على انها ادعاء او تخمين عن احدى المعالم الخاصة بالمجتمع الاحصائي الاصلي الذي اشتقت منه العينة والمطلوب هو تأكيد او نفي هذا الادعاء. واختبار الفروض الاحصائية يعتمد على صياغة نوعين من الفرضيات: الفرضية الصفرية والفرضية البديلة.

1.1 الفرضية الصفرية: الفرضية الصفرية او فرضية العدم L'hypothèse nulle هي الفرضية المراد اختبارها وتبنى على امل ان يتخذ قرار بعدم صحتها او رفضها ويرمز لها بـ H_0. وتصاغ على شكل مساواة للدلالة على عدم وجود فرق او عدم وجود علاقة او عدم وجود تغير.

بالنسبة للمثال المعطى في مقدمة الفصل تصاغ الفرضية الصفرية كمايلي: متوسط الدخل الشهري للفرد هو 2500 اورو. وتكتب الفرضية الصفرية باستخدام الرموز كمايلي: $H_0: \mu = 2500$ حيث μ تمثل متوسط المجتمع.

كما يمكن صياغة الفرضية الصفرية على شكل علاقة بين متغيرين كالعلاقة بين مستوى التأهيل العلمي والتوجه نحو المهن الحرة. و تصاغ الفرضية الصفرية في هذه الحالة: لا توجد علاقة بين التوجه نحو المهن الحرة ومستوى التأهيل العلمي.

2.1 الفرضية البديلة: تبنى لكل فرضية صفرية فرضية بديلة. والفرضية البديلة Hypothèse alternative هي ما يود الباحث ان يثبت صحته وهي عكس الفرضية الصفرية ويرمز لها بـ H_1. والفرضية البديلة هي الفرضية التي ستقبل في حال رفض الفرضية الصفرية.

للفرضية البديلة اهمية كبيرة لأنها هي التي تحدد نوع الاختبار المستخدم لاتخاذ القرار وهذا حسب الشكل الذي ستأخذه. وهناك ثلاثة اشكال لصياغة الفرضية البديلة نوجزها في الجدول التالي:

H_0	H_1	مثال
$H_0: \mu = \mu_0$	$H_0: \mu \neq \mu_0$	$H_0: \mu \neq 2500$
	$H_0: \mu > \mu_0$	$H_0: \mu > 2500$
	$H_0: \mu < \mu_0$	$H_0: \mu < 2500$

حيث ان μ معطاة على سبيل المثال وμ_0 تمثل القيمة المفترضة كمتوسط للمجتمع.

- عندما تكتب الفرضية البديلة على شكل "عدم مساواة" فاننا نستخدم في اتخاذ القرار ما يعرف باختبار الاتجاهين لانها لا تحدد اتجاه الاختبار وبالتالي نجري الاختبار في الاتجاه الاكبر من μ_0 وفي الاتجاه الاصغر من μ_0.

- عندما تكتب الفرضية البديلة على شكل "اكبر من" فاننا نستخدم في اتخاذ القرار ما يعرف باختبار الاتجاه الايمن لانها تحدد اتجاه الاختبار نحو القيم الاكبر من μ_0.

- عندما تكتب الفرضية البديلة على شكل "اصغر من" فاننا نستخدم في اتخاذ القرار ما يعرف باختبار الاتجاه الايسر لانها تحدد اتجاه الاختبار نحو القيم الاصغر من μ_0.

3.1 الاخطاء في اتخاذ القرار: كل قرار يبنى على معطيات العينة يكون معرضا للخطأ لان هذه القرارات تبنى على متغير عشوائي كالمتوسط. وبالتالي اختبار الفرضية الصفرية قد ينتج عنه قرار قبولها وهي في الواقع صحيحة او قرار رفضها وهي في الواقع خاطئة. وقبول الفرضية لا يعني انها بالضرورة صحيحة بالنسبة لكل المجتمع الاحصائي لان هذا القرار ناتج عن عدم وجود ادلة كافية من معطيات العينة لرفضها والعكس صحيح. هذه الوضعية تؤدي الى ايجاد نوعين من الأخطاء في اتخاذ القرار: الخطأ من النوع الاول والخطأ من النوع الثاني كما هو موضح في الجدول التالي:

الجدول 8 : انواع الأخطاء في اتخاذ القرار

الفرضية الصفرية		الحالة الواقعية في المجتمع	
		H_0 صحيحة	H_0 خاطئة
نتيجة الاختبار الاحصائي	رفض H_0 وقبول H_1	**خطأ من النوع الاول α**	قرار صحيح **1-β**
	قبول H_0 ورفض H_1	قرار صحيح **1-α**	**خطأ من النوع الثانيβ**

- هذا يعني اننا نرتكب خطأ من النوع الاول اذا قررنا رفض الفرضية الصفرية وهي في الواقع صحيحة أي ان الخطأ من النوع الاول هو **رفض فرضية صحيحة**. واحتمال الوقوع في الخطأ من النوع الاول يساوي **α** هذا يعني ان درجة الثقة في اتخاذ قرار صائب بقبول الفرضية الصفرية وهي في الواقع صحيحة هو **1-α.**

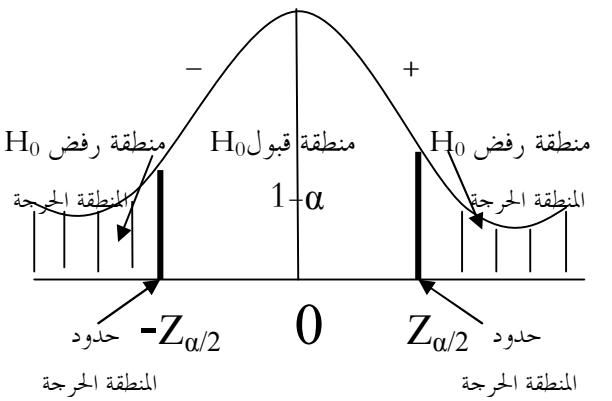
- ونرتكب خطأ من النوع الثاني اذا قررنا قبول الفرضية الصفرية وهي في الواقع خاطئة أي ان الخطأ من النوع الثاني هو **قبول فرضية خاطئة**. واحتمال الوقوع في الخطأ من النوع الثاني يساوي **β** هذا يعني ان درجة الثقة في اتخاذ قرار صائب برفض الفرضية الصفرية وهي في الواقع خاطئة هو **1-β.**

والخطأ من النوع الاول يمكن التحكم فيه ويحدده الباحث قبل الاختبار ويطلق على احتمال وقوعه اسم "مستوى المعنوية" وغالبا يحدد بـ 0,05.

4.1 نوع الاختبار: هناك نوعان من الاختبار: اما اختبار الفروض في اتجاهين او اختبار الفروض في اتجاه واحد. ويتحدد نوع الاختبار المستخدم بناءا على صياغة الفرضية البديلة والتي بدورها تحدد موقع منطقة رفض الفرضية الصفرية على منحنى احصائية الاختبار (المنطقة الحرجة).

اولا– الاختبار في اتجاهين: الفكرة الاساسية في اختبار الفروض هي تقسيم منحنى الاختبار الى منطقتين: احداهما تسمى منطقة قبول الفرضية الصفرية وتمثل درجة الثقة **1-α** والأخرى تسمى منطقة رفض الفرضية الصفرية او المنطقة الحرجة وتمثل مستوى المعنوية **α**.

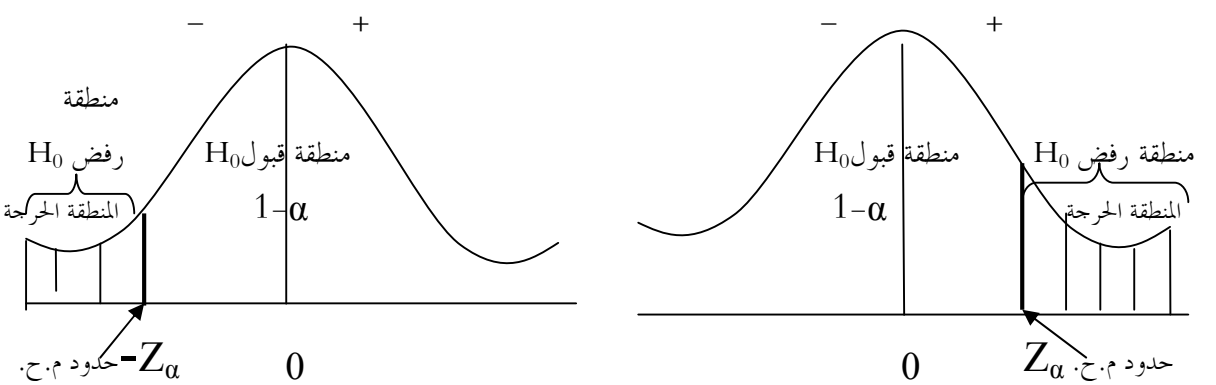
عندما تكتب الفرضية البديلة على شكل "عدم مساواة ≠" لا يتم تحديد الاتجاه الذي ستختبر فيه الفرضية وبالتالي يتم اختبارها في اتجاهين. في هذه الحالة منطقة رفض الفرضية الصفرية تكون موزعة على طرفي المنحنى بالتساوي كما هو موضح في الشكل التالي:



الشكل5: منطقة رفض H_0 في الاختبار في اتجاهين

تمثل المنطقة البيضاء في المنحنى منطقة قبول الفرضية الصفرية وتساوي $1-\alpha$ (95% في حالة α=5%). اما المناطق المخططة فتمثل منطقة الرفض وهي مقسمة بالتساوي على طرفي المنحنى وتساوي $\alpha/2$ لكل طرف (2,5% في حالة α=5%).

ثانيا– الاختبار في اتجاه واحد: عندما تكتب الفرضية البديلة على شكل "اكبر من > او اصغر من <" يتم تحديد الاتجاه الذي ستختبر فيه الفرضية وبالتالي يتم اختبارها في اتجاه واحد. في هذه الحالة منطقة رفض الفرضية الصفرية تكون مركزة على طرف واحد للمنحنى: في الطرف الايمن اذا كتبت الفرضية البديلة على شكل "اكبر من" او في الطرف الايسر اذا كتبت الفرضية البديلة على شكل "اصغر من" كما يوضحه الشكل التالي:



منطقة رفض H_0 في الاختبار في الاتجاه الايسر **منطقة رفض H_0 في الاختبار في الاتجاه الايمن**

الشكل6: منطقة رفض H_0 في الاختبار في الاتجاه الواحد

تمثل المنطقة البيضاء في المنحنيين منطقة قبول الفرضية الصفرية وتساوي $1-\alpha$ (95% في حالة α=5%). اما المنطقة المخططة فتمثل منطقة الرفض وتساوي α لكل طرف (5% في حالة α=5%).

2. الاختبارات الاحصائية

هناك العديد من الاختبارات الاحصائية للفرضيات يتم الاختيار بينها اخذاً بعين الاعتبار المعايير التالية:

- طبيعة سحب العينة: عشوائي او غير عشوائي.
- شكل توزيع المتغيرات في مجتمع الدراسة: توزيع طبيعي او غير طبيعي.
- المقاييس المستخدمة لقياس المتغيرات: اسمية، ترتيبية او كمية.
- عدد عينات الدراسة، نوعها وحجمها: عينة واحدة او عينتين او اكثر، عينات مرتبطة او مستقلة، عينات صغيرة (اقل من 30 مشاهدة) او عينات كبيرة (اكثر من 30 مشاهدة).
- هدف فروض البحث: اختبار فروق بين العينات او اختبار العلاقة بين المتغيرات.

1.2 تصنيف الاختبارات الاحصائية: تصنف الاختبارات الاحصائية ضمن اسلوبين احصائيين اما كاختبارات معلمية او كاختبارات غير معلمية:

- ❖ الاختبارات المعلمية: تسمح باختبار فروض تهدف لتقدير معالم المجتمع المجهولة انطلاقا من احصاءات العينة كالمتوسط الحسابي والنسبة والتباين وتعتمد صلاحية هذه الاختبارات على الاستيفاء بشروط معينة حول مجتمع البحث اهمها: التوزيع الطبيعي وتجانس التباين والاختيار العشوائي للعينة والقياسات العددية الدقيقة لظاهرة الدراسة.
- ❖ الاختبارات اللامعلمية: تستعمل عندما لا تتوافر شروط تطبيق الاختبارات المعلمية فهي لا تفرض شروط على توزيع المجتمع ولا تحتاج لقياسات دقيقة.

ويمكن تلخيص خصائص كل اسلوب في الجدول التالي:

الجدول 9: خصائص الاساليب الاحصائية

الاساليب الاحصائية المعلمية	الاساليب الاحصائية اللامعلمية
تستعمل في العينات الكبيرة	تستعمل مهما كان حجم العينة
تشترط التوزيع الطبيعي للمجتمع	لا تفرض قيود على التوزيع
تناسب المعطيات الكمية	تناسب كل المعطيات وبالأخص المعطيات النوعية
تشترط تساوي او تجانس تباين مجتمعات سحب العينة	لا تفرض قيود على التباين
اكثر قوة في رفض H_0 عند توفر الشروط	اقل قوة في رفض H_0 وتزداد قوة الاختبار بكبر العينة

2.2 خطوات الاختبار الاحصائي: يتم اتخاذ قرار رفض او قبول الفرضية الصفرية بناءا على نتائج الاختبار الاحصائي ومكان وقوعه على منحنى الاختبار (اما في منطقة القبول او منطقة الرفض). ولإجراء الاختبار الاحصائي نتبع الخطوات التالية:

1- صياغة الفرضية الصفرية التي نريد اختبارها والفرضية البديلة لها والتي تأخذ احد الاشكال السابقة حسب تصور الباحث وانطلاقا من المعلومات المتوفرة لديه.

2- حساب قيمة الاختبار انطلاقا من معطيات العينة وهذا بعد اختيار الاحصائية المناسبة لذلك.

3- تحديد حدود منطقتي قبول ورفض الفرضية الصفرية وذلك بناءا على الجداول الاحصائية وأخذا بعين الاعتبار:

- توزيع المعاينة لإحصائية الاختبار(Z,t,X^2 ...) ؛
- صياغة الفرضية البديلة؛
- مستوى معنوية الاختبار (α).

4- اتخاذ القرار بناءا على مقارنة القيمة المحسوبة لإحصائية الاختبار بالقيمة الجدولية لنفس الاختبار والتي تسمح بتحديد حدود منطقتي الرفض والقبول للفرضية الصفرية(ضمن المنطقة الحرجة او خارجها): فاذا وقعت قيمة احصائية الاختبار في منطقة قبول H_0 نقبل الفرضية الصفرية، واذا وقعت قيمة احصائية الاختبار في منطقة رفض H_0 نرفض الفرضية الصفرية ونقبل الفرضية البديلة H_1.

3. الاختبارات المعلمية

يعتبر كل من الوسيط والمتوسط من أهم مقاييس النزعة المركزية والتي تستعمل لتقدير معالم الموضع لمجتمع الدراسة، وذلك لان قيم المتغير تميل للتمركز حول هذه المقاييس باعتبارها نقط تمركز. في الاختبارات المعلمية ينصب الاهتمام على المتوسط كمقياس موضع في الاستدلال على معالم المجتمع، وذلك لأن المتوسط الذي يحسب من العينة ويستخدم للاستدلال على متوسط المجتمع يتمتع بخصائص نظرية هامة، إضافة إلى أن المعطيات في حالة الاختبارات المعلمية لابد ان تكون مقاسه على الأقل بمقياس فترة. وتعتمد اغلب الاختبارات الاحصائية المعلمية على احصائيات الاختبار التي تتبع توزيع ستودنت t والتوزيع الطبيعي المعياري Z. والجدول التالي يوضح اهم هذه الاختبارات.

الجدول 10: اهم الاختبارات الاحصائية المعلمية

الاختبارات المعلمية	عينة واحدة		- اختبار t للعينة الواحدة - اختبار Z
	عينتين او اكثر	عينتين مستقلتين	- اختبار t للعينات المستقلة - اختبار Z - تحليل التباين الاحادي
		عينتين مرتبطتين	- اختبار t للعينات المرتبطة

المصدر: Malhotra Naresh K. (No year). "**Marketing research, an applied orientation**". Sixth Edition, Global edition. Ed. Pearson, Prentice Hall, New Jersey. U.S.A. P 503.

وفيما يلي نستعرض خطوات اختبار الفرضيات الاكثر استخداما وشيوعا في اغلب الدراسات والمتمثلة في اختبار الفرضيات المتعلقة بالوسط الحسابي وتباين المجتمع واختبار الفرضيات المتعلقة بالفرق بين متوسطي وتبايني مجتمعين.

1.3 اختبار الفرضيات المتعلقة بالوسط الحسابي للمجتمع

اولا- حالة العينات الصغيرة: في حالة العينات الصغيرة ($n<30$) عندما يكون المجتمع طبيعيا وتباينه غير معروف فإن إحصائية الاختبار للفرضية $H:\mu= \mu_0$ هي T والتي تخضع لتوزيع t بدرجة حرية $(n-1)$[2] ومستوى معنوية α وتأخذ الشكل التالي :

$$T= \frac{\bar{X}-\mu 0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

واتخاذ القرار حول الفرضية الصفرية باستعمال الاحصائية **T** يكون كمايلي:

1- في حالة الفرضية البديلة $H_1:\mu\neq \mu_0$ نرفض الفرضية الصفرية اذا كانت $T_{cal.} > T_{\alpha/2}$ او $T_{cal.} < -T_{\alpha/2}$

2- في حالة الفرضية البديلة $H_1:\mu> \mu_0$ نرفض الفرضية الصفرية اذا كانت $T_{cal.} > T_{\alpha}$

3- في حالة الفرضية البديلة $H_1:\mu< \mu_0$ نرفض الفرضية الصفرية اذا كانت $T_{cal.} < -T_{\alpha}$

[2] درجات الحرية تساوى حجم العينة مطروحا منه عدد المعالم المراد تقديرها.

مثال 7: اظهرت سجلات احدى المدارس الخاصة ان معدل تحصيل طلبتها في امتحان اللغة الانجليزية الذين يتقدمون له عند طلب اللالتحاق بالجامعات الاجنبية هو 410. بدأت المدرسة بإعطاء دروس تقوية للطلبة. بافتراض ان نتائج الطلبة تتبع التوزيع الطبيعي، اختبر فرضية ان هذا المعدل قد تحسن اذا اعطت نتائج 14 طالبا وسطا حسابيا $\overline{X} = 418$ وانحرافا معياريا S=21 عند مستوى معنوية 0.01.

الحل:

– الفرضية الصفرية والفرضية البديلة لهذا الاختبار تصاغ كمايلي: $H:\mu= 410$ مقابل $H:\mu> 10$.

– بما ان العينة صغيرة وتباين المجتمع مجهول، نستعمل الاحصائية T للاختبار بدرجة حرية 13. وحدود المنطقة الحرجة بما ان الاختبار من الطرف الايمن هي $T_{0.01}=2.65$.

– نحسب قيمة T بالتعويض في معادلة الاحصائية كمايلي:

$$\mathbf{T}= \frac{\bar{X}-\mu 0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{418-410}{\frac{21}{\sqrt{14}}} = 1.42$$

– نقارن بين قيم $T_{0.01}$و $T_{cal.}$ بحيث نرفض الفرضية الصفرية اذا كانت $\mathbf{T}_{cal.} > \mathbf{T}_{\alpha}$. بالمقارنة نجد ان: $T_{cal.}=1.42 < T_{\alpha}=2.65$ اذن لا نرفض H_0 أي ان دروس التقوية لم تحسن من معدل تحصيل الطلبة في امتحان اللغة الانجليزية المتعلق بالالتحاق بالجامعات الاجنبية.

ثانيا– حالة العينات الكبيرة: اذا اخذت عينة عشوائية حجمها n من مجتمع احصائي يخضع للتوزيع الطبيعي تباينه σ^2 ومتوسطه μ اي $N(\mu,\sigma^2)$. وكانت σ^2 معلومة، او أن العينة كبيرة بدرجة كافية $(n>30)$ فإن إحصائية الاختبار للفرضية $H_0:\mu= \mu_0$ هي Z التي تتبع التوزيع الطبيعي المعياري $N(0,1)$ وتأخذ الشكل التالي :

$$\mathbf{Z}= \frac{\bar{X}-\mu 0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

حيث $\bar{X}$ هو الوسط الحسابي للعينة و μ_0 هي القيمة المفترضة لمتوسط المجتمع. ويتم اجراء الاختبار لإيجاد القيمة الحرجة Z_{α} او $Z_{\alpha/2}$ في منحنى الاختبار.

لاحظ أن الاحصائية Z تستعمل في حالة تباين المجتمع معلوم او في حالة العينات الكبيرة حتى لو كان تباين وتوزيع المجتمع مجهول. فالعينة الكبيرة تضمن تقارب التوزيع من التوزيع الطبيعي كما تسمح باستخدام الانحراف المعياري للعينة S بدلا من الانحراف المعياري للمجتمع σ.

1)- حساب القيم الحرجة للاختبار: عند مستوى معنوية α قيمة Z الجدولية تعطي حدود منطقة الرفض أي القيمة الحرجة للاختبار وسوف تحسب من جدول التوزيع الطبيعي المعياري كالتالي:

- عندما يكون الاختبار من طرفين: النقطتان الحرجتان على المنحنى هما $Z_{\alpha/2}$ و $-Z_{\alpha/2}$
- عندما يكون الاختبار من الطرف الايمن: النقطة الحرجة على المنحنى هي Z_{α}
- عندما يكون الاختبار من الطرف الايسر: النقطة الحرجة على المنحنى هي $-Z_{\alpha}$

ملاحظة: عند مستوى معنوية ($\alpha = 0.05$) قيمة Z الجدولية سوف تكون كالتالي:

- عندما يكون الاختبار من طرفين: $Z_{\alpha/2}=Z_{0.025}= 1.96$ و $-Z_{\alpha/2}=-Z_{0.025}= -1.96$
- عندما يكون الاختبار من طرف واحد: $Z_{\alpha}=Z_{0.05}= 1.65$

2)- اتخاذ القرار: اتخاذ القرار حول الفرضية الصفرية $H_0:\mu=\mu_0$ باستعمال الاحصائية Z يكون كمايلي: (انظر الاشكال 3 و 4)

1- في حالة الفرضية البديلة $H_1:\mu\neq\mu_0$ نرفض الفرضية الصفرية اذا كانت قيمة Z المحسوبة اكبر من قيمة $Z_{\alpha/2}$ او اصغر من قيمة $-Z_{\alpha/2}$ أي: $Z_{cal.}> Z_{\alpha/2}$ او $Z_{cal.}< -Z_{\alpha/2}$

2- في حالة الفرضية البديلة $H_1:\mu>\mu_0$ نرفض الفرضية الصفرية اذا كانت $Z_{cal.}> Z_{\alpha}$

3- في حالة الفرضية البديلة $H_1:\mu<\mu_0$ نرفض الفرضية الصفرية اذا كانت $Z_{cal.}< -Z_{\alpha}$

مثال 8: عينة حجمها 42 اعطت وسطا حسابيا $\overline{X} = 11.5$ وانحرافا معياريا S=3.3. اختبر الفرضية الصفرية $H_0:\mu= 10$ مقابل الفرضية البديلة $H_1:\mu\neq 10$ عند مستوى معنوية 0.05.

الحل:

- عندما تكون الفرضية الصفرية حول اختبار متوسط المجتمع والفرضية البديلة من طرفين بالشكل التالي: $H_0:\mu= 10$ مقابل $H_1:\mu\neq 10$ وبما ان العينة كبيرة نستعمل الاحصائية Z للاختبار وحدود المناطق الحرجة هي $Z_{\alpha/2}=Z_{0.025}= 1.96$ و $-Z_{\alpha/2}=-Z_{0.025}= -1.96$

- نحسب قيمة Z بالتعويض في معادلة الاحصائية كمايلي:

$$\mathbf{Z}=\frac{\bar{X}-\mu 0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}=\frac{11.5-10}{\frac{3.3}{\sqrt{42}}}=2.94$$

- نقارن بين قيم Z الجدولية و $Z_{cal.}$ بحيث نرفض الفرضية الصفرية اذا كانت قيمة Z المحسوبة اكبر من قيمة $Z_{\alpha/2}$ او اصغر من قيمة $-Z_{\alpha/2}$ بالمقارنة نجد: $Z_{cal.}=2.94 > Z_{\alpha/2}=1.96$ اذن نرفض H_0 ونقبل ان متوسط المجتمع يختلف عن 10 وهو بالتحديد اكبر من 10 لان و Z_{cal} وقعت في المنطقة الحرجة اليمنى لمنحنى الاختبار.

2.3 اختبار الفرضيات المتعلقة بالفرق بين وسطي مجتمعين مستقلين: العينات المستقلة هي العينات التي لا يوجد ارتباط بين معطياتها كعينة الذكور وعينة الاناث او نعم ولا او اعزب ومتزوج او الورشة الاولى والورشة الثانية في مصنع ما...الخ. او هي العينات المسحوبة عشوائيا من مجتمعين مختلفين. وبالتالي وسط العينة الاولى يختلف عن وسط العينة الثانية. مثال ذلك عندما نريد مقارنة متوسطات نقاط طلبة كلية الاقتصاد في جامعتين مختلفتين او في قسمين مختلفين.

اولا– جالة العينات الصغيرة: اذا كانت العينات صغيرة ($n_2<30$ و $n_1<30$) مسحوبة من مجتمعات طبيعية مستقلة عن بعضها البعض وتباين هذه المجتمعات غير معلوم وكان $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ ، فإن إحصائية الاختبار للفرضية H_0: $\mu_1 = \mu_2$ هي T والتي تخضع لتوزيع t بدرجة حرية (n_1+n_2-2)[3] ومستوى معنوية α وتأخذ الشكل التالي :

$$\mathbf{T}=\frac{(\bar{X}-\bar{Y})}{S_P\sqrt{\frac{1}{n1}+\frac{1}{n2}}}$$

$$S_P^2=\frac{(n1-1)S_1^2+(n2-1)S_2^2}{(n1+n2-2)}$$

حيث: $\bar{X}, \bar{Y}$ S_1^2, S_2^2 هما الوسط الحسابي و التباين للعينتين على التوالي و $S_P=\sqrt{S_P^2}$.

خطوات اختبار الفرضية H_0: $\mu_1 = \mu_2$ في هذه الحالة هي نفسها خطوات اختبار الفرضيات المتعلقة بالوسط الحسابي للمجتمع في حالة العينات صغيرة لكن باستعمال الاحصائية الجديدة T لاختبار الفرق بين متوسطي مجتمعين مستقلين.

[3] درجات الحرية تساوى حجم العينة مطروحا منه عدد المعالم المراد تقديرها.

مثال 9: اخذت عينة عشوائية حجمها 9 من اوزان اطفال ذكور حديثي الولادة في احد المستشفيات فأعطت $\bar{X}$ -3.2 و$S_1 = 1.3$ (بالكغ) وأخذت عينة عشوائية ثانية ومستقلة عن الاولى حجمها 15 من اوزان الاناث حديثات الولادة في نفس المستشفى فأعطت $\bar{Y}$-2.8 و $S_2 = 1.3$ (بالكغ)

على فرض ان كلا من اوزان الذكور والاناث يخضع لتوزيع طبيعي ذي التباين نفسه، اختبر الفرضية:

H_0: $\mu_1 = \mu_2$ مقابل H_1:$\mu_1 > \mu_2$ على مستوى معنوية $\alpha = 0.05$ حيث μ_1 معدل اوزان الذكور و μ_2 معدل اوزان الاناث.

الحل: بما ان العينات صغيرة والتباينات مجهولة احصائية الاختبار هي T التي تتبع التوزيع t بدرجة حرية 22 ومستوى معنوية 0,05.

- قيمة T الجدولية سوف تكون كالتالي: $T_{\alpha} = t_{0.05} = [0.95; 22]$ 1.717

- نحسب قيمة T بالتعويض في معادلة الاحصائية كمايلي:

$$\mathbf{T} = \frac{(\bar{X}-\bar{Y})}{S_P\sqrt{\frac{1}{n1}+\frac{1}{n2}}} = \frac{3.2-2.8}{1.24\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{15}}} = 0.745$$

$$S_P^2 = \frac{(n1-1)S_1^2+(n2-1)S_2^2}{(n1+n2-2)} = \frac{8*1.3^2+14*1.2^2}{22} = 1.53 \; ; \quad S_P = \sqrt{1.53} = 1.24$$

- في حالة الفرضية البديلة H_1:$\mu_1 > \mu_2$ نرفض الفرضية الصفرية اذا كانت $T_{cal.} > T_{\alpha}$ بالمقارنة نجد $T_{cal.} < 1.717$ اذن لا نرفض الفرضية الصفرية أي ان معدل اوزان الذكور حديثي الولادة لا يختلف عن معدل اوزان الاناث حديثات الولادة.

ثانيا– حالة العينات الكبيرة: اذا اخذت عينة عشوائية حجمها n_1 من مجتمع احصائي يخضع للتوزيع الطبيعي تباينه σ_1^2 ومتوسطه μ_1 وأخذت عينة عشوائية ثانية ومستقلة عن الاولى حجمها n_2 من مجتمع يخضع للتوزيع الطبيعي تباينه σ_2^2 ومتوسطه μ_2. وكانت σ_1^2, σ_2^2 معلومتين، فإن إحصائية الاختبار للفرضية H_0:$\mu_1=\mu_2$ هي Z وتتبع التوزيع الطبيعي المعياري $N(0,1)$ وتأخذ الشكل التالي:

$$\mathbf{Z} = \frac{(\bar{X}-\bar{Y})}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n1}+\frac{\sigma_2^2}{n2}}}$$

حيث $\bar{X}$ و $\bar{Y}$ هما الوسط الحسابي للعينتين على التوالي.

خطوات اختبار الفرضية $H_0: \mu_1 = \mu_2$ في هذه الحالة هي نفسها خطوات اختبار الفرضيات المتعلقة بالوسط الحسابي للمجتمع في حالة العينات الكبيرة لكن باستعمال الاحصائية الجديدة Z لاختبار الفرق بين متوسطي مجتمعين مستقلين.

لاحظ انه اذا لم تكن التباينات معلومة فإننا نستطيع استعمال تباينات العينات S_1^2, S_2^2 في حساب الاحصائية Z بدلا من σ_1^2, σ_2^2 شريطة ان يكون $n_1>30$ و$n_2>30$.

اما اذا اردنا اختبار الفرضية الصفرية $H_0 : \mu_1-\mu_2=d$ حيث d عدد ثابت بدلا من الفرضية الصفرية $\mu_1 = \mu_2$ $H_0:\mu_1$ اي $\mu_1-\mu_2=0$ فان احصاء الاختبار يصبح:

$$Z= \frac{(\bar{X}-\bar{Y})-d}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n1}+\frac{\sigma_2^2}{n2}}}$$

مثال 10: اخذت عينة عشوائية حجمها 32 من المجتمع $N(\mu_1,110)$ فأعطت $\bar{X}$ =83 وأخذت عينة عشوائية ثانية ومستقلة عن الاولى حجمها 37 من المجتمع $N(\mu_2,81)$ فأعطت $\bar{Y}$ =69.

المطلوب: 1- اختبر $H_0: \mu_1 = \mu_2$ مقابل $H_1:\mu_1> \mu_2$ على مستوى معنوية $\alpha = 0.05$

2- اختبر الفرضية:$H_0 : \mu_1-\mu_2=d$ مقابل $H_1 : \mu_1-\mu_2>10$ على مستوى معنوية $\alpha = 0.05$

الحل:

1- عندما تكون $H_0: \mu_1 = \mu_2$ مقابل $H_1:\mu_1> \mu_2$ ومستوى المعنوية $(\alpha = 0.05)$ قيمة Z الجدولية سوف تكون كالتالي: $Z_\alpha=Z_{0.05}= 1.65$

- نحسب قيمة Z بالتعويض في معادلة الاحصائية كمايلي:

$$Z= \frac{(\bar{X}-\bar{Y})}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n1}+\frac{\sigma_2^2}{n2}}} = \frac{(83-69)}{\sqrt{\frac{110}{32}+\frac{81}{37}}} = 5.91$$

- نقارن بين قيمة Z الجدولية و$Z_{cal.}$ بحيث نرفض الفرضية الصفرية اذا كانت $Z_{cal.} > Z_\alpha$ بالمقارنة نجد $Z_{cal.}=5.91 > Z\alpha =1.65$ اذن نرفض H_0 ونقبل ان $\mu_1> \mu_2$.

2- عندما تكون $H_0 : \mu_1-\mu_2=d$ مقابل $H_1 : \mu_1-\mu_2>10$ ومستوى المعنوية $(\alpha = 0.05)$ قيمة Z الجدولية تبقى نفسها: $Z_\alpha=Z_{0.05}= 1.65$

- نحسب قيمة Z بالتعويض في معادلة الاحصائية كمايلي:

$$\mathbf{Z}=\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-d}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n1}+\frac{\sigma_2^2}{n2}}}=\frac{(83-69)-10}{\sqrt{\frac{110}{32}+\frac{81}{37}}}=1.69$$

- نقارن بين قيمة Z الجدولية و$Z_{cal.}$ بحيث نرفض الفرضية الصفرية اذا كانت $Z_{cal.} > Z_{\alpha}$ بالمقارنة نجد $Z_{cal.}=1.69 > Z\alpha = 1.65$ اذن نرفض H_0 أي انه يوجد دلالة على ان الفرق بين الوسيطين يزيد عن 10.

3.3 اختبار الفرضيات المتعلقة بالفرق بين وسطي مجتمعين مرتبطين: العينات المرتبطة او غير المستقلة هي العينات التي تتكون من معطيات لنفس المفردات أي لدينا عينة واحدة ولكل مفردات العينة قرائتين او مشاهدتين، المشاهدة الاولى تمثل العينة الاولى و المشاهدة الثانية تمثل العينة الثانية أي هناك علاقة او ارتباط بين ازواج المشاهدات للعينتين. مثال ذلك عندما نريد مقارنة متوسطات نقاط الطلبة في مادتي الاحصاء والرياضيات او مقارنة النتائج قبل التجربة وبعد التجربة او قبل الدواء وبعد الدواء.

في هذه الحالة بافتراض ان Xi تمثل مشاهدات العينة الاولى المسحوبة من مجتمع متوسطه μ_x و Yi تمثل مشاهدات العينة الثانية والمسحوبة من مجتمع متوسطه μ_y ونريد المقارنة بين μ_x وμ_y، نقوم باستخراج الفرق D_i بين ازواج المشاهدات $D_i=X_i-Y_i$ بحيث تمثل الفروق $D_1, D_2,\dots,D_n$ عينة عشوائية من مجتمع طبيعي متوسطه $\delta=\mu_x - \mu_y$ وتباينه σ_d^2. ثم نقوم بإيجاد المتوسط الحسابي لهذا الفرق $\bar{D}$ والانحراف المعياري له S_d. نظرا لان التباين يكون مجهول وكذلك صغر حجم العينتين فان احصائية الاختبار للفرضية الصفرية $H_0: \delta=\delta_0$ هي T يخضع لتوزيع t ذي درجات الحرية $(n-1)$ ومستوى معنوية 0,05. وتكتب بالشكل:

$$\mathbf{T}=\frac{(\bar{D}-\delta 0)}{S_D/\sqrt{n}}$$

$$S_D^2=\frac{\Sigma(Di-\bar{D})^2}{(n-1)}, \qquad \bar{D}=\frac{\Sigma Di}{n}, \qquad \mu_x - \mu_{y=}\ \delta_0$$

خطوات اختبار الفرضية $H_0:\delta=\delta_0$ في هذه الحالة هي نفسها خطوات اختبار الفرضيات المتعلقة بالوسط الحسابي للمجتمع في حالة العينات صغيرة لكن باستعمال الاحصائية الجديدة T لاختبار الفرق بين متوسطي مجتمعين مرتبطين.

مثال 11: يعطي الجدول التالي قياس ضغط الدم لخمس فتيات قبل اخذ الدواء (Xi) وبعد تناول الدواء (Yi).

هل تظهر هذه المعطيات ان الدواء خفض قياس ضغط الدم عند مستوى معنوية 0,05.

Xi	Yi	D_i	$Di-\bar{D}$	$(Di-\bar{D})^2$
172	168	4	0	0
180	174	6	-2	4
172	173	-1	-5	25
176	178	-2	-6	36
170	157	13	9	81
		20		**146**

الحل:

-اولا نحدد الفرضية الصفرية و الفرضية البديلة لهذا الاختبار:

الفرضية الصفرية المطلوب اختبارها هي عدم وجود فرق في قياس ضغط الدم بين العينتين أي:

$$H_0 : \delta=\mu_x-\mu_y=0$$

مقابل الفرضية البديلة ان قياس ضغط الدم للعينة الاولى اكبر من قياس ضغط الدم للعينة الثانية أي:

$$H_1:\delta=\mu_x-\mu_y >0$$

- ثانيا نحسب قيمة $\mathbf{T}_{\alpha}$ من جدول توزيع t **بدرجة** الحرية $n-1=4$ عند مستوى معنوية $\alpha =0.05$. من الجدول نجد ان: $\mathbf{T}_{0.05} = 2.132$

- ثالثا نحسب قيمة T بالتعويض في معادلة الاحصائية كمايلي:

$$\bar{D} = \frac{\sum Di}{n} = \frac{20}{5} = 4 \ , \quad S_D^2 = \frac{\sum(Di-\bar{D})^2}{(n-1)} = \frac{146}{4} = 36.5 \ , \quad S_D = \sqrt{S_D^2} = 6.04$$

$$\mathbf{T} = \frac{(\bar{D}-\delta 0)}{S_D/\sqrt{n}} = \frac{4}{6.04/\sqrt{5}} = 1.48$$

- رابعا نتخذ القرار وهذا بمقارنة قيمة $\mathbf{T}_{\alpha}$ الجدولية مع $\mathbf{T}$ المحسوبة بحيث نرفض H_0 اذا كانت:

$\mathbf{T}_{cal.} > \mathbf{T}_{\alpha}$. بالمقارنة نجد: $\mathbf{T}_{cal.} = 1.48 < \mathbf{T}_{0.05} = 2.132$

وبالتالي نقبل H_0 اي لا يوجد فرق في قياس ضغط الدم بين العينتين.

4.3 اختبار الفرضيات المتعلقة بالتباين: اذا اخذت عينة عشوائية حجمها n من مجتمع طبيعي تباينه σ^2 ومتوسطه μ اي $N(\mu,\sigma^2)$. فإن إحصائية الاختبار للفرضية وكان $H_0:\sigma^2=\sigma_0^2$ هي χ^2 التي تتبع توزيع كاي تربيع بدرجات حرية $(n-1)$ وتأخذ الشكل التالي :

$$\chi^2 = \frac{(n-1)\,S^2}{\sigma_0^2}$$

حيث S^2 هو تباين العينة و σ_0^2 هي القيمة المفترضة لتباين المجتمع. ويتم اتخاذ القرار بعد إيجاد القيم الحرجة χ^2_{α} او $\chi^2_{1-\alpha}$ او $\chi^2_{\alpha/2}$ و $\chi^2_{1-\alpha/2}$ على منحنى الاختبار.

اولا– حساب القيم الحرجة للاختبار: عند مستوى معنوية α قيمة χ^2 الجدولية بدرجات حرية $(n-1)$ تعطي حدود منطقة الرفض أي القيمة الحرجة للاختبار وسوف تحسب من جدول توزيع كاي تربيع كالتالي:

– عندما يكون الاختبار من طرفين: النقطتان الحرجتان على المنحنى هما $\chi^2_{\alpha/2}$ و $\chi^2_{1-\alpha/2}$ وتحسب من الجدول عند القيم: $\chi^2_{\alpha/2} = \chi^2[1 - \alpha/2; n-1]$ او $\chi^2_{1-\alpha/2} = \chi^2[\alpha/2; n-1]$

– عندما يكون الاختبار من الطرف الايمن: النقطة الحرجة على المنحنى هي χ^2_{α} وتحسب من الجدول عند القيمة: $\chi^2_{\alpha} = \chi^2[1 - \alpha; n-1]$

– عندما يكون الاختبار من الطرف الايسر: النقطة الحرجة على المنحنى هي $\chi^2_{1-\alpha}$ وتحسب من الجدول عند القيمة: $\chi^2_{1-\alpha} = \chi^2[\alpha; n-1]$

ثانيا– اتخاذ القرار: اتخاذ القرار حول الفرضية الصفرية $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ باستعمال الاحصائية χ^2 يكون كمايلي:

1– في حالة الفرضية البديلة $H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ نرفض H_0 اذا كانت قيمة χ^2 المحسوبة اكبر من قيمة $\chi^2_{\alpha/2}$ او اصغر من قيمة $\chi^2_{1-\alpha/2}$ أي: $\chi^2_{cal.} > \chi^2_{\alpha/2}$ او $\chi^2_{cal.} < \chi^2_{1-\alpha/2}$

2– في حالة الفرضية البديلة $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$ نرفض H_0 اذا كانت قيمة χ^2 المحسوبة اكبر من قيمة χ^2_{α} أي: $\chi^2_{cal.} > \chi^2_{\alpha}$

3– في حالة الفرضية البديلة $H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$ نرفض H_0 اذا كانت قيمة χ^2 المحسوبة اصغر من قيمة $\chi^2_{1-\alpha}$ أي: $\chi^2_{cal.} < \chi^2_{1-\alpha}$

مثال 12: لدينا عينة عشوائية حجمها 12 من مجتمع طبيعي $N(\mu,\sigma^2)$ وسطها الحسابي $\bar{\bar{X}} = \mathbf{60}$ وتباينها $S^2 = 40$. اختبر الفرضية $H_{0t}: \sigma^2 = 35$ مقابل الفرضية $H_1: \sigma^2 > 35$ عند $\alpha = 0{,}05$.

الحل:

- اولا نحدد قيمة النقطة الحرجة أي حدود منطقة الرفض: بما ان الاختبار في الاتجاه الايمن فالنقطة الحرجة على المنحنى هي χ^2_α وتحسب من الجدول عند القيمة: $\chi^2_{0.05} = \chi^2[0{,}95; 11] = 19.6751$

- ثانيا نحسب قيمة χ^2 من احصائية الاختبار:

$$\chi^2 = \frac{11*40}{35} = 12.57$$

- ثالثا نتخذ القرار بمقارنة قيمة χ^2_α الجدولية مع χ^2 المحسوبة بحيث: نرفض H_0 اذا كانت قيمة χ^2 المحسوبة اكبر من قيمة χ^2_α . بالمقارنة نجد: $\chi^2_{cal.} = 12.57 < \chi^2_\alpha = 19.6751$ وبالتالي لا يوجد دلالة على رفض ان $\sigma^2 = 35$.

5.3 اختبار الفرضيات المتعلقة بالفرق بين تباينين مجتمعين: اذا اخذت عينة عشوائية حجمها n_1 من مجتمع احصائي يخضع للتوزيع الطبيعي تباينه σ_1^2 ومتوسطه μ_1 وأخذت عينة عشوائية ثانية ومستقلة عن الاولى حجمها n_2 من مجتمع يخضع للتوزيع الطبيعي تباينه σ_2^2 ومتوسطه μ_2 وكان S_2^2, S_1^2 تباين العينتين على التوالي. فإن إحصائية الاختبار للفرضية H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ هي النسبة بين التباينين والتي تخضع لتوزيع F ذي درجات الحرية (n_2-1) في البسط و (n_1-1) في المقام. وتأخذ الشكل التالي:

$$\frac{S_2^2}{S_1^2}$$

واتخاذ القرار حول الفرضية الصفرية باستعمال النسبة بين التباينين يكون كمايلي:

1- في حالة الفرضية البديلة $H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ نرفض H_0 اذا كانت S_2^2/S_1^2 خارج المجال:

$$\left(F\left[\frac{\alpha}{2}; (n_2-1); (n_1-1)\right], F\left[1-\frac{\alpha}{2}; (n_2-1); (n_1-1)\right]\right)$$

2- في حالة الفرضية البديلة $H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$ نرفض H_0 اذا كانت:

$$S_2^2/S_1^2 > F[1-\alpha; (n_2-1); (n_1-1)]$$

3- في حالة الفرضية البديلة $H_1: \sigma_1^2 < \sigma_2^2$ نرفض H_0 اذا كانت:

$$S_2^2/S_1^2 < F[\alpha; (n_2-1); (n_1-1)]$$

مثال 13: لدينا المعلومات التالية حول عينتين سحبتا من مجتمعين طبيعيين كمايلي:

	العينة 1	العينة 2
الحجم	$n_1=8$	$n_2=9$
الوسط الحسابي	$\bar{X}=17.4$	$\bar{Y}=13.2$
التباين S^2	16	22

المطلوب: اختبر الفرضية $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ مقابل الفرضية $H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$ عند $\alpha=0.05$.

الحل: في حالة الفرضية البديلة $H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$ نرفض H_0 اذا كانت:

$$S_2^2/S_1^2 > F[1-\alpha; (n2-1); (n1-1)]$$

نعوض فنتحصل على: $S_2^2/S_1^2 = \frac{22}{16} = 1.375$ و $F[0.95; 8; 7] = 3.73$

بالمقارنة نجد: $S_2^2/S_1^2 < 1.375$ اذن نقبل H_0 أي لا توجد دلالة ان σ_1^2 اكبر من σ_2^2.

4. الاختبارات اللا معلمية

في الاختبارات اللامعلمية ينصب الاهتمام على الوسيط كمقياس للاستدلال على معالم المجتمع. ويرجع ذلك لكون الوسيط موجود دائما لأي توزيع، إضافة إلى أن الوسيط يمكن تطبيقه على المعطيات النوعية المقاسه بالمقياس الترتيبي. وفيما يلي سنستعرض خطوات اختبار الفرضيات اللا معلمية الاكثر استخداما وشيوعا في اغلب الدراسات والمتمثلة في اختبار الفرضيات حول وسيط مجتمع واحد واختبار الفرضيات المتعلقة بمقارنة وسيطي مجتمعين او عدة مجتمعات. والجدول التالي يوضح اهم هذه الاختبارات.

الجدول 11: اهم الاختبارات الاحصائية اللامعلمية

الاختبارات اللامعلمية	عينة واحدة		- التكرارات - كاي تربيع - اختبار K-S - اختبار Runs - اختبار ذي الحدين Binomial
	عينتين او اكثر	عينتين مستقلتين	- كاي تربيع - اختبار Mann-Whitney - اختبار الوسيط - اختبار K-S - اختبار Wallis-Kruskal Anova
		عينتين مرتبطتين	- اختبار الاشارة Signe - اختبار Wilcoxon - اختبار Mc Nemar - كاي تربيع

المصدر: Malhotra Naresh K. (No year). "**Marketing research, an applied orientation**". Sixth Edition, Global edition. Ed. Pearson, Prentice Hall, New Jersey. U.S.A. P503.

والاختبارات التي سنتطرق لها هي اختبار الإشارة للعينة الواحدة وللعينتين المرتبطتين واختبار ويلكوكسن للرتب لعينتين مرتبطتين واختبار مان-ويتني للعينات المستقلة. ويعتبر اختبار الإشارة واختبار ويلكوكسن الاختبار البديل لاختبار t وهذا عندما لا يتحقق شرط التوزيع الطبيعي او لكون العينة صغيرة جدا او لكون المعطيات مقاسه بالمقياس الترتيبي، أو لأن مقياس النزعة المركزية المناسب هو الوسيط.

1.4 اختبار الاشارة او ذو الحدين لاختبار الفرضيات حول وسيط مجتمع واحد: يستخدم اختبار الإشارة للاستدلال على وسيط المجتمع عندما يكون توزيع المجتمع غير متماثل، ويشكل هذا الاختبار بديلا لا معلميا لاختبار t للمتوسط. والمعطيات التي يطبق عليها اختبار الإشارة يجب أن تكون مقاسه بالمقياس الترتيبي كحد أدنى،كما يجب ان يكون توزيع المجتمع توزيعا متصلا.

اذا كان وسيط المجتمع هو M وإذا كانت لدينا عينة عشوائية $X_1,X_2,\ldots,X_n$، ونريد اختبار فرضيات حول M وكانت الفرضية الصفرية $H_0:M=M_0$ ، حيث M_0 عدد معطى. وعرفنا:

S= عدد المشاهدات التي يكون فيها X_i-M_0 موجبا.

فانه ومهما كان توزيع المجتمع فان توزيع S هو توزيع ذي الحدين بمعلمة $p=1/2$ أي $S : B (n,1/2)$.

وبما أن الوسيط حسب تعريفه هو القيمة التي في الوسط فإننا نتوقع إذا رتبت القيم تصاعديا وإذا كانت H_o صحيحة، فاحتمال ان تكون اي قيمة في العينة أكبر من M_0 مساويا لاحتمال أن تكون أصغر من M_0 بمعنى:[4]

$$P(X_i-M_0>0)= P(X_i-M_0<0)=1/2$$

أي: $$P(+)= P(-)=1/2$$

بافتراض صحة H_o يكون لدينا n مشاهده مستقلة كل مشاهده تأخذ إما النتيجة (+) أو (−) باحتمال $p=1/2$.

في حالة $X_i=M_0$ فان n في جدول توزيع ذي الحدين هي عدد المشاهدات بعد حذف الحالات التي تتساوى فيها X_i و M_0.

اولا– حالة العينات الصغيرة (n<20): إذا رمزنا لعدد الإشارات الموجبة في العينة بـ S_+ فإننا نعلم أن S_+ تتبع توزيع ذو الحدين بمعالم n و$p=0.5$. وهكذا تتوفر لدينا إحصائية هي S_+ توزيعها معروف في حالة صحة H_o مما يمكننا من اختبار صحة هذه الفرضية. وبما أن القيمة المتوقعه لـ S_+ في حالة صحة H_o هي: $E(S_+)=n\times0.5=0.5\ n$ فإننا نتخذ القرار حول الفرضية الصفرية $H_0:M= M_0$ كمايلي:

1– في حالة الفرضية البديلة $H_1:M\neq M_0$: نرفض H_o إذا كان $p^* \leq \frac{\alpha}{2}$ او $P\leq\alpha$

حيث: $P=2\ p^*$ ، و p^* هو احتمال الحصول –من جدول ذو الحدين عند $P=0.5$ و n– على قيمة تساوي أو تزيد عن S_+ او تساوي أو تقل عن S_+ تساوي أو تقل عن $\alpha/2$.

وبما أن الاختبار من اتجاهين فإن P هي احتمال الحصول على قيمة تساوي أو تزيد عن S_+ أو تساوي أو تقل عن $n–S_+$. ونتيجة لتماثل توزيع ذو الحدين فإن احتمال قيمة تساوي أو تقل عن قيمة معينة لـ S مثلا S_1، يساوي احتمال قيمة تساوي أو تزيد عن $n–S_1$.

2– في حالة الفرضية البديلة $H_1:M>M_0$: نرفض H_o إذا كان $p^*\geq\alpha$ وقيمة p^* في هذه الحالة هي قيمة P. حيث نستعمل S_+ في هذه الحالة كإحصائية اختبار ونحدد من جدول ذو الحدين عند $P=0.5$ و n و $S= S_+$ قيمة p^* – احتمال الحصول على قيمة تساوي أو تزيد عن S_+–.

[4] قيمة P هي احتمال الحصول على قيمة تساوي أو تكون أكثر تطرفاً من القيمة المشاهدة للإحصائية. وفي حالة الاختبار ذو طرف واحد فإن قيمة P هي احتمال الحصول على قيمة تساوي أو تزيد عن قيمة الإحصائية المشاهدة إذا كنا نستخدم الطرف الأيمن ، وهي احتمال الحصول على قيمة تساوي أو تقل عن قيمة الإحصائية إذا استخدمنا الطرف الأيسر. وفي كلتا الحالتين نقارن P بمستوى المعنوية α ونرفض Ho إذا كانت تساوي أو تقل عن α.

3- في حالة الفرضية البديلة $H_1: M<M_0$: نرفض H_o إذا كان $p^* \geq \alpha$ وقيمة p^* في هذه الحالة هي قيمة P. حيث نستعمل S_+ في هذه الحالة كإحصائية اختبار ونحدد من جدول ذو الحدين عند $P=0.5$ و n و $S= S_+$ قيمة p^* – احتمال الحصول على قيمة تساوي أو تقل عن S_+-.

مثال 14: في مصنع صممت ماكينة لتعبئة الشاي في أكياس من من حجم 2 جرام. بعد فترة أخذت عينة عشوائية من 15 كيس، وكانت أوزانها كما يلي:

1.98, 1.98, 2.10, 1.99, 1.97, 1.98, 2.00, 2.12, 2.09, 1.99, 1.98,1.99, 2.03, 1.96, 1.95

نريد اختبار اذا ما كان وسيط الوزن لم يتغير عن 2 جرام عند مستوى معنوية $\alpha=0.05$.

الحل:

- فرضيات الاختبار هي: $H_o: M=2$ مقابل $H_1: M\neq2$

- نحدد عدد الاشارات الموجبة $S+$ بحساب الفرق بين كل قيمة والوسيط 2 كما هو موضح في الجدول التالي:

X	X-2	الإشارة	X	X-2	الإشارة
1.98	-0.02	-	2.09	0.09	+
1.98	-0.02	-	1.99	-0.01	-
2.10	0.10	+	1.98	-0.02	-
1.99	-0.01	-	1.99	-0.01	-
1.97	-0.03	-	2.03	0.03	+
1.98	-0.02	-	1.96	-0.04	-
2.00	0.00				
2.12	0.12	+	1.95	-0.05	-

من الجدول نجد $S_+=4$. وبما أن هناك حالة تساوي واحدة $Xi=M0$ او ربطة واحدة عند $X=2$ فإننا نحذف هذه القيمة ويصبح حجم العينة $n=14$. ومن جدول توزيع ذو الحدين لما $S_+=4$ و$n=14$ نجد أن احتمال الحصول على قيمة تساوي أو تقل عن 4 هو $p^*=0.0898$. وبما أن $p^*>\alpha/2$ و $S+<7$ فإننا نقبل H_o. كذلك الاختبار في اتجاهين فان قيمة P تساوي $p^*x2= 2(0.0898)=0.1796$. وبمقارنة P مع مستوى معنوية $\alpha=0.05$ فإننا نقبل H_o أي ان الوسيط لوزن اكياس الشاي يساوي 2.

ثانيا– حالة العينات الكبيرة (n>20): في حالة العينات الكبيرة يمكن تقريب توزيع ذو الحدين بمعالم $p=0.5$ و n $B(n,1/2)$: S للتوزيع الطبيعي الذي وسطه الحسابي $0.5n$ وانحرافه المعياري $0.5\sqrt{n}$.

إحصائية الاختبار في هذه الحالة هي:

$$\frac{S-\frac{n}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{n}}$$

والتي تتبع التوزيع الطبيعي المعياري $N(0,1)$ اذا كانت H_0 صحيحة. علما ان: S= عدد المشاهدات التي يكون فيها X_i-M_0 موجبا.

واتخاذ القرار حول الفرضية الصفرية $H_0:M=M_0$ يكون كمايلي:

1- في حالة الفرضية البديلة $H_1:M\neq M_0$ نرفض الفرضية الصفرية اذا كانت:

$$\frac{S-\frac{n}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{n}} \geq Z_{\alpha/2} \quad \text{او} \quad \frac{S-\frac{n}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{n}} \leq -Z_{\alpha/2}$$

أي:

$$S \leq \frac{n}{2} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sqrt{n}}{2} \quad \text{او} \quad S \geq \frac{n}{2} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sqrt{n}}{2}$$

2- في حالة الفرضية البديلة $H_1:M>M_0$ نرفض الفرضية الصفرية اذا كانت $S \geq \frac{n}{2} + Z_{\alpha}\frac{\sqrt{n}}{2}$

3- في حالة الفرضية البديلة $H_1:M<M_0$ نرفض الفرضية الصفرية اذا كانت $S \leq \frac{n}{2} - Z_{\alpha}\frac{\sqrt{n}}{2}$

مثال 15: اختيرت عينة من 75 طالب يدرسون مادة الاحصاء 3، وتم سؤالهم عن عدد الساعات التي يخصصونها اسبوعيا لدراسة هذا المقياس، وتوزعت اجاباتهم كمايلي:

اقل من 3 ساعات: 49 طالب، 3 ساعات: 10 طلاب، اكثر من 3 ساعات: 16 طالب.

المطلوب: اختبر الفرضية القائلة بان وسيط ساعات دراسة هذا المقياس اقل من ثلاثة ساعات عند مستوى دلالة α=0.05.

الحل:

- الفرضية البديلة لهذا المثال هي: $H_1:M<3$ في هذه الحالة نرفض الفرضية الصفرية اذا كانت $S \leq \frac{n}{2} - Z_{\alpha}\frac{\sqrt{n}}{2}$

_ S= عدد المشاهدات التي يكون فيها $X_i-M_0>0$ أي $Xi>3$ أي S=16

- وبما ان احصاءة الاختبار في حالة العينات الكبيرة تتبع التوزيع الطبيعي المعياري $N(0,1)$ نجد من جدول التوزيع الطبيعي المعياري ان: $Z_\alpha=Z_{0.05}=1.65$

- بما ان $X_i=M_0=10$ فان $n=65$ أي ان n هو عدد المشاهدات بعد حذف الحالات التي تتساوى فيها X_i و M_0. نعوض الان ونحسب القدار $\frac{n}{2}-Z_\alpha\frac{\sqrt{n}}{2}$ نجد:

$$\frac{n}{2}-Z_\alpha\frac{\sqrt{n}}{2}=\frac{65}{2}-1.65\frac{\sqrt{65}}{2}=26$$

- **وبما ان** $S\leq 26$ فاننا نرفض الفرضية الصفرية أي ان وسيط ساعات دراسة هذا المقياس اقل من ثلاثة ساعات.

2.4اختبار ويلكوكسن لإشارة الرتب لاختبار الفرضيات حول وسيط مجتمع واحد: عندما تكون معطيات العينة مقاسة بمقياس فوق الترتيبي (فترة أو نسبة) فإننا نطبق اختبار ويلكوكسن لإشارة الرتب. لان استخدام اختبار الإشارة على هذا النوع من المعطيات يؤدي لعدم الاستفادة من مقدار الاختلاف بين القيم وإنما فقط موقع كل منها بالنسبة للوسيط. فاختبار ويلكوكسن للرتب يسمح باستخدام كل من اشارات القيم (بالنسبة للوسيط) ومقاديرها في نفس الوقت.

ولاختبار الفرضية الصفرية بأن وسيط المجتمع يساوي M_0 سنفترض أن لدينا عينة عشوائية مأخوذة من مجتمع توزيعه متصل ومتماثل حول M_0 وتتكون من n مشاهدة: $X1,X2,\ldots,Xn$.

ولتطبيق اختبار ويلكوكسن نقوم باتباع الخطوات التالية:

1- نحسب الفرق D بين كل قيمة في العينة والوسيط المفترض M_0 أي نحسب:

$$D_i=X_i-M_0 \quad i=1,\ldots,n$$

بحيث تحذف الحالات التي يكون فيها $X_i=M_0$ أي يكون الفرق صفر و n هو حجم العينة بعد حذف الحالات التي يكون فيها الفرق معدوم.

2- نرتب الفروق المطلقة $|D_i|$ تصاعديا من الأصغر للأكبر. وإذا تساوت قيمتان او اكثر في الرتبة نعطي كل منها الوسط الحسابي لرتبها كما لو انها لم تكن متساوية. ونعطي كل ترتيب إشارة الفرق D الذي نتج عنه.

3- نحسب مجموع الرتب الموجبة T_+ ومجموع الرتب السالبة T_-. وبما أننا افترضنا أن التوزيع متماثل حول الوسيط، نتوقع في حالة صحة الفرضية الصفرية أن تتساوى T_+ و T_-.

4- نحدد الفرض البديل H_1 حسب توقعاتنا لاتجاه الوسيط كمايلي: إذا كانت T_+ أكبر من T_- فإن هذا يدعم اختيار $H_1: M > M_0$، وإذا كانت T_- أكبر من T_+ فإن هذا يدعم اختيار $H_1: M < M_0$، أما إذا تقاربت T_+ و T_- في القيمة فإن هذا يدعم اختيار $H_1: M \neq M_0$.

5- نحدد إحصائية الاختبار:

اولا- في حالة العينات الصغيرة ($n<20$): كل من T_+ و T_- يمكن أن تستخدم كإحصائية اختبار، وكل من T_+ و T_- عدد صحيح موجب تتراوح قيمته بين 0 و $\frac{n(n+1)}{2}$ وتوزيع المعاينة العدمى (أي التوزيع تحت H_o) لكل منهما متطابق ومتماثل بوسط حسابي $\frac{n(n+1)}{4}$.

ويعتمد اتخاذ القرار على صياغة الفرض البديل وهذا كمايلي:

- إذا كان الفرض البديل هو $H_1: M \neq M_0$: نرفض H_0 اذا كانت احصائية الاختبار المحسوبة $T+$ اكبر من او تساوي القيمة الحرجة العليا لاختبار ويلكوكسن لاشارة الرتب W_u او اقل من او تساوي القيمة الحرجة الدنيا المحسوبة من جدول توزيع ويلكوكسن W_l عندما يكون الاختبار في اتجاهين عند n و α. بمعنى: $T+ \geq W_u$ او $T+ \leq W_l$
- إذا كان الفرض البديل هو $H_1: M > M_0$: نرفض H_0 اذا كانت احصائية الاختبار المحسوبة $T+$ اكبر من او تساوي القيمة الحرجة العليا لاختبار ويلكوكسن لاشارة الرتب W_u عندما يكون الاختبار في اتجاهين عند n و α. بمعنى: $T+ \geq W_u$
- إذا كان الفرض البديل هو $H_1: M < M_0$: نرفض H_0 اذا كانت احصائية الاختبار المحسوبة T_+ اقل من او تساوي القيمة الحرجة الدنيا المحسوبة من جدول توزيع ويلكوكسن W_l لاشارة الرتب عندما يكون الاختبار في اتجاهين عند n و α. بمعنى: $T+ \leq W_l$

ملاحظة: القيمة الحرجة العليا W_u لاختبار ويلكوكسن لاشارة الرتب تحسب كمايلي:

$$W_u = \frac{n(n+1)}{2} - W_l$$

ثانيا- في حالة العينات الكبيرة ($n>20$): ذا كان حجم العينة n أكبر من 20 فإن $T+$ تتبع تقريبا التوزيع الطبيعي بوسط حسابي $\mu_{T=\frac{n(n+1)}{4}}$ وانحراف معياري $\sigma_T = \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{24}}$ وبالتالي فإنه يمكن استخدام كإحصائية اختبار الإحصائية Z التي تتبع التوزيع الطبيعي المعياري،حيث:

$$Z = \frac{T - u_T}{\sigma_T} = \frac{T - \frac{n(n+1)}{4}}{\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{24}}}$$

واتخاذ القرار حول الفرضية الصفرية $H_0: M = M_0$ يكون كمايلي:

1- في حالة الفرضية البديلة $H_1: M \neq M_0$ نرفض الفرضية الصفرية اذا كانت:

$$Z_{cal.} < -Z_{\alpha/2} \text{ او } Z_{cal.} > Z_{\alpha/2}$$

2- في حالة الفرضية البديلة $H_1: M > M_0$ نرفض الفرضية الصفرية اذا كانت: $Z_{cal.} > Z_{\alpha}$

3- في حالة الفرضية البديلة $H_1: M < M_0$ نرفض الفرضية الصفرية اذا كانت: $Z_{cal.} < -Z_{\alpha}$

مثال 16: المعطيات التالية توضح متوسط الإنتاجية اليومي في فترة معينة بمصنع ما:

19 18 17 18 19 15 17 19 19 18 18 19 17 17 18 18 19 20 21 14 16

المطلوب: اختبر عند مستوى معنوية 0.05 مستخدما اختبار ويلكوكسن للرتب الفرض بأن وسيط الإنتاجية هو 18.

الحل:

– الفرضية الصفرية للاختبار هي $H_0: M=18$ مقابل الفرضية البديلة $H_1: M \neq 18$.

- نحسب في الجدول الموالي الفرق D بين كل قيمة في العينة والوسيط المفترض $M_0 = 18$ مع تحديد الرتب واشارتها.

X_i	Di	IDiI	رتبة IDiI	الرتبة المؤشرة
16	-2	2	10	-10
14	-4	4	15	-15
21	3	3	13	+13
20	2	2	10	+10
18	0			
19	1	1	4.5	+4.5
17	-1	1	4.5	-4.5
17	-1	1	4.5	-4.5
18	0			
18	0			
19	1	1	4.5	+4.5
19	1	1	4.5	+4.5
15	-3	3	13	-13
17	-1	1	4.5	-4.5
18	0			
17	-1	1	4.5	-4.5
16	-2	2	10	-10
15	-3	3	13	-13
19	1	1	4.5	+4.5

- بعد حذف الفروق المعدومة يصبح حجم العينة n=15.

- مجموع الرتب الموجبة: $T_+ = 41$ ومجموع الرتب السالبة: $T_- = 79$

- بما أن $n<20$ والاختبار من اتجاهين فان القيمة الحرجة العليا لاختبار ويلكوكسن لاشارة الرتب هو: القيمة الحرجة الدنيا W_l المحسوبة من جدول توزيع ويلكوكسن عندما يكون الاختبار في اتجاهين عند n=15 و $\alpha=0.05$ هي 25. نعوضها في معادلة Wu نجد:

$$W_u = \frac{n(n+1)}{2} - W_l = \frac{15(15+1)}{2} - 25 = 95$$

- احصائية الاختبار المحسوبة $T_+<95$ اذن لا نرفض H_0 أي ان وسيط الإنتاجية هو 18.

3.4 اختبار الاشارة لاختبار الفرضيات حول مقارنة وسيطي مجتمعين مرتبطين: لمقارنة وسيطي مجتمعين مرتبطين نستخدم نفس الاختبار السابق أي اختبار الاشارة للعينة الواحدة، وذلك لأن الزوج المرتب (x_i , y_i) هو في الواقع مشاهدة واحدة على متغير عشوائي ثنائي.

بافتراض أن لدينا المتغيرات العشوائية الثنائية $(X_1,Y_1), (X_2,Y_2),\ldots,(X_n,Y_n)$ من عينتين مرتبطتين وأن مقياس كل زوج هو مقياس ترتيبي على الأقل، يمكن تحديد إشارة الفرق X-Y لكل زوج. فإذا كانت X تمثل مشاهدة من المجتمع الاول و Y تمثل المشاهدة المناظرة من المجتمع الثاني، ونريد اختبار الفرضية الصفرية بأن وسيط الفروقات X-Y لقيم X و Y في المجتمعين ونرمز له بـ M_d يساوي صفر. أي:

$$H_0: M_d=0$$

مقابل الفرضية البديلة: $H_1: M_d\neq 0$ او $H_1: M_d>0$ او $H_1: M_d<0$

في هذه الحالة نحسب الفروق (x_i-y_i) لكل i ثم نحدد إشارة كل زوج "+" و "-" مع حذف حالة الصفر ثم نطبق اختبار الإشارة كما في الحالة السابقة -العينة الواحدة- تماما. حيث: احصائية الاختبار S تمثل عدد المشاهدات التي يكون فيها X>Y و S تتبع توزيع ذي الحدين بمعلمة p=1/2 أي $S : B(n,1/2)$ و n هي عدد المشاهدات بعد حذف الحالات التي يتساوى فيها X و Y.

مثال 17: تم سؤال 55 زبون عن تفضيلهم لنوعين من المنتجات A و B وتوزعت اجاباتهم كمايلي:

تفضيل المنتج A: 32 زبون، تفضيل المنتج B: 19 زبون، لا فرق بين المنتجين: 4 زبائن.

المطلوب: اختبر الفرضية القائلة بأنه يوجد تفضيل من طرف الزبائن للمنتج A على المنتج B عند مستوى دلالة $\alpha=0.05$.

الحل:

– الفرضية الصفرية لهذا الاختبار هي انه لا يوجد اختلاف في تفضيل الزبائن للمنتج A على المنتج B وتصاغ: $H_0: M_d=0$ والفرضية البديلة هي: $H_1: M_d>0$ في هذه الحالة بما ان العينة كبيرة فإننا نرفض الفرضية الصفرية اذا كانت:

$$S \geq \frac{n}{2} + Z_\alpha \frac{\sqrt{n}}{2}$$

_ S تمثل عدد المشاهدات التي يكون فيها X>Y أي S=32

– وبما ان احصاءة الاختبار في حالة العينات الكبيرة تتبع التوزيع الطبيعي المعياري $N(0,1)$ نجد من جدول التوزيع الطبيعي المعياري ان: $Z_\alpha=Z_{0.05}=1.65$

– بما ان n هي عدد المشاهدات بعد حذف الحالات التي يتساوى فيها X و Y، فان n=55-4=51.

– نعوض الان ونحسب القيم الحرجة:

$$\frac{n}{2} + Z_\alpha \frac{\sqrt{n}}{2} = \frac{51}{2} + 1.65 \frac{\sqrt{51}}{2} = 31.39$$

– وبما ان $S \geq 31.39$ فاننا نرفض الفرضية الصفرية أي انه يوجد الزبائن يفضلون المنتج A على B.

4.4 اختبار ويلكوكسن لإشارة الرتب لاختبار الفرضيات حول مقارنة وسيطي مجتمعين مرتبطين: اختبار ويلكوكسن للعينات المرتبطة هو نفسه اختبار ويلكوكسن للعينة الواحدة والفرق هو أنه في حالة العينات المرتبطة تكون الفروقات هي فروقات بين قيم X و Y في الأزواج المرتبة (X,Y) بدلا عن الفروقات بين قيم متغير واحد والوسيط المفترض. فاذا كانت لدينا معطيات عددية حول n من الازواج المرتبة (X_i,Y_i) $i=1,\ldots,n$ وأردنا اختبار تساوي متوسطي المتغيرين X,Y فإننا نستعمل اختبار اشارة الرتب لويلكوكسن. وينفذ هذا الاختبار كمايلي:

– حساب الفروق $D_i=X_i-Y_i$, $i=1,\ldots,n$

_ ايجاد رتب القيم المطلقة لهذه الفروق IDiI بعد حذف الفروق المعدومة في هذه الحالة يصبح حجم العينة n هو عدد الازواج التي تختلف فروقاتها عن الصفر.

– سجل اشارة الفرق D_i المناظرة لكل من هذه الرتب.

_ حساب احصائية اختبار اشارة الرتب T_+ حيث: T_+= مجموع رتب قيم D_i الموجبة.

- الفرضية الصفرية للاختبار هي ان وسيط الفروقات X-Y يساوي صفر، أي: $H_0: M_d=0$ والفرضية البديلة المقابلة لـ H_0 تاخذ واحدة من الصيغ التالية:$H_1:M_d\neq0$ او $H_1:M_d>0$ او $H_1:M_d<0$

اولا- اذا كانت n صغيرة (n<20): يتخذ القرار بنفس الطريقة في اختبار ويلكوكسن للعينة الواحدة وهذا كمايلي:

- إذا كان الفرض البديل هو $H_1: M_d\neq0$: نرفض H_0 اذا كانت احصائية الاختبار المحسوبة $T+$ اكبر من او تساوي القيمة الحرجة العليا لاختبار ويلكوكسن لاشارة الرتب W_u او اقل من او تساوي القيمة الحرجة الدنيا المحسوبة من جدول توزيع ويلكوكسن W_l عندما يكون الاختبار في اتجاهين عند n و α. بمعنى: $T+\geq W_u$ او $T+\leq W_l$
- إذا كان الفرض البديل هو $H_1: M_d>0$: نرفض H_0 اذا كانت احصائية الاختبار المحسوبة $T+$ اكبر من او تساوي القيمة الحرجة العليا لاختبار ويلكوكسن لاشارة الرتب W_u عندما يكون الاختبار في اتجاهين عند n و α. بمعنى: $T+\geq W_u$
- إذا كان الفرض البديل هو $H_1: M_d<0$: نرفض H_0 اذا كانت احصائية الاختبار المحسوبة T_+ اقل من او تساوي القيمة الحرجة الدنيا المحسوبة من جدول توزيع ويلكوكسن W_l لاشارة الرتب عندما يكون الاختبار في اتجاهين عند n و α. بمعنى: $T+\leq W_l$

ملاحظة: القيمة الحرجة العليا W_u لاختبار ويلكوكسن لاشارة الرتب تحسب كمايلي:

$$W_u = \frac{n(n+1)}{2} - W_l$$

ثانيا- اذا كانت n كبيرة (n>20): فإننا نستخدم التوزيع الطبيعي المعياري لتحديد القيمة الجدولية على مستوى دلالة α المناظرة للاحصائية المعيارية Z التي تتبع التوزيع الطبيعي المعياري،حيث:

$$Z = \frac{T - u_T}{\sigma_T} = \frac{T - \frac{n(n+1)}{4}}{\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{24}}}$$

واتخاذ القرار حول الفرضية الصفرية H_0 يكون كمايلي:

1- في حالة الفرضية البديلة $H_1:M_d\neq0$ نرفض الفرضية الصفرية اذا كانت:

$$Z_{cal.} < -Z_{\alpha/2} \text{ او } Z_{cal.} > Z_{\alpha/2}$$

2- في حالة الفرضية البديلة $H_1:M_d>0$ نرفض الفرضية الصفرية اذا كانت: $Z_{cal.} > Z_{\alpha}$

3- في حالة الفرضية البديلة $H_1:M_d<0$ نرفض الفرضية الصفرية اذا كانت: $Z_{cal.} < -Z_{\alpha}$

مثال 18: في الجدول معطيات حول عدد الاميال التي تقطعها 12 سيارة باستخدام نوعين من الوقود A و B. والمطلوب هو معرفة اذا كان متوسط عدد اميال الوقود A اكبر من متوسط عدد اميال الوقود B عند مستوى دلالة α=0.05.

السيارة	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
الوقود A	26.4	10.3	15.8	16.5	32.5	8.3	22.1	30.1	12.9	12.6	27.3	9.4
الوقود B	24.3	9.8	16.9	17.2	30.5	7.9	22.4	28.6	13.1	11.6	25.5	8.6
Di=A–B	+2.1	+0.5	-1.1	-0.7	+2	+0.4	-0.3	+1.5	-0.2	+1	+1.8	+0.8
IDiI	2.1	0.5	1.1	0.7	2	0.4	0.3	1.5	0.2	1	1.8	0.8
رتب IDiI	12	4	8	5	11	3	2	9	1	7	10	6
الاشارة	+	+	-	-	+	+	-	+	-	+	+	+

الحل:

- الفرضية الصفرية لهذا الاختبار هي H_0: متوسط عدد اميال الوقود A اقل من او يساوي متوسط عدد اميال الوقود B، والفرضية البديلة المقابلة لها هي H_1: متوسط عدد اميال الوقود A اكبر من متوسط عدد اميال الوقود B أي $M_d>0$.

- من الجدول نجد ان قيمة احصائية الاختبار المحسوبة هي T^+= مجموع رتب قيم D_i الموجبة=62

- بما ان العينة صغيرة والاختبار في اتجاه واحد فاننا من جدول توزيع ويلكوكسن لاشارة الرتب نقارن القيمة الحرجة العليا المحسوبة عند مستوى دلالة α=0.05 و n=12 مع قيمة T_+. من جدول توزيع ويلكوكسن لاشارة الرتب نجد ان القيمة الحرجة العليا = 61 وهي اقل من T_+ اذن نرفض H_0 ونقبل H_1 أي ان متوسط عدد اميال الوقود A اكبر من متوسط عدد اميال الوقود B.

5.4 اختبار مان–ويتني لاختبار الفرضيات حول مقارنة وسيطي مجتمعين مستقلين: اذا كان لدينا مجتمعان مستقلان وتوزيع كل منهما متصل وأخذنا عينتين مستقلتين بحيث $X_1,X_2,\ldots,X_{n1}$ تمثل العينة من المجتمع الاول و $Y_1,Y_2,\ldots,Y_{n2}$ تمثل العينة من المجتمع الثاني، وبافتراض أن المعطيات كمية. فان الفرضية الصفرية لهذا الاختبار تصاغ كمايلي: H_0: وسيط المجتمع الاول يساوي وسيط المجتمع الثاني أي: $M_x=M_y$: H_0والفرضية البديلة المقابلة لـ H_0 تاخذ واحدة من الصيغ التالية:

$$H_1: M_x<M_y \text{ او } H_1:M_x>M_y \text{ او } H_1:M_x\neq M_y$$

حيث: M_x هو وسيط X و M_y هو وسيط Y.

لاختبار هذه الفرضيات نستعمل اختبار مان-ويتني U. بحيث يجب ان نقوم اولا بترتيب العينة المشتركة ومشاهداتها (n1+n2)، بحيث ترتب المشاهدات تصاعديا وتعطى الرتبة 1 لأقل مشاهدة والرتبة (n1+n2) لأعلى مشاهدة. وفي حالة تساوي مشاهدات نعطي رتبا للمشاهدات المتساوية على فرض انها غير متساوية ثم نأخذ الوسط الحسابي لهذه الرتب والنتيجة نعتبرها رتبة لكل مشاهدة. ثم نحسب مجموع رتب العينة الاولى ونرمز له T_x و نحسب مجموع رتب العينة الثانية ونرمز له T_y. وإحصائية هذا الاختبار هي U= "اقل العددين U_x و U_y" حيث:

$$U_x = n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1+1)}{2} - T_x$$

$$U_y = n_1 n_2 + \frac{n_2(n_2+1)}{2} - T_y$$

بحيث: $n_1, n_2 = 1,2,\ldots, n_1 \leq n_2$

ويقوم الاختبار على حساب القيمة المشاهدة لـ U ومقارنتها بالقيمة (أو القيمتين) الحرجة(الحرجتين) عند مستوى المعنوية α. ونجد قيمة النقطة الحرجة U_0 من جدول توزيع U بحيث يكون $P(U \leq U_0)=\alpha$ في جالة الاختبار في اتجاه واحد. اما في حالة الاختبار في اتجاهين، فان قيمة النقطة الحرجة هي U_0 بحيث $P(U \leq U_0)=\alpha/2$.

اولا- حالة العينات الصغيرة (n<20): لتحديد مجال رفض H_0 باستخدام جداول توزيع U :

- إذا كانت الفرضية البديلة $H_1: M_x \neq M_y$ أي الاختبار في اتجاهين فاننا لا نرفض H_o إذا كانت:

$$U_{\alpha/2} \leq U \leq U_{1-\alpha/2}$$

- أما إذا كانت الفرضية البديلة $H_1: M_x > M_y$ أي الاختبار في الاتجاه الايمن فاننا فلا نرفض H_o إذا كانت: $U \leq U_{1-\alpha}$

- أما إذا كانت الفرضية البديلة $H_1: M_x < M_y$ أي الاختبار في الاتجاه الايسر فاننا لا نرفض H_o إذا كانت: $U \geq U_{\alpha}$

ثانيا- حالة العينات الكبيرة (n>20): في حالة العينات الكبيرة نستخدم التوزيع الطبيعي كتقريب لتوزيع U، وإحصائية الاختبار في هذه الحالة هي:

$$Z = \frac{U - E(U)}{\sigma_U} = \frac{U - \frac{n_1 n_2}{2}}{\sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1+n_2+1)}{12}}}$$

وتتبع التوزيع الطبيعي المعياري حيث: $E(U) = \frac{1}{2}$ و $\sigma_U = \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1+n_2+1)}{12}}$

واتخاذ القرار حول الفرضية الصفرية H_0 يكون بمقارنة القيمة المحسوبة لاحصائية الاختبار Z بالقيمة الحرجة Z_α او $Z_{\alpha/2}$ من جدول التوزيع الطبيعي. ونتخذ القرار كمايلي:

1- في حالة الفرضية البديلة $H_1: M_x \neq M_y$ نرفض الفرضية الصفرية اذا كانت:

$$Z_{cal.} < -Z_{\alpha/2} \text{ او } Z_{cal.} > Z_{\alpha/2}$$

2- في حالة الفرضية البديلة $H_1: M_x > M_y$ نرفض الفرضية الصفرية اذا كانت: $Z_{cal.} > Z_\alpha$

3- في حالة الفرضية البديلة $H_1: M_x < M_y$ نرفض الفرضية الصفرية اذا كانت: $Z_{cal.} < -Z_\alpha$

مثال 19: الجدول التالي يمثل علامات عينتين من الطلبة لنفس المقياس لكن امتحنوا بمجموعتين مختلفتين من الاسئلة. ونريد اختبار مدى تكافؤ مجموعتي الاسئلة عند مستوى دلالة $\alpha=0.05$.

العينة X 1	العينة Y 2
52	72
78	62
56	91
90	88
65	90
86	74
64	98
90	80
49	81
78	71

الحل:

– الفرضية الصفرية و الفرضية البديلة لهذا الاختبار هما H_0: وسيطي علامات العينتين متساويين مقابل H_1: وسيطي علامات العينتين غير متساويين.

– بما ان الفرضية البديلة $H_1: M_x \neq M_y$، من جدول توزيع U من اجل $n1=n2=10$ نجد ان القيمة الجدولية للاختبار هي $U_0=23$ عندما يكون الاختبار في اتجاهين و $\alpha=0.05$.

– نقوم الان بحساب قيمة احصائية الاختبار U، وبما ان العينة صغيرة ($20>$) فان U= "اقل العددين U_x و U_y". لحساب كل من U_x و U_y نقوم بحساب مجموع رتب مشاهدات العينة 1 و مجموع رتب مشاهدات العينة 2 كمايلي:

العينة المشتركة	الرتبة	رتب X	رتب Y
49	1	1	
52	2	2	
56	3	3	
62	4		4
64	5	5	
65	6	6	
71	7		7
72	8		8
74	9		9
78	10.5	10.5	
78	10.5	10.5	
80	12		12
81	13		13
86	14	14	
88	15		15
90	17	17	
90	17		17
90	17	17	
91	19		19
98	20		20
المجموع		86	124

من الجدول نتحصل على T_x=86 و T_y= 124 و بالتعويض في معادلة U_x و U_y نجد:

$$U_x = n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1+1)}{2} - T_x = 69$$

$$U_y = n_1 n_2 + \frac{n_2(n_2+1)}{2} - T_y = 31$$

وبما ان U="اقل العددين U_x و U_y" فاحصائية الاختبار المحسوبة هي U=31.

- بمقارنة القيمة الجدولية والقيمة المحسوبة للاختبار نجد ان $U > U_0$ أي ان احصائية الاختبار تقع في مجال قبول H_0 وهذا يعني أنه لا يوجد فرق دال احصائيا بين مجموعتي الاسئلة أي ان هناك تكافؤ مجموعتي الاسئلة.

5. التطبيق العملي باستخدام SPSS

قبل التطرق الى التطبيق العملي لاختبار الفرضيات باستخدام البرنامج الاحصائي لابد ان نشير الى المبدأ الذي يعتمده البرنامج في تصنيف هذه الاختبارات. حيث يصنف برنامج **SPSS** مختلف الاختبارات الاحصائية للفرضيات بالنظر الى:

1- طبيعة الاختبار: حيث تصنف الاختبارات اما كاختبارات احصائية معلمية او كاختبارات احصائية لامعلمية. ونجد مختلف الاختبارات الاحصائية المعلمية ضمن لائحة Analyse الامر Comparer les moyennes بينما الاختبارات الاحصائية اللامعلمية نجدها ضمن لائحة Analyse الامر Tests non paramétriques.

2- عدد العينات ونوعها: حيث تصنف كل من الاختبارات المعلمية واللامعلمية بدورها الى اختبارات العينة البسيطة (عينة واحدة)، اختبارات للعينات المستقلة واختبارات للعينات المرتبطة.

وفيما يلي سنستعرض كيفية تنفيذ اهم الاختبارات المعلمية واللامعلمية باستخدام البرنامج.

1.5 اختبارات العينة الواحدة One sample: تنقسم اختبارات العينة الواحدة او العينة البسيطة الى اختبارات معلمية واختبارات غير معلمية سنقوم بعرض اهمها فيما يلي.

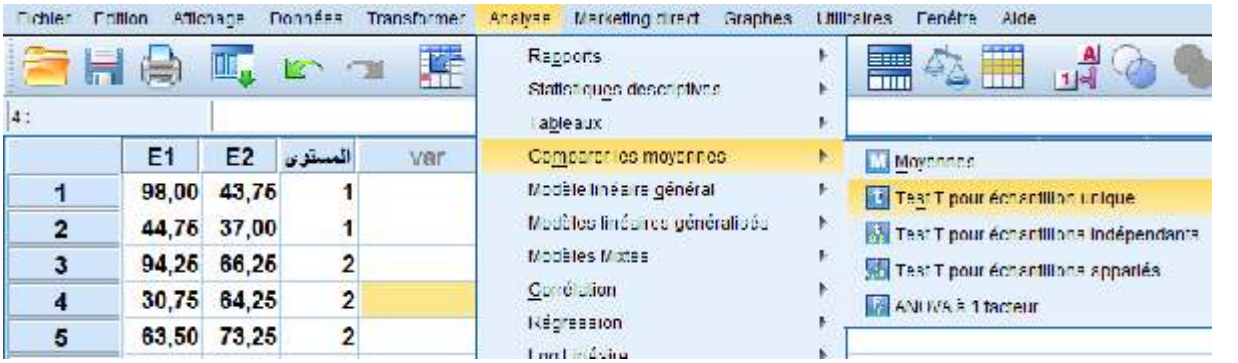
اولا– اختبار t للعينة الواحدة: هذا الاختبار معلمي يستخدم لفحص فرضية تتعلق بالوسط الحسابي للمجتمع عندما يتحقق شرط التوزيع الطبيعي للمتغير.

مثال تطبيقي 20: باستعمال معطيات المثال 6، نريد اختبار عند مستوى معنوية $\alpha=0.05$ الفرضية التالية: متوسط اجر موظفي المؤسسة 1 يساوي 50ون. اذن تصاغ الفرضية الصفرية والبديلة كمايلي:

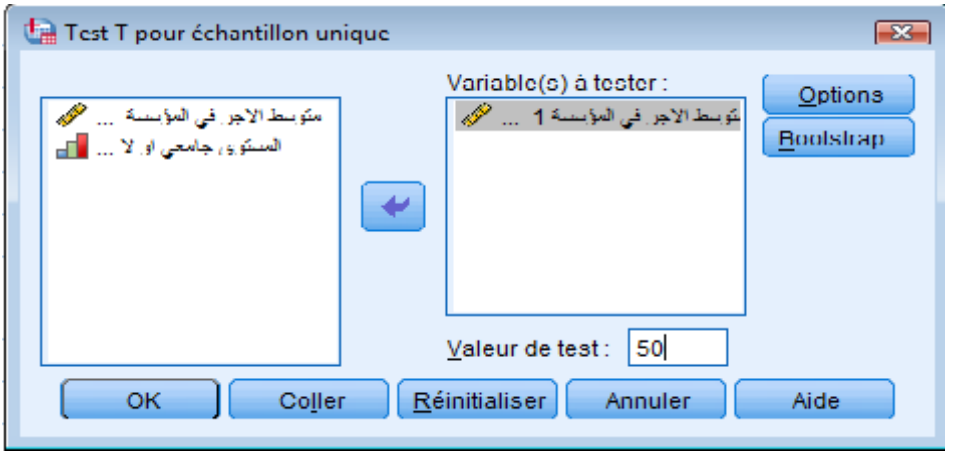
$$H_0 : \mu = 50 \text{ و } H_1 : \mu \neq 50$$

لاختبار الفرضية الصفرية نتبع الخطوات التالية:

نختار من لائحة Analyse الامر Comparer les moyennes ثم ننقر على خيار Test T pour échantillon unique ونختار المتغير الذي نريد اجراء الاختبار له ثم ننقر على ثم نكتب قيمة الاختبار في مربع Valeur du test في مثالنا نكتب 50 ثم ننقر على OK.



ومربع الحوار لاختبار t للعينة الواحدة يظهر بالشكل التالي:



وتظهر النتائج كالتالي:

Test-t

Statistiques sur échantillon unique

	N	Moyenne	Ecart-type	Erreur standard moyenne
متوسط الاجر في المؤسسة1	30	61,4083	22,56251	4,11933

Test sur échantillon unique

	Valeur du test = 50					
	t	ddl	Sig. (bilatérale)	Différence moyenne	Intervalle de confiance 95% de la différence	
					Inférieure	Supérieure
متوسط الاجر في المؤسسة1	2,769	29	,010	11,40833	2,9834	19,8333

يظهر الجدول الاول عدد مفردات العينة والمتوسط الحسابي للعينة وانحرافه المعياري والخطا المعياري للمتوسط. بينما تظهر نتائج الاختبار في الجدول الثاني. نلاحظ ان قيمة الاختبار هي 2,77 بمستوى احتمالية Sig. 0.01 . ولاتخاذ القرار نقارن بين مستوى الاحتمالية (أي مستوى الدلالة ونرمز له رياضيا p) بمستوى المعنوية α. وبما ان الاختبار في اتجاهين فاننا نرفض الفرضية الصفرية لان مستوى دلالة الاختبار اقل من

0.025 ($2/\alpha$) أي ان احصائية الاختبار تقع في مجال رفض H_0. وهذا يعني ان متوسط اجر المؤسسة 1 لا يساوي 50ون. وبما ان قيمة t موجبة فان متوسط الاجر المقدر للمجتمع الاحصائي يساوي 52,77 ون.

ثانيا– اختبار الاشارة او ذي الحدين Binomial: هذا الاختبار لامعلمي يستخدم لفحص فرضية تتعلق بالوسط الحسابي للمجتمع عندما لا يتحقق شرط التوزيع الطبيعي للمتغير.

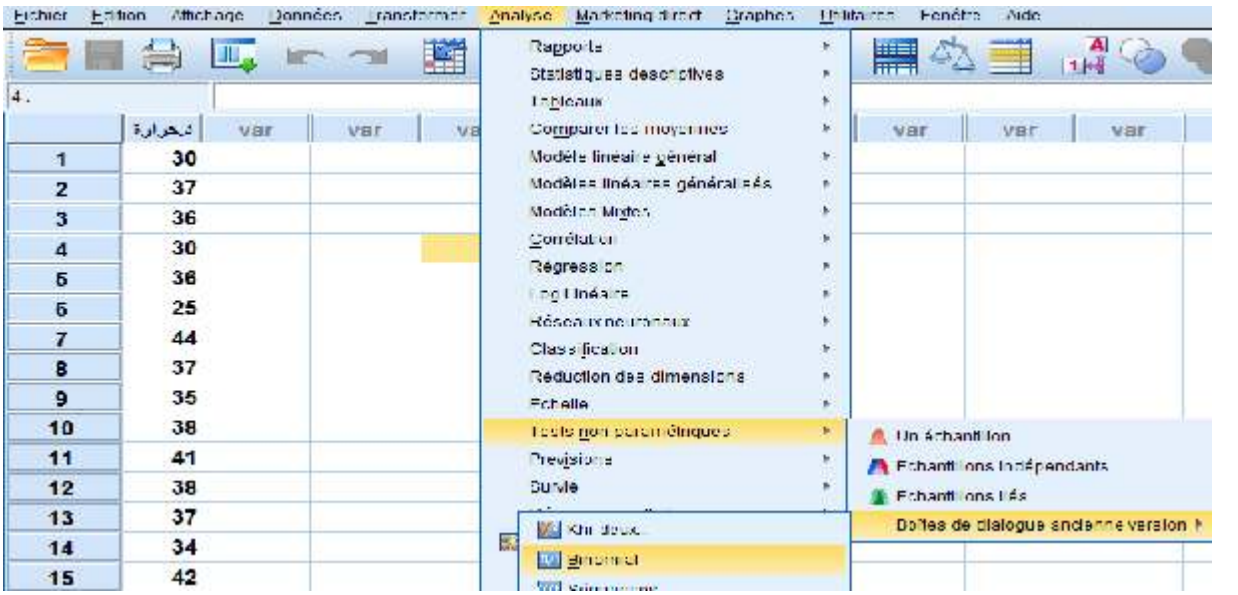
مثال تطبيقي 21: لدينا عينة تتكون من مشاهدات حول درجات الحرارة المسجلة في شهر جوان لمدة 15 يوم في احدى المدن كمايلي:30,37,36,30,36,25,44,37,35,38,41,38,37,34,42

ونريد اختبار الفرضية القائلة بان وسيط درجة الحرارة هو 39 عند معنوية α=0.05.

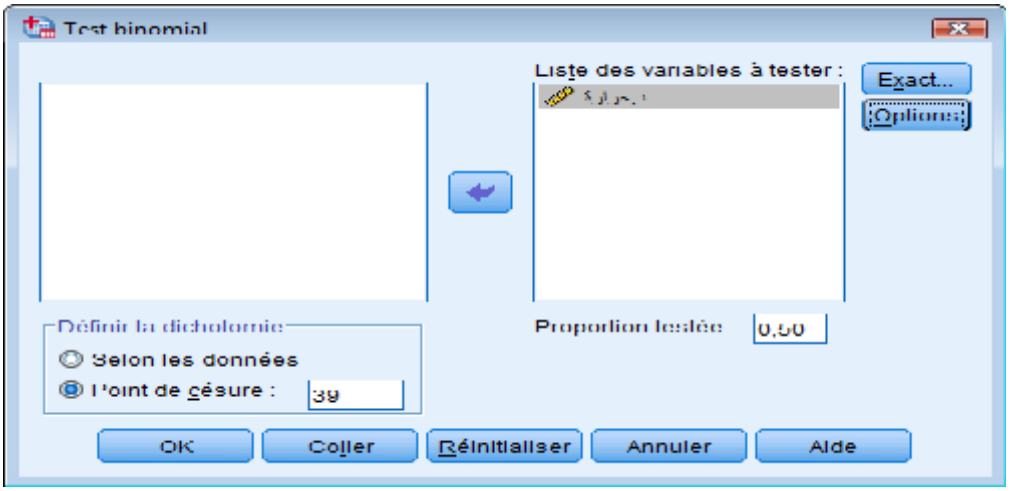
فرضيات هذا الاختبار هي H_0:M=39 مقابل H_1:M≠39

ولاختبار الفرضية الصفرية نتبع الخطوات التالية:

نختار من لائحة Analyse الامر Tests non paramétriques ثم ننقر على خيار Boites de dialogue ancienne version ثم ننقر على خيار Binomial فيظهر مربع الحوار الخاص ونختار المتغير الذي نريد اجراء الاختبار له ثم ننقر على ⟶ ثم نكتب قيمة الاختبار في مربع نقطة التقاطع point de césure في مثالنا نكتب 39 ثم ننقر على OK.



ومربع الحوار لاختبار Binomial للعينة الواحدة يظهر بالشكل التالي:



وتظهر النتائج كالتالي:

Tests non paramétriques

Statistiques descriptives

	N	Moyenne	Ecart-type	Minimum	Maximum
حرارة.د	15	36,00	4,884	25	44

Test binomial

		Modalité	N	Proportion observée.	Test de proportion	Signification exacte (bilatérale)
حرارة.د	Groupe 1	<= 39	12	,80	,50	,035
	Groupe 2	> 39	3	,20		
	Total		15	1,00		

يظهر الجدول الاول عدد مفردات العينة والمتوسط الحسابي للعينة وانحرافه المعياري واكبر واصغر مشاهدة. بينما تظهر نتائج الاختبار في الجدول الثاني. نلاحظ ان مستوى دلالة الاختبار Sig. 0.035 وبما انه اكبر من 0.025 (لان الاختبار في اتجاهين) فاننا نقبل الفرضية الصفرية، أي ان وسيط درجة الحرارة هو 39 درجة.

2.5 اختبارات العينات المستقلة Independant sample: تنقسم اختبارات العينات المستقلة الى اختبارات معلمية واختبارات لا معلمية سنقوم بعرض اهمها فيما يلي.

اولا– اختبار t للعينات المستقلة Independant T test: هذا الاختبار هو اختبار معلمي يستخدم لفحص الفرضيات المتعلقة بمساواة متوسط متغير ما لعينتين مستقلتين. وله شكلان الاول في حالة افتراض ان تباين العينتين متساو والآخر في حالة افتراض ان تباين العينتين غير متساو. ولاستخدام هذا الاختبار يجب ان يكون لكل مفردة من مفردات العينة قيمة على متغيرين:

- المتغير الاول يسمى متغير التجميع: يقسم العينة الكلية الى عينتين جزئيتين غير متداخلتين مثل متغير الجنس فنتحصل على العينة الاولى عينة الذكور والعينة الثانية عينة الاناث.

- المتغير الثاني يسمى المتغير التابع: وهو متغير كمي يمثل متغير الاختبار الذي نريد اختبار تساوي متوسطه في العينتين الجزئيتين.

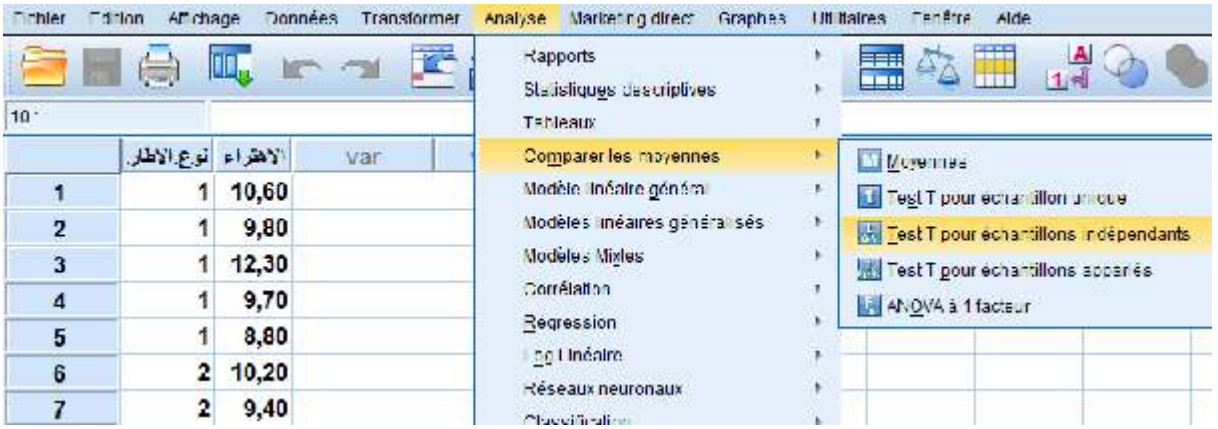
مثال تطبيقي 22: تريد شركة ان تختبر مدى اهتراء نوعين من اطارات السيارات نوع A ونوع B. لهذا قامت الشركة بتركيب هذه الاطارات على 5 سيارات بحيث كانت الاطارات على احدى الجهتين من النوع A و الاطارات من الجهة الاخري من النوع B. وبعد قيادة السيارة لمسافة محددة تم قياس مقدار الاهتراء والنتائج تظهر في الجدول التالي.

رقم السيارة	الاهتراء في A	الاهتراء في B
1	10.6	10.2
2	9.8	9.4
3	12.3	11.8
4	9.7	9.1
5	8.8	8.3

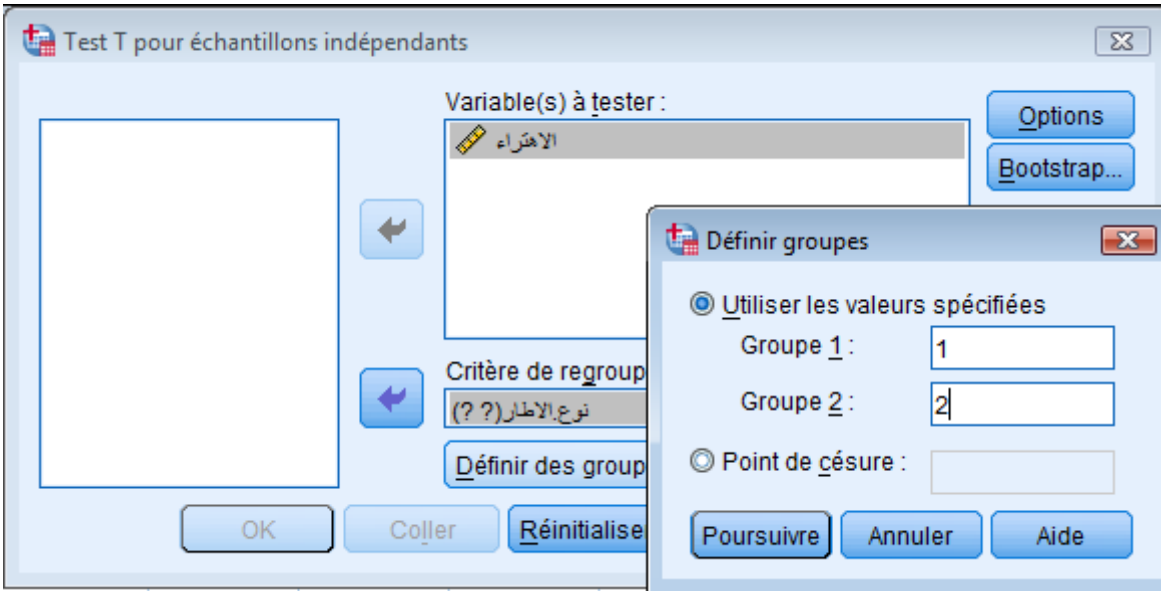
تكتب الفرضية الصفرية والبديلة لهذا الاختبار كمايلي: $H0: \mu_A=\mu_B$ و $H_1: \mu_A=\mu_B$ حيث ان متوسط العينة الاولى: μ_A و متوسط العينة الثانية: μ_B. مستوى معنوية الاختبار $\alpha=0.05$.

لاختبار هذه الفرضية نتبع الخطوات التالية:

نختار من لائحة Analyse الامر Comparer les moyennes ثم ننقر على خيار Test T pour échantillons indépendants ونختار متغير الاختبار وننقله الى مربع Variables à tester وننقر على ثم نختار متغير التجميع وننقله الى مربع Critère de regroupement... وننقر على ثم ننقر على Définir des groupes ونضع رمز المجموعة او العينة الاولى ورمز المجموعة الثانية التي نريد اجراء الاختبار لها اذا كانت المجموعتان معرفتان كعينة الاناث والذكور اما اذا احتجنا لتعريف المجموعتين حسب السن مثلا مجموعة اكبر من 35 سنة و مجموعة اقل من 35 سنة فنستخدم خيار Point de césure وندخل القيمة التي تقسم حسبها المجموعات مثلا 35 ثم ننقر على OK.



ومربع الحوار لاختبار t للعينات المستقلة يظهر بالشكل التالي:



وتظهر النتائج كالتالي:

Test-t

Statistiques de groupe

	نوع.الاطار	N	Moyenne	Ecart-type	Erreur standard moyenne
الاهتراء	النوعA	5	10,2400	1,31643	,58873
	النوعB	5	9,7600	1,32778	,59380

Test d'échantillons indépendants

		Test de Levene sur l'égalité des variances		Test-t pour égalité des moyennes						
		F	Sig.	t	ddl	Sig. (bilatérale)	Différence moyenne	Différence écart-type	Intervalle de confiance 95% de la différence	
									Inf.	Sup.
الاهتراء	Hypothèse de variances égales	,003	,960	,574	8	,582	,48000	,83618	-1,44824	2,41
	Hypothèse de variances inégales			,574	7,999	,582	,48000	,83618	-1,44826	2,41

يظهر الجدول الاول عدد مفردات العينات والمتوسط الحسابي للعينات وانحرافها المعياري، بينما يظهر الجدول الثاني نتائج اختبار Levène لتجانس التباين ونلاحظ ان مستوى المعنوية لهذا الاختبار 0.960 هذا يعني اننا نقبل فرضية تجانس التباين للعينتين فنواصل الاختبار. اما نتائج اختبار t فتظهر بمستوى دلالة Sig. 0.582 وبما انها اكبر من 0.025 (لان الاختبار في اتجاهين) نقبل الفرضية الصفرية القائلة بان متوسط اهتراء الاطارات من النوع A يساوي متوسط اهتراء الاطارات من النوع B.

ثانيا– اختبار U de Mann–Whitney و اختبار W de Wilcoxon : هذان الاختباران هما من الاختبارات اللامعلمية يستخدمان لفحص الفرضيات المتعلقة بمساواة وسيط متغير ما لعينتين مستقلتين عندما لا تتحقق شروط تطبيق الاختبارات المعلمية للعينات المستقلة. وهذان الاختباران متكافئان فيمكن استخدام احدهما بدلا من الاخر.

مثال تطبيقي 23: لمقارنة إنتاجية نوع من اشجار الفاكهة في المزرعتين A و B، أخذت عينتين عشوائيتين من كل منهما وسجل انتاج كل شجرة بالكيلو في نفس الموسم. وكانت النتائج كما يلي:

العينة من A: 30 25 28 32 25 29 40 36

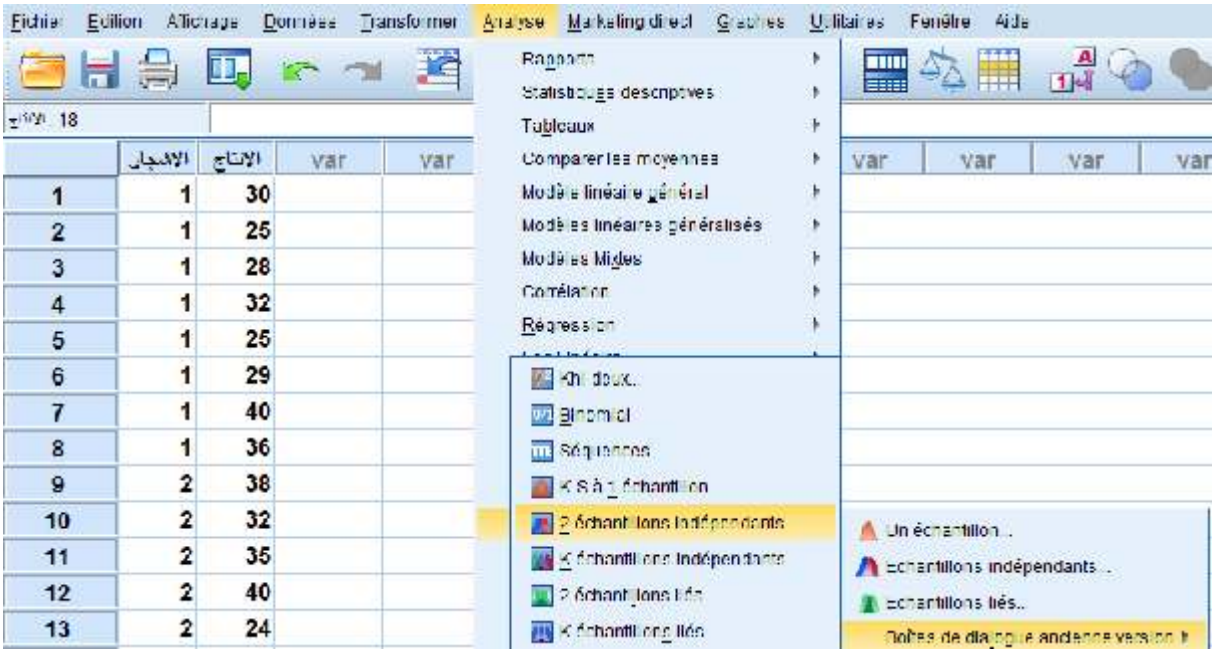
العينة من B: 38 32 35 40 24 29 35 48 33

هل يمكن الاستنتاج من هذه المعطيات أن وسيط الإنتاجية متساو في المزرعتين؟ مستوى معنوية الاختبار α=0.05.

تكتب الفرضية الصفرية والبديلة لهذا الاختبار كمايلي: $H_0 : M_x=M_y$ مقابل $H_1: M_x \neq M_y$

لاجراء هذا الاختبار نتبع الخطوات التالية:

نختار من لائحة Analyse الامر Tests non paramétriques ثم ننقر على خيار Boites de dialogue ancienne version ثم ننقر على خيار 2 échantillons indépendants فيظهر مربع الحوار الخاص ونختار متغير الاختبار وننقله الى مربع Liste des variables à tester وننقر على ثم نختار متغير التجميع وننقله الى مربع Critère de regroupement... وننقر على ثم ننقر على Définir des groupes ونضع رمز المجموعة او العينة الاولى ورمز المجموعة او العينة الثانية التي نريد اجراء الاختبار لها ثم ننقر في خيارات Type de test على U de Mann-Whitney ثم ننقر على OK.



ومربع الحوار لاختبار U-test للعينات المستقلة يظهر بالشكل التالي:

وتظهر النتائج كالتالي:

Tests non paramétriques

Rangs

	الاشجار	N	Rang moyen	Somme des rangs
الانتاج	المزرعة A	8	7,31	58,50
	المزرعة B	9	10,50	94,50
	Total	17		

Test[a]

	الانتاج
U de Mann-Whitney	22,500
W de Wilcoxon	58,500
Z	-1,303
Signification asymptotique (bilatérale)	,193
Signification exacte [2*(signification unilatérale)]	,200[b]

a. Critère de regroupement : الاشجار

b. Non corrigé pour les ex aequo.

يظهر الجدول الاول عدد مفردات العينات ومتوسط رتب العينات ومجموع الرتب لكل عينة، بينما يظهر الجدول الثاني نتائج اختبار U وW. نتائج اختبار U تظهر بمستوى دلالة Sig. 0.193 وبمستوى دلالة مضبوط Sig 0.200 وكلاهما اقل من 0.025 (لان الاختبار في اتجاهين) اذن نرفض الفرضية الصفرية وبالتالي وسيط الإنتاجية في المزرعة A يختلف عن وسيط الإنتاجية في المزرعة B.

3.5 اختبارات العينات المرتبطة او غير المستقلة Paired or Related sample : تنقسم اختبارات العينات المرتبطة الى اختبارات معلمية واختبارات لا معلمية سنقوم بعرض اهمها فيما يلي.

اولا– اختبار t للعينات المرتبطة Paired sample T test: هذا الاختبار هو اختبار معلمي يستخدم لفحص الفرضيات المتعلقة بمساواة متوسط متغيرين لعينتين مرتبطتين δ_0 μ_{y-} μ_x .

مثال تطبيقي 24: شارك 11 شخص في برنامج لتخفيف الوزن. والجدول التالي يعطي مستوى الكلسترول عندهم قبل وبعد التجربة.

الشخص	الكلسترول قبل التجربة	الكلسترول بعد التجربة
1	201	200
2	221	215
3	231	235
4	261	234
5	230	226
6	237	215
7	240	195
8	335	295
9	270	245
10	248	220
11	201	210

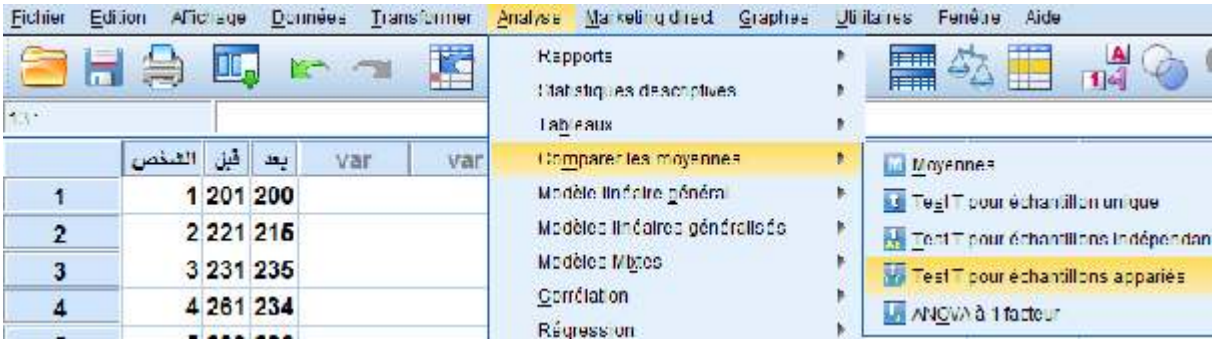
هل هذا البرنامج فعال في انقاص مستوى الكلسترول؟ مستوى معنوية الاختبار α=0.05.

تكتب الفرضية الصفرية والبديلة لهذا الاختبار كمايلي: H_0 :$\delta=\delta_0$ مقابل H_1:$\delta\neq\delta_0$ حيث:

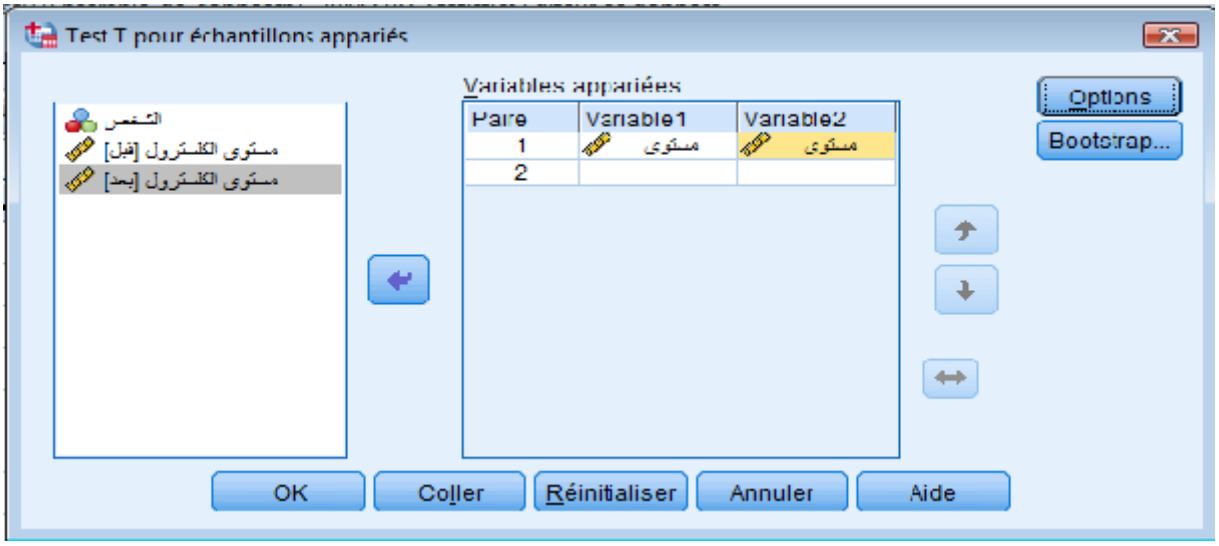
δ_0 =μ_y - μ_x و μ_x متوسط العينة الاولى و μ_y متوسط العينة الثانية.

لاجراء هذا الاختبار نتبع الخطوات التالية:

نختار من لائحة Analyse الامر Comparer les moyennes ثم ننقر على خيار Test T pour échantillons appariés ونختار المتغيرين الذين نريد اجراء الاختبار لهما وننقلها عن طريق السهم الى مربع المتغيرات ثم ننقر على OK.



ومربع الحوار لاختبار t للعينات المرتبطة يظهر بالشكل التالي:



وتظهر النتائج كالتالي:

Test-t

Statistiques pour échantillons appariés

		Moyenne	N	Ecart-type	Erreur standard moyenne
Paire 1	الكلسترول قبل	243,18	11	37,298	11,246
	الكلسترول بعد	226,36	11	27,270	8,222

Corrélations pour échantillons appariés

		N	Corrélation	Sig.
Paire 1	الكلسترول قبل & الكلسترول بعد	11	,888	,000

Test échantillons appariés

		Différences appariées					t	ddl	Sig. (bilatérale)
		Moyenne	Ecart-type	Erreur standard moyenne	Intervalle de confiance 95% de la différence				
					Inférieure	Supérieure			
Paire 1	الكلسترول قبل & الكلسترول بعد	16,818	18,126	5,465	4,641	28,996	3,077	10	,012

يظهر الجدول الاول المتوسط الحسابي للعينات وانحرافها المعياري وعدد مفردات العينات، بينما تظهر نتائج الجدول الثاني معامل الارتباط بين المتغيرين وهو ارتباط طردي قوي بمستوى دلالة 0.000. اما نتائج الاختبار فتظهر في الجدول الثالث. نلاحظ ان قيمة الاختبار هي 3,077 بمستوى دلالة Sig. 0.012 وبما انه اقل من 0.025 (لان الاختبار في اتجاهين) فاننا نرفض الفرضية الصفرية. أي ان هناك فرق بين المتوسطين وبالتالي البرنامج فعال في انقاص مستوى الكلسترول.

ثانيا– اختبار الاشارة Signe واختبار Wilcoxon للعينات المرتبطة: هذه الاختبارات هي اختبارات لامعلمية تستخدم لفحص الفرضيات المتعلقة بمساواة متوسط متغيرين لعينتين مرتبطتين عندما لا يتحقق شرط التوزيع الطبيعي للفرق بين المتغيرين.

مثال تطبيقي 25: المعطيات التالية توضح متوسط الإنتاجية اليومي من الحليب لـ 10 بقرات مختارة عشوائيا من مزرعة لانتاج الألبان قبل (X) وبعد (Y) تغذيتها بنوع من العلف يعتقد أنه يزيد الإنتاجية:

X: 30.0, 31.0, 29.0, 35.0, 32.0, 40.0, 36.0, 30.0, 33.0, 32.0

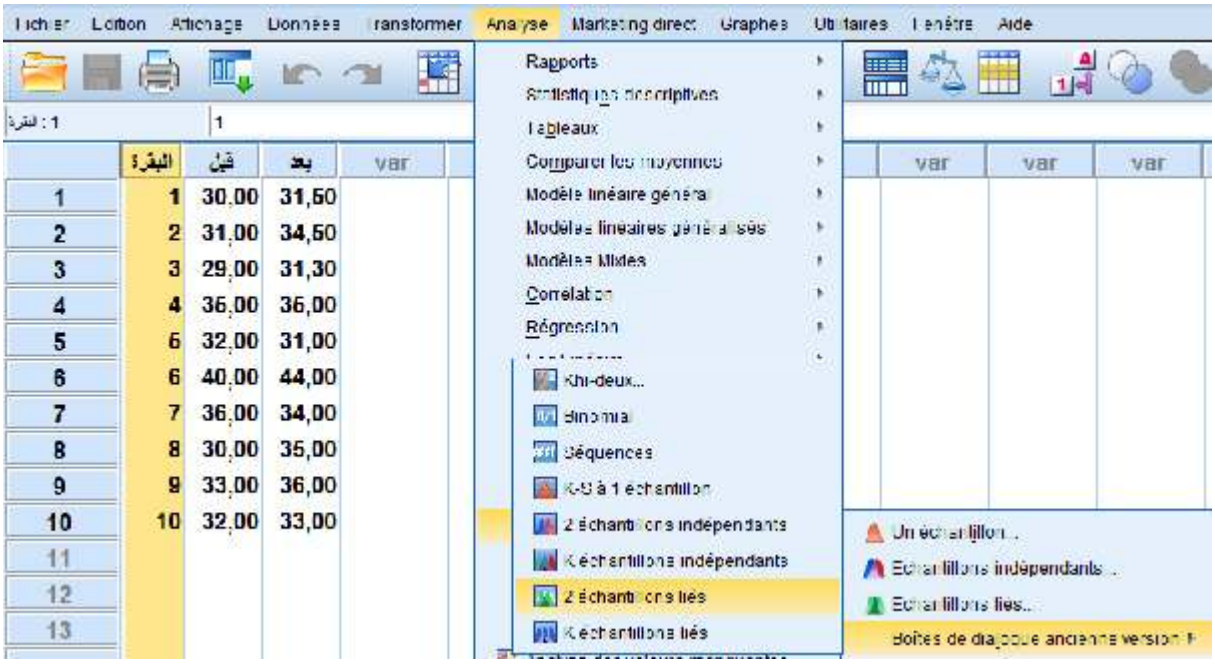
Y: 31.5, 34.5, 31.3, 35.0, 31.0, 44.0, 34.0, 35.0, 36.0, 33.0

اختبر بمستوى معنوية 0.05 صحة الفرض بأن وسيط الفروقات في الإنتاجية (X–Y) صفر مقابل الفرق بأنه يختلف عن الصفر.

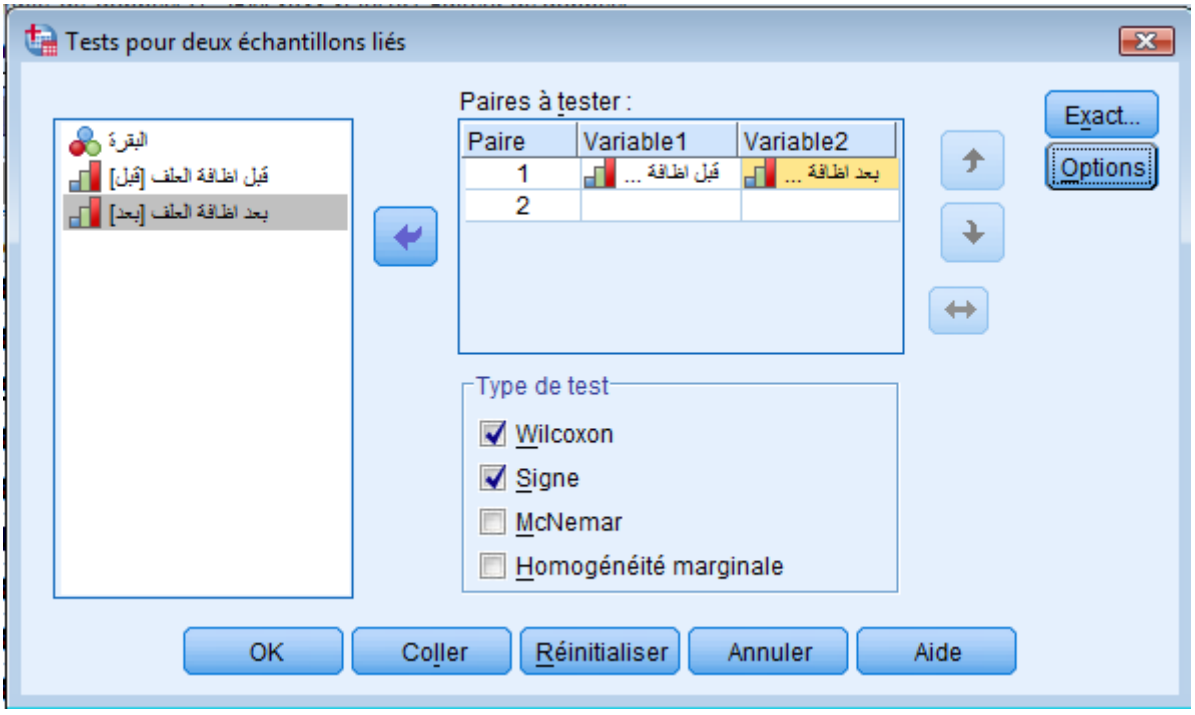
تكتب الفرضية الصفرية والبديلة لهذا الاختبار كمايلي: $H_0: M_d=0$ مقابل $H_1: M_d\neq 0$

ولاختبار الفرضية الصفرية نتبع الخطوات التالية:

نختار من لائحة Analyse الامر Tests non paramétriques ثم ننقر على خيار Boites de dialogue ancienne version ثم ننقر على خيار 2 échantillons liés فيظهر مربع الحوار الخاص ونختار المتغيرين الذين نريد اجراء الاختبار لهما ثم ننقر على ثم ننقر في خيارات Type de test على Wilcoxon و Signe ثم ننقر على OK.



ومربع الحوار للاختبارات غير المعلمية للعينات المرتبطة يظهر بالشكل التالي:



وتظهر النتائج كالتالي:

Tests non paramétriques

Statistiques descriptives

	N	Moyenne	Ecart-type	Minimum	Maximum
العلف اظافة قبل	10	32,8000	3,35989	29,00	40,00
العلف اظافة بعد	10	34,5300	3,75619	31,00	44,00

Test de Wilcoxon

Rangs

		N	Rang moyen	Somme des rangs
العلف اظافة قبل - العلف اظافة بعد	Rangs négatifs	2[a]	2,75	5,50
	Rangs positifs	7[b]	5,64	39,50
	Ex aequo	1[c]		
	Total	10		

a. بعد اظافة العلف < قبل اظافة العلف

b. بعد اظافة العلف > قبل اظافة العلف

c. بعد اظافة العلف = قبل اظافة العلف

Test[a]

	بعد اظافة العلف - قبل اظافة العلف
Z	-2,016[b]
Signification asymptotique (bilatérale)	,044

a. Test de Wilcoxon

b. Basée sur les rangs négatifs.

Test des signes

Fréquences

		N
بعد اظافة العلف - قبل اظافة العلف	Différences négatives[a]	2
	Différences positives[b]	7
	Ex aequo[c]	1
	Total	10

a. بعد اظافة العلف < قبل اظافة العلف

b. بعد اظافة العلف > قبل اظافة العلف

c. بعد اظافة العلف = قبل اظافة العلف

Test[a]

	بعد اظافة العلف - قبل اظافة العلف
Signification exacte (bilatérale)	,180[b]

a. Test des signes

b. Distribution binomiale utilisée.

يظهر الجدول الاول عدد مفردات العينات والمتوسط الحسابي للعينات وانحرافها المعياري واكبر واصغر مشاهدة في كل عينة. بينما يظهر الجدول الثاني عدد الفروق الموجبة والسالبة والمعدومة ومجموع الرتب. ويظهر الجدول الثالث نتائج اختبار ولكوكسن لاشارة الرتب. ويظهر الجدول الرابع عدد الفروق الموجبة والسالبة في اختبار الاشارة، بينما تظهر نتائج الاختبار في الجدول الخامس.

من الجدول الثالث نلاحظ ان مستوى دلالة اختبار Wilcoxon هو Sig. 0.044 وبما انه اقل من 0.025 (لان الاختبار في اتجاهين) فاننا نرفض الفرضية الصفرية. أي ان وسيط فروقات انتاجية الحليب لدى الابقار يختلف عن الصفر. هذا يعني ان العلف حسن من انتاجية الابقار للحليب.

من الجدول الخامس نلاحظ ان مستوى دلالة اختبار الاشارة هو Sig. 0.18 وبما انه اكبر من 0.025 (لان الاختبار في اتجاهين) فاننا نقبل الفرضية الصفرية. أي ان وسيط فروقات انتاجية الحليب لدى الابقار يساوي الصفر. هذا يعني ان العلف لم يحسن من انتاجية الابقار للحليب.

نلاحظ ان هناك تناقض بين نتيجة اختبار ويلكوكسن ونتيجة اختبار الاشارة. ويراجع هذا الى ان اختبار الاشارة هو اختبار اقل كفاءة من اختبار ويلكوكسن لانه متحيز وغير متسق خصوصا في حالة عدم توفر كل شروط اجراء الاختبار. كما ان استخدام اختبار الإشارة يؤدي لضياع معلومات متاحة لأنه يعتمد على اشارات الفروق فقط ولا يستفيد من مقدار الاختلاف بين القيم وإنما فقط موقع كل منها بالنسبة للوسيط عكس اختبار ويلكوكسن.

الفصل الرابع: تحليل الارتباط والانحدار

من اجل وصف وتحليل طبيعة وقوة العلاقة بين متغيرين أو أكثر والتنبؤ بمدى تأثر متغير بباقي المتغيرات نلجأ الى استخدام بعض طرق التحليل الإحصائي مثل تحليل الارتباط وتحليل الانحدار. فإذا كان الاهتمام منصبا على دراسة طبيعة وقوة العلاقة بين المتغيرات نتوجه لاستخدام أسلوب تحليل الارتباط، وإذا كان الاهتمام يتعلق بدراسة أثر أحد المتغيرات على المتغيرات الاخرى نتوجه لاستخدام أسلوب تحليل الانحدار. سنركز في هذا الفصل على دراسة العلاقة بين متغيرين وهذا من خلال دراسة بعض مقاييس الارتباط الخطي البسيط وكذلك كيفية التعبير عن علاقة الارتباط باستخدام معادلة رياضية او مايعرف بمعادلة خط الانحدار البسيط كما سنتطرق الى كيفية التعبير عن العلاقة بين عدة متغيرات وهذا باستخدام معادلة الانحدار المتعدد.

1. دراسة الارتباط الخطي البسيط

يشير الارتباط بين ظاهرتين الى مدى وجود علاقة بينهما، بحيث اذا تغير احدهما في اتجاه معين، مال الاخر الى التغير في نفس الاتجاه او في الاتجاه المعاكس. ويعتبر الارتباط مؤشر كمي لتحديد درجة الاعتماد على متغير أو اكثر في التنبؤ بقيم متغير آخر ولكنه لا يسمح بالتنبؤ بهذه القيم كما لا يوفر تحليل الارتباط أي مؤشر فيما لو كانت العلاقة بين المتغيرات سببية أي من هو المتغير الذي يتسبب في تغير الاخر.

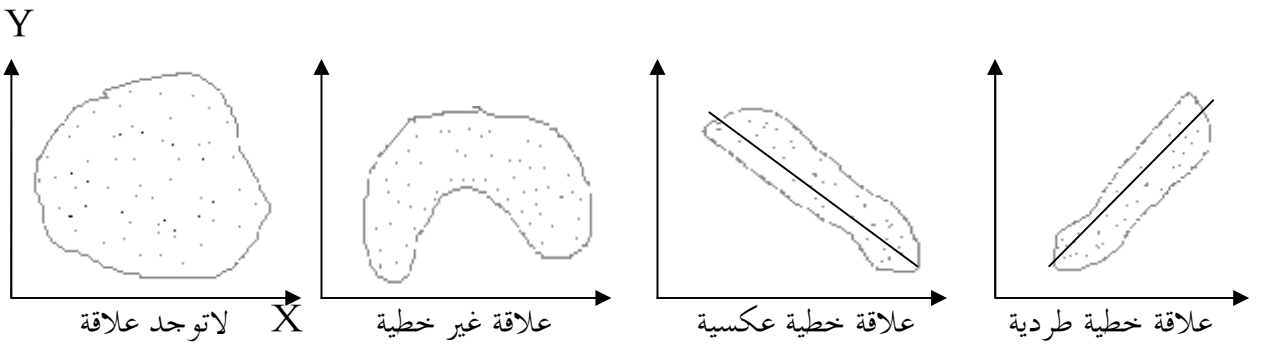
ويمكن الاستدلال على طبيعة العلاقة بين متغيرين من خلال أجراء تحليل بياني تصويري أي من خلال رسم ما يعرف بشكل الانتشار لكل زوج من القيم المتناظرة للمتغيرين. ويساعد الفحص البصري لشكل انتشار المعطيات في التزود بالمعلومات التالية:

1- تعيين شكل العلاقة بين المتغيرين: خطية ام غير خطية.

2- تعيين نوع وقوة العلاقة بين المتغيرين: طردية ام عكسية، قوية او ضعيفة.

3- تعيين ظهور نقاط متطرفة.

هذه المعلومات تعتبر ذات درجة عالية من الأهمية في التحليل الإحصائي واتخاذ القرارات فعندما تظهر المتغيرات درجة عالية من الارتباط يمكن الافتراض بوجود علاقة سببية بينها وفي حالة وجود سبب للتشكيك بوجود علاقة سببية فشكل التوزيع الذي تتخذه معطيات العينة يقدم تعزيز تجريبي للعلاقة المفترضة. وتأخذ العلاقة بين متغيرين X و Y في الواقع العملي واحد من الاشكال التالية:



الشكل 7: اشكال انتشار المعطيات

عندما تكون مواقع النقط التي تمثل قيم المتغيرين مبعثرة في الشكل ولا تتخذ اتجاها محددا دل ذلك على ضعف العلاقة التي تربط المتغيرين كما في الشكل (د). اما اذا كان انتشار النقط محددا ويمكن تمثيله بخط مستقيم دل ذلك على قوة العلاقة بين المتغيرين ويسمى الارتباط في هذه الحالة ارتباطا خطيا. وقد يكون طرديا أي تغير احد المتغيرين يؤدي الى تغير المتغير الاخر في نفس الاتجاه (الشكل أ)، او عكسيا أي تغير احد المتغيرين يؤدي الى تغير المتغير الاخر في الاتجاه المعاكس (الشكل ب). اما اذا كان الاتجاه العام الممثل لانتشار هذه النقط خطا منحنيا سميت العلاقة بين المتغيرين بعلاقة غير خطية (الشكل ج).

ويمكن قياس قوة العلاقة بين متغيرين يتوزعان توزيعا طبيعيا باستخدام مقياس خاص لهذا الغرض يسمى بمعامل الارتباط ويأخذ صيغا مختلفة جميعها تؤدي نفس الغرض ويرمز له بـ r للدلالة على معامل الارتباط للعينة. ويتحدد نوع العلاقة بين متغيرين من خلال اشارة معامل الارتباط r كمايلي:

- اذا كان $r>0$: هذا يعني ان هناك ارتباط خطي طردي أي ان هناك ميل لان تزداد قيم Y بزيادة X.
- اذا كان $r<0$: هذا يعني ان هناك ارتباط خطي عكسي أي ان هناك ميل لان تقل قيم Y بزيادة X.
- اذا كان $r=0$: هذا يعني عدم وجود ارتباط خطي بين X و Y أي لا توجد علاقة بين المتغيرين.
- اذا كان $r=1$: هذا يعني ان هناك ارتباط خطي طردي تام.
- اذا كان $r=-1$: هذا يعني ان هناك ارتباط خطي عكسي تام.

اما قوة العلاقة بين المتغيرين فتتحدد من خلال قيمة معامل الارتباط r كمايلي:

	ارتباط عكسي						ارتباط طردي				
قوي جدا	قوي	متوسط	ضعيف	ضعيف جدا	ضعيف جدا	ضعيف	متوسط	قوي	قوي جدا		
-1	-0.9	-0.7	-0.5	-0.3	**0**	0.3	0.5	0.7	0.9	**1**	
تام				**لا يوجد ارتباط**						**تام**	

الشكل 8: نوع وقوة الارتباط

1.1 معامل بيرسون لتحليل الارتباط الخطي البسيط: يهدف معامل ارتباط بيرسون Pearson لتحديد نوع وقوة العلاقة الخطية بين متغيرين X و Y يتبعان التوزيع الطبيعي، ويستخدم في حالة المعطيات الكمية. فإذا كانت لدينا عينة من الازواج (Xi,Yi) بحيث i=1,…,n فان معامل الارتباط r لبيرسون يعطى بالعلاقة:

$$\mathbf{r} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - n\bar{X}\bar{Y}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} X_i^{\,2} - n\bar{X}^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} Y_i^{\,2} - n\bar{Y}^2}}$$

مثال 26: لدينا معطيات عن مستوى الدخل الشهري Xi و مستوى الاستهلاك الشهري Yi لسبعة اسر.

125	120	115	105	90	85	80	Xi
120	115	110	100	85	80	90	Yi

المطلوب: حساب معامل الارتباط بين الدخل الشهري و الاستهلاك الشهري.

الحل: نلخص العمليات الحسابية التي نحتاجها في حساب معامل الارتباط في الجدول التالي:

$(Yi)^2$	$(Xi)^2$	Xi Yi	Yi	Xi
8100	6400	7200	90	80
6400	7225	6800	80	85
7225	8100	7650	85	90
10000	11025	10500	100	105
12100	13225	12650	110	115
13225	14400	13800	115	120
14400	15625	15000	120	125
71450	**76000**	**73600**	**700**	**720**

$$\bar{X} = \frac{\sum Xi}{n} = \frac{720}{7} = 102{,}86 \;,\; \bar{Y} = \frac{\sum Yi}{n} = \frac{700}{7} = 100$$

$$\mathbf{r} = \frac{73600 - 72002}{\sqrt{76000 - 74061}\sqrt{71450 - 70000}} = \frac{1598}{44{,}03 * 38{,}08} = 0{,}95$$

معامل ارتباط بيرسون يدل على وجود علاقة خطية طردية قوية بين الدخل الشهري و الاستهلاك الشهري لأسر العينة.

2.1 معامل ارتباط الرتب لسبيرمان Spearman: يعتمد معامل ارتباط سيبرمان على ايجاد علاقة الارتباط بين الرتب التي تعطى لمتغيرين وصفيين لا بين ارقام المتغيرين. والمقصود بالرتب هو اعطاء تدرج او ترتيب لصفات او قيم المتغير حسب اهمية او حسب كبر المعطيات. ويستخدم معامل ارتباط سيبرمان في الحالات التالية:

- عدم معرفة توزيع المتغيرين قيد البحث.
- في حالة المعطيات النوعية .
- عند عدم توفر معطيات دقيقة لاحد المتغيرين او كلاهما.
- في حالة المشاهدات ذات الارقام الكبيرة.

لحساب معامل ارتباط الرتب لسبيرمان نتبع الخطوات التالية:

- اعطاء رتب لكل مفردة من مفردات الظاهرتين او المتغيرين؛
- ايجاد الفرق بين رتب المتغيرين لنفس المفردة او المشاهدة وهذا بعد تخصيص الرتبة المتوسطة للمشاهدات ذات القيم المتشابهة؛
- حساب معامل ارتباط الرتب لسبيرمان.

ويحسب معامل سبيرمان لارتباط الرتب بافتراض أن المتغير X له الرتبة R_x والمتغير Y له الرتبة R_y وبفرض ان d ترمز لفرق الرتبتين أي $d=R_x-R_y$ بالصيغة التالية:

$$r_s = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n} d_i^2}{n(n^2-1)}$$

حيث n تمثل عدد الازواج المرتبة (Xi,Yi).

مثال 27: لدينا معطيات تمثل علامات ثمانية طلاب في كل من مادتي الاحصاء والرياضيات وعلى افتراض عدم معرفة توزيع المتغيرات احسب معامل ارتباط الرتب لسبيرمان.

70	60	90	86	80	75	80	67	Xi
70	50	95	90	85	70	75	60	Yi

الحل: نلخص العمليات الحسابية التي نحتاجها في حساب معامل الارتباط في الجدول التالي:

$(di)^2$	d=Rx–Ry	Ry	Rx	Yi	Xi
0	0	7	7	60	67
0.25	-0.5	4	3.5	75	80
0.25	-0.5	5.5	5	70	75
0.25	0.5	3	3.5	85	80
0	0	2	2	90	86
0	0	1	1	95	90
0	0	8	8	50	60
0.25	0.5	**5.5**	**6**	70	70
1					

استخرجت الرتب كمايلي:

- رتب Xi: اعطيت اول رتبة لأكبر قيمة أي 90 وثاني رتبة للقيمة 86 وثالث ورابع رتبة تخص القيمة 80 لأنها تكررت مرتين لذلك نقوم بحساب الرتبة المتوسطة للقيم المتشابهة كمايلي: (3+4)/2= 3,5 وبالتالي القيمة 80 تاخذ الرتبة 3,5. اما القيم 75،60،67،70 فتأخذ الرتب 8،7،6،5.
- رتب Yi: اعطيت اول رتبة لأكبر قيمة أي 95 وثاني رتبة للقيمة 90 وثالث ورابع رتبة تخص القيم 85 و 75. اما القيمة 70 فهي في الرتبة 5 و 6 لذلك نقوم بحساب الرتبة المتوسطة للقيم المتشابهة كمايلي: (5+6)/2= 5.5 وبالتالي القيمة 70 تأخذ الرتبة 5,5. اما القيم 60 و 50 فتأخذ الرتب 7 و 8.

نقوم الان بحساب معامل الارتباط بالتعويض في معادلة سبيرمان للرتب، كمايلي:

$$r_s = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n} d_i^2}{n(n^2-1)} = 1 - \frac{6}{8(8^2-1)} = 0.988$$

معامل ارتباط سبيرمان يدل على وجود علاقة طردية قوية جدا بين معدلات مادتي الاحصاء والرياضيات لطلبة العينة.

3.1 معامل الاقتران ومعامل التوافق

يستعمل معامل الاقتران لتحديد قوة العلاقة بين المعطيات الوصفية لظاهرتين تتميزان بان لكل منهما صفتين فقط. اما معامل التوافق فيستخدم في حالة كون للظاهرتين ثلاث صفات او اكثر.

اولا– معامل الاقتران: اذا كان لدينا متغيرين X و Y بحيث يأخذ المتغير X الصفتين X_1 و X_2 ويأخذ المتغير Y الصفتين Y_1و Y_2. لقياس قوة العلاقة بين المتغيرين نكون جدول يسمى "جدول الاقتران للصفات المشتركة بين المتغيرين X و Y " . يظهر هذا الجدول باستعمال الرموز تكرارات الصفات المختلفة كمايلي:

الجدول 12: جدول الاقتران للصفات المشتركة بين المتغيرين X و Y

X_2	X_1	X / Y
B	**A**	Y_1
D	**C**	Y_2

يتم حساب معامل الاقتران من الجدول السابق وفق الصيغة التالية:

$$Ass.Coef. = \frac{AD - CB}{AD + CB}$$

مثال 28: لدراسة العلاقة بين العمل X والزواج Y اخذت عينة عشوائية من 25 شخص ودونت النتائج في الجدول التالي:

X العمل / Y الزواج	يعمل	لا يعمل
متزوج	**10**	**3**
غير متزوج	**5**	**7**

المطلوب: تحديد نوع وقوة العلاقة بين العمل X والزواج Y.

الحل:

$$Ass.Coef. = \frac{AD - CB}{AD + CB} = \frac{10 * 7 - 3 * 5}{10 * 7 + 3 * 5} = 0.65$$

أي ان العلاقة بين العمل والزواج طردية متوسطة القوة.

ثانيا– معامل التوافق: يتم حساب معامل التوافق وفق الصيغة التالية:

$$Con.Coef. = \sqrt{\frac{B - 1}{B}}$$

وتحسب B من جدول الاقتران الموسع كالتالي:

الجدول 13: جدول الاقتران الموسع للصفات المشتركة بين المتغيرين X و Y

Y / X		صفات المتغير Y				المجموع
		Y_1	Y_2	…	Y_S	
صفات المتغير X	X_1	f_{11}	f_{12}	…	f_{1s}	$\sum_{j=1}^{S} f_{1j}$
	X_2	f_{21}	f_{22}	…	f_{2s}	$\sum_{j=1}^{S} f_{2j}$
	…	…	…	…	…	…
	X_r	f_{r1}	f_{r2}	…	f_{rs}	$\sum_{j=1}^{S} f_{rj}$
المجموع		$\sum_{i=1}^{r} f_{i1}$	$\sum_{i=1}^{r} f_{i2}$	…	$\sum_{i=1}^{r} f_{iS}$	$\sum f_{ij}$

ويتم حساب B من الجدول وفق الصيغة التالية:

$$B = \frac{f_{11}^2}{\sum f_{i1} \sum f_{1j}} + \frac{f_{12}^2}{\sum f_{i2} \sum f_{1j}} + \cdots + \frac{f_{rs}^2}{\sum f_{is} \sum f_{rj}}$$

مثال 29: لدراسة العلاقة بين المستوى التعليمي والمهارة في العمل اعطيت لنا في الجدول اللاحق معطيات 40 عامل في احد المصانع. والمطلوب تحديد نوع وقوة العلاقة بين هذين المتغيرين.

المستوى التعليمي / المهارة في العمل	ابتدائي	ثانوي	جامعي	المجموع
غير ماهر	**9**	**5**	**1**	**15**
نصف ماهر	**6**	**2**	**2**	**10**
ماهر	**1**	**5**	**9**	**15**
المجموع	**16**	**12**	**12**	**40**

الحل: نقوم اولا بحساب B من الجدول وفق الصيغة التالية:

$$B = \frac{9^2}{16*15} + \frac{5^2}{12*15} + \frac{1^2}{12*15} + \frac{6^2}{16*10} + \frac{2^2}{12*10} + \frac{2^2}{12*10} + \frac{1^2}{16*15} + \frac{5^2}{12*15} + \frac{9^2}{12*15} = 1.37$$

$$Con.Coef. = \sqrt{\frac{B-1}{B}} = \sqrt{\frac{1.37-1}{1.37}} = 0.52$$

معامل التوافق يشير الى ان العلاقة بين المستوى التعليمي والمهارة في العمل علاقة طردية متوسطة القوة.

4.1 اختبار الفرضيات المتعلقة بالارتباط

يعتبر معامل الارتباط المحسوب من العينة تقديرا لمعامل ارتباط المجتمع بين X و Y والذي يرمز له برو ρ ويعطى بالعلاقة التالية:

$$\rho = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

حيث $E(XY)$ هو توقع XY، σ_X هو الانحراف المعياري للمتغير **X**، σ_Y هو الانحراف المعياري للمتغير**Y**.

اولا – في العينات الصغيرة: اذا اردنا ان نختبر ان X و Y مستقلان أي انه لا يوجد ارتباط بينهما، في حالة كونهما خاضعان للتوزيع الطبيعي، فان الفرضية الصفرية تكون من الشكل: $H_0 : \rho = 0$. ولاختبار هذه الفرضية فاننا نستخدم احصائية الاختبار t والتي تتبع توزيع t بدرجة حرية $(n-2)$ ونرفض H_0 او نقبلها بناء على مقارنة قيمة احصائية الاختبار t المحسوبة بالقيمة الجدولية وفق صياغة الفرضية البديلة كما سبق شرحه في الفصل السابق. وإحصائية الاختبار t تحسب كما يلي:

$$t = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$$

مثال 30: نريد اختبار معنوية الارتباط بين X و Y في مجتمع الدراسة لمثال معامل ارتباط الرتب لسبيرمان عندما تصاغ الفرضية الصفرية والبديلة بالشكل: $H_0 : \rho = 0$ مقابل الفرضية البديلة $H_1 : \rho > 0$ عند مستوى معنوية $\alpha=0.05$.

الحل:

- نحدد قيمة t الجدولية من جدول توزيع t بدرجة حرية (6) و مستوى معنوية $\alpha=0.05$ فنتحصل على:

$$t_\alpha = t_{0.05} = [0.95; 6] = 1.943$$

- نحسب قيمة احصائية الاختبار من المعادلة:

$$t = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} = \frac{0.988\sqrt{6}}{\sqrt{1-0.988^2}} = \frac{2.42}{0.1544} = 15.67$$

- في حالة الفرضية البديلة $H_1 : \rho > 0$ نرفض الفرضية الصفرية اذا كانت $t_{cal.} > t_{\alpha}$ بالمقارنة نجد: $T_{cal.} > 1.943$ اذن نرفض الفرضية الصفرية أي انه يوجد ارتباط طردي بين معدلات مادتي الاحصاء والرياضيات في المجتمع وهو دال احصائيا.

ثانيا– في العينات الكبيرة: اذا اردنا ان نختبر الفرضية الصفرية: $H_0 : \rho = \rho_0$. حيث ρ_0 عدد معلوم بناء على عينة كبيرة الحجم، فإننا نستخدم احصائية الاختبار Z والتي تتبع تقريبا التوزيع الطبيعي المعياري عندما تكون n كبيرة. ونرفض H_0 او نقبلها بناء على مقارنة قيمة احصائية الاختبار Z المحسوبة، بالقيمة الجدولية وفق صياغة الفرضية البديلة كما سبق شرحه في الفصل السابق. وإحصائية الاختبار Z تحسب كما يلي:

$$Z = \frac{\sqrt{n-3}}{2} \ln \frac{(1+r)(1-\rho_0)}{(1-r)(1+\rho_0)}$$

حيث $\ln$ تمثل اللوغاريتم الطبيعي للمقدار المعطى في المعادلة.

مثال 31: لدينا عينة حجمها $n=38$ ومعامل ارتباطها $r=0.9912$. اختبر الفرضية الصفرية: $H_0 : \rho = 0.8$ مقابل الفرضية البديلة $H_1 : \rho > 0.8$ عند مستوى معنوية $\alpha=0.05$.

الحل:

- نحدد قيمة Z الجدولية من جدول التوزيع الطبيعي المعياري عند مستوى معنوية $\alpha=0.05$: عندما تكون الفرضية البديلة $H_1 : \rho > 0.8$ هذا يعني ان الاختبار في اتجاه واحد والقيمة الحرجة هي: $Z_{\alpha}=Z_{0.05}=1.65$

- نحسب قيمة احصائية الاختبار من المعادلة:

$$Z = \frac{\sqrt{n-3}}{2} \ln \frac{(1+r)(1-\rho_0)}{(1-r)(1+\rho_0)} = 2.96 \ln \frac{0.4}{0.016} = 9.53$$

- في حالة الفرضية البديلة $H_1 : \rho > 0.8$ نرفض الفرضية الصفرية اذا كانت $Z_{cal.} > Z_{\alpha}$ بالمقارنة نجد: $Z_{cal.} = 9.53 > Z\alpha = 1.65$ اذن نرفض H_0 ونقبل ان معامل الارتباط في المجتمع اكبر من 0.8 وهو دال احصائيا.

2. دراسة الانحدار البسيط

نموذج الانحدار الخطي البسيط هو نموذج يقوم بتحديد اثر متغير كمي مستقل على متغير كمي تابع وهذا بتقدير العلاقة بينهما. وتصاغ العلاقة الخطية بين المتغيرين على شكل معادلة رياضية تسمى معادلة خط الانحدار

والتي تمثل افضل خط مستقيم يعبر عن معطيات متغيرين X و Y. ويستفاد من معادلة خط الانحدار في التنبؤ بقيمة المتغير التابع عند قيمة معينة للمتغير المستقل.

1.2 معادلة نموذج خط الانحدار: ويعبر عن نموذج خط الانحدار بالمعادلة التالية:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \qquad i = 1 \dots \dots n$$

حيث: x يمثل المتغير المستقل وy يمثل المتغير التابع وε يمثل الخطأ[5] في تفسير y ويتبع التوزيع الطبيعي بوسط قدره صفر وتباين σ^2، ويمكن كتابته انطلاقا من العلاقة: $\varepsilon_i = y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i$ ويتم حساب هذه المعادلة باستعمال طريقة المربعات الصغرى OLS وهذا لتقدير معالم النموذج أي لتقدير قيمة كل من:

- ثابت الانحدار β_0 والتي تمثل قيمة المتغير التابع y عندما ينعدم المتغير المستقل x.
- وميل خط الانحدار β_1 او معامل انحدار المتغير التابع y على المتغير المستقل x يمثل التغير في قيمة y عندما يتغير x بوحدة واحدة.

وتعتمد طريقة المربعات الصغرى على ايجاد قيم β_0 و β_1 التي تجعل مجموع مربعات الاخطاء المعيارية اصغر ما يمكن، وهذا ما يمكن كتابته رياضيا كمايلي: $Min\sum_{i=1}^{n}\hat{\varepsilon}_i^2 = \underset{\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_1}{Min}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i\right)^2$

ونتحصل على قيم β_0 و β_1 المقدرة من المعادلات التالية:

$$\hat{\beta}_0 = \frac{\sum y_i - \beta_1 \sum x_i}{n} = \overline{Y} - \hat{\beta}_1 \overline{X}$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum (x_i - \overline{X})(y_i - \overline{Y})}{\sum (x_i - \overline{X})^2} = \frac{SS_{xy}}{SS_x}$$

فتصبح معادلة الانحدار المقدرة هي: $\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i$

2.2 جودة التوفيق والارتباط: ان إشارة معامل الانحدار β_1 تدل على نوع الارتباط بين المتغيرين X و Y (ارتباط طردي اذا كان $\beta_1>0$ و ارتباط عكسي اذا كان $\beta_1<0$) وهذا لوجود علاقة بين معامل ارتباط العينة r ومعامل الانحدار β_1 والتي يعبر عنها بالعلاقة التالية:

[5] يرجع هذا الخطأ إلى إهمال بعض المتغيرات المستقلة التي يمكن أن تؤثر على المتغير التابع في النموذج وحدوث خطأ في كل من تجميع المعطيات وقياس المتغيرات او إلى الصياغة الرياضية غير السليمة للنموذج.

$$r = \hat{\beta}_1 \sqrt{\frac{SS_x}{SS_y}}$$

كما يسمح معامل الانحدار β_1 بحساب معامل التحديد[6] R^2، والذي يفسر حجم التغيرات التي تحصل في المتغير التابع y الناتجة عن التغيرات التي تحصل في المتغير المستقل x. فهو إذن مقياس للقدرة التفسيرية للنموذج أي يختبر جودة التوفيق و الارتباط.وذلك وفق الصياغة التالية:

$$R^2 = r^2 = \hat{\beta}_1^2 \frac{\sum(x_i - \overline{X})^2}{\sum(y_i - \overline{Y})^2}$$

ويعتبر ^{2} من أهم المعاملات التي تقيس علاقة الارتباط بين متغيرين ووجود مثل هذه العلاقة يعني ضمنيا أن أحد هذين المتغيرين يعتمد في تغيره أو في حدوثه على المتغير الآخر. معامل التحديد معرف وينتمي إلى المجال التالي:

$$0 \leq R^2 \leq 1$$

اذا كانت قيمة معامل الارتباط r=0.9 فان R^2=0.81 هذا يعني ان استخدام اسلوب خط الانحدار يقلل الخطأ في التقدير بمقدار 81% وهذا يبرر استخدام خط الانحدار ولهذا فان قيمة R^2 تحدد فعالية خط الانحدار للتنبؤ بقيم y بدلا من $\overline{Y}$. فاذا كانت قيمة معامل الارتباط r=0.1 فان R^2=0.01 هذا يعني ان استخدام اسلوب خط الانحدار يقلل الخطأ في التقدير بمقدار 1% فقط وبالتالي لا جدوى من استخدام خط الانحدار للتنبؤ بقيم y.

مثال 32: المعطيات التالية تمثل مستويات الدخل اليومي i والاستهلاك اليومي y_i لعشرة اسر.

Yi	8	9	10	12	13	14	15	17	18	19
Xi	11	12	14	10	17	11	16	20	20	19

المطلوب: 1- اوجد معادلة الانحدار بين المتغير المستقل Xi والمتغير التابع Yi.

2- قدر مستوى الاستهلاك اليومي لأسرة دخلها اليومي 25 وحدة نقدية.

[6] بالنسبة لنموذج الانحدار الخطي البسيط يكون معامل التحديد هو نفسه مربع معامل الارتباط بين المتغيرين، أما بالنسبة لنموذج الانحدار المتعدد يصبح هذا التعريف غير صحيح. والفرق بين معامل التحديد R^2 ومعامل الارتباط r يكمن في السببية، حيث يقيس معامل الارتباط العلاقة بين متغيرين بغض النظر عن الدور الذي يلعبه كل متغير. أما معامل التحديد فيقيس أيضا الارتباط ولكن يأخذ بعين الاعتبار السببية حيث أن المتغير Xi هو الذي يشرح الظاهرة Yi.

الحل: نلخص العمليات الحسابية التي نحتاجها في حساب β_0 و β_1 في الجدول التالي:

$(y_i - \bar{y})^2$	$(x_i - \bar{X})^2$	$(x_i - \bar{X})(y_i - \bar{Y})$	$(x_i - \bar{X})$	$(y_i - \bar{Y})$	X_i	Y_i
30.25	16	22	-4	-5.5	11	8
20.25	9	13.5	-3	-4.5	12	9
12.25	1	3.5	-1	-3.5	14	10
2.25	25	7.5	-5	-1.5	10	12
0.25	4	-1	+2	-0.5	17	13
0.25	16	-2	-4	+0.5	11	14
2.25	1	1.5	+1	+1.5	16	15
12.25	25	17.5	+5	+3.5	20	17
20.25	25	22.5	+5	+4.5	20	18
30.25	16	22	+4	+5.5	19	19
118.25	**138**	**107**			**150**	**135**

$$\bar{X} = {}^{150}/_{10} = 15 \qquad \bar{Y} = {}^{135}/_{10} = 13.5$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum(x_i - \bar{X})(y_i - \bar{Y})}{\sum(x_i - \bar{X})^2} = \frac{107}{138} = 0.775$$

$$\hat{\beta}_0 = 13.5 - 0.775 * 15 = 1.875$$

$$r = \hat{\beta}_1 \sqrt{\frac{SS_x}{SS_y}} \quad \hat{\beta}_1 \sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{X})^2}{\sum(y_i-\bar{Y})^2}} = 0.775 \sqrt{\frac{138}{118.25}} = 0.837 \quad R^2 = 0.7$$

معادلة الانحدار المقدرة بين الدخل اليومي i والاستهلاك اليومي y_i هي:

$$\hat{y}_i = 1.875 + 0.775x_i \qquad R^2 = 0.7$$

وتفسر كمايلي: زيادة الدخل اليومي بوحدة واحدة يؤدي الى زيادة الاستهلاك بـ 0,775 وحدة او زيادة الدخل اليومي بعشرة وحدات يؤدي الى زيادة الاستهلاك بـ 7,75 وحدة. واستخدام اسلوب خط الانحدار في التنبؤ بقيم y يقلل الخطأ في التقدير بمقدار 70%.

3.2 اختبار الفرضيات حول ميل خط الانحدار β_1: الاختبار الشائع جدا حول اختبار فرضيات خط الانحدار هو اختبار الفرضية الصفرية H_0 والتي تقترح بأنه لا يوجد أثر على النموذج من قبل متغير مستقل ما. وتوضع هذه الفرضية عادة لإثبات عدم صحتها وعند رفضها نتوجه لتحديد دلالتها حتى نقبل النموذج. في نموذج الانحدار هناك اهمية خاصة لميل خط الانحدار β_1 والذي يعطي معدل تغير y بالنسبة لتغير x. فالهدف

من النموذج هو معرفة ما اذا كانت هناك علاقة خطية بين هذين المتغيرين ام لا، أي معرفة ما اذا كان β_1 معدوم. ولذلك نقوم باختبار الفرضية الصفرية التالية:

$H_0 : \beta_1 = 0$ مقابل الفرضية البديلة : $H_1 : \beta_1 \neq 0$.

ولاختبار هذه الفرضية فإننا نستخدم احصائية الاختبار t والتي تتبع توزيع t بدرجة حرية $(n-2)$ وإحصائية الاختبار t في هذه الحالة تحسب كما يلي:

$$t = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\sigma_{\hat{\beta}_1}} = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\frac{S}{\sqrt{SS_X}}}$$

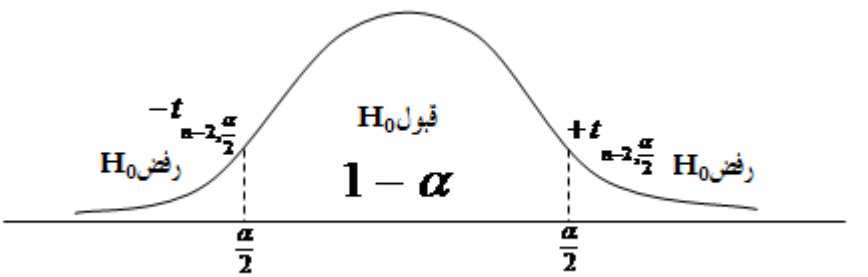
$\sigma_{\hat{\beta}_1}$ تمثل الخطأ المعياري للمتغير $\hat{\beta}_1$ وتحسب كمايلي: $\sigma_{\hat{\beta}_1} = \frac{S}{\sqrt{SS_X}}$، $SS_X = \sum(x_i - \overline{X})^2$ و $S^2 = \frac{SSE}{(n-2)}$

SSE تمثل مجموع مربعات الخطأ وتحسب كمايلي: $SSE = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2 = SS_y - \hat{\beta}_1 SS_{xy}$

إذا كانت الفرضية الصفرية هي $H_0 : \beta_1 = \beta_{1.0}$ حيث $\beta_{1.0}$ هي قيمة β_1 المعينة بالفرضية الصفرية، فان قيمة احصاءة الاختبار تصبح :

$$t = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_{1.0}}{\sqrt{\frac{S^2}{SS_X}}}$$

ونرفض H_0 او نقبلها بناء على موقع احصائية الاختبار t المحسوبة في مجال الرفض او مجال القبول والذي تحدده القيمة الحرجة او قيمة t الجدولية عند درجة حرية $(n-2)$ وهذا وفق صياغة الفرضية البديلة كما سبق شرحه في الفصل السابق وكما هو موضح في الشكل التالي.



الشكل 9: توزيع المعاينة لـ $\hat{\beta}_1$ ثنائي الاتجاه

$t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}$: القيمة الحرجة لتوزيع Student بدرجة حرية $n-2$ و نسبة معنوية $\alpha\%$ ونجد من جدول التوزيع القيمة المحسوبة.

مثال 33: اعتمادا على المعطيات التالية، اختبر ما اذا كانت $\beta_1 = 0$ ام لا عند مستوى معنوية $\alpha=0.05$.

52	34	75	28	47	57	64	21	46	39	Xi
75	56	98	73	89	92	82	52	78	65	Yi

الحل:

- نلخص العمليات الحسابية التي نحتاجها في حساب β_1 في الجدول التالي:

$(y_i-\overline{Y})^2$	$(x_i-\overline{X})^2$	$(x_i-\overline{X})(y_i-\overline{Y})$	$(x_i-\overline{X})$	$(y_i-\overline{Y})$	Yi	Xi
121	53,29	80,3	7,3-	-11	65	39
4	0,09	-0,6	0,3-	2	78	46
576	640,09	607,2	25,3-	-24	52	21
36	313,29	106,2	17,7	6	82	64
256	114,49	171,2	10,7	16	92	57
169	0,49	9,1	0,7	13	89	47
9	334,89	54,9	18,3-	-3	73	28
484	823,69	631,4	28,7	22	98	75
400	151,29	246	-12,3	-20	56	34
1	32,49	-5,7	5,7	-1	75	52
2056	**2464,1**	**1900**			**760**	**463**

$$\overline{X} = {}^{463}/_{10} = 46.3 \quad \overline{Y} = {}^{760}/_{10} = 76$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum(x_i-\overline{X})(y_i-\overline{Y})}{\sum(x_i-\overline{X})^2} = \frac{1900}{2464.1} = 0.771 \qquad \text{SSE}=SS_y - \hat{\beta}_1 SS_{xy} = 2056 - 0.771 * 1900 = 591$$

$$S = \sqrt{\frac{SSE}{(n-2)}} = \sqrt{\frac{591}{8}} = 8.6 \quad SS_X = \sum(x_i - \overline{X})^2 = 2464.1$$

- نحدد قيمة t الجدولية من جدول توزيع t بدرجة حرية (8) و مستوى معنوية α=0.05 فنتحصل على:

$t_{\alpha/2} = t_{0.025} = 2.306$

- نحسب قيمة احصائية الاختبار من المعادلة:

$$t = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\frac{S}{\sqrt{SS_X}}} = \frac{0.771}{0.1732} = 4.45$$

- في حالة الفرضية البديلة $H_1 : \beta_1 \neq 0$ نرفض H_0 اذا كانت $t_{cal.} > t_{\alpha/2}$ او $t_{cal.} < -t_{\alpha/2}$ بالمقارنة نجد: $t_{cal.} > 2.306$ اذن نرفض الفرضية الصفرية أي انه يوجد علاقة خطية دالة احصائيا بين المتغيرين.

4.2 اختبار الفرضيات حول مقطع خط الانحدار β_0: توزيع β_0 هو توزيع طبيعي وسطه β_0 وتباينه $\sigma^2(\frac{1}{n} + \frac{\hat{X}^2}{SS_X})$ وعند اختبار الفرضيات حول β_0 فإننا نعتمد على احصائية الاختبار التالية:

$$r = \frac{\beta_0 - \beta_{0.0}}{s\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{SS_X}}}$$

حيث $\beta_{0.0}$ هي قيمة β_0 المعينة في الفرضية H_0 وهذه الاحصائية تتبع توزيع t بدرجة حرية $(n-2)$.

مثال 34: ينص قانون هوك على ان استطالة سلك معين تتناسب طرديا مع القوة المؤثرة عليه، بناء على هذا القانون فان خط الانحدار يمر بنقطة الاصل أي ان $\beta_0 = 0$ وعليه نريد اختبار الفرضية الصفرية التالية: $H_0 : \beta_0 = 0$ مقابل الفرضية البديلة : $H_1 : \beta_0 \neq 0$ عند مستوى معنوية α=0.05 للتجربة المدونة معطياتها في الجدول التالي:

القوة بالكغ Xi	30	40	50	60	70	80
مقدار استطالة السلك بالملم Yi	4.5	5.2	6.5	7.8	9.0	10.5

الحل:

- نلخص العمليات الحسابية التي نحتاجها في حساب β_0 في الجدول التالي:

Xi	Yi	$(x_i - \bar{X})(y_i - \bar{Y})$	$(x_i - \bar{X})$	$(y_i - \bar{Y})$	$(x_i - \bar{X})^2$	$(y_i - \bar{Y})^2$
30	4.5	-2,67	-25	66,75	625	7,1289
40	5.2	-1,97	-15	29,55	225	3,8809
50	6.5	-0,67	-5	3,35	25	0,4489
60	7.8	0,63	5	3,15	25	0,3969
70	9.0	1,83	15	27,45	225	3,3489
80	10.5	3,33	25	83,25	625	11,0889
330	**43**	**0,48**	**0**	**213,5**	**1750**	**26,2934**

$$\bar{X} = {}^{330}/_{6} = 55 \quad \bar{Y} = {}^{43}/_{6} = 7.17$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\Sigma(x_i - \bar{X})(y_i - \bar{Y})}{\Sigma(x_i - \bar{X})^2} = \frac{213.5}{1750} = 0.122$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1\bar{X} = 7.17 - 0.122 * 55 = 0.46$$

$$SSE = SS_y - \hat{\beta}_1 SS_{xy} = 26.3 - 0.122 * 213.5 = 0.253$$

$$S = \sqrt{\frac{SSE}{(n-2)}} = \sqrt{\frac{0.253}{4}} = 0.25 \quad SS_X = \Sigma(x_i - \bar{X})^2 = 1750 \quad \bar{X}^2 = 3025$$

- نحدد قيمة t الحرجة من جدول توزيع t بدرجة حرية (4) و مستوى معنوية α=0.05 فنتحصل على:

$t_{\alpha/2} = t_{0.025} = 2.776$

- نحسب قيمة احصائية الاختبار من المعادلة:

$$r = \frac{\beta_0 - \beta_{0.0}}{S\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{SS_X}}} = \frac{0.46-0}{0.25\sqrt{\frac{1}{6} + \frac{3025}{1750}}} = \frac{0.46}{0.25\sqrt{1.9}} = 1.7$$

- في حالة الفرضية البديلة $H_1 : \beta_0 \neq 0$ نرفض H_0 اذا كانت $\mathbf{r}_{cal.} > \mathbf{t}_{\alpha/2}$ او $\mathbf{r}_{cal.} < -\mathbf{t}_{\alpha/2}$ بالمقارنة نجد: $r_{cal.} < 2.776$ اذن نقبل الفرضية الصفرية أي ان $\beta_0 = 0$ هذا يعني ان خط الانحدار يمر بنقطة الاصل أي ان نتائج التجربة تؤيد قانون هوك.

3. دراسة الانحدار الخطي المتعدد

يهتم نموذج الانحدار المتعدد بدراسة وتحليل اثر مجموعة من المتغيرات الكمية المستقلة على متغير كمي تابع وهذا بتقدير العلاقة بينها، ويعد هذا النموذج من الأساليب الإحصائية المتقدمة في إيجاد علاقات سببية بين الظواهر موضوع البحث. ففي الواقع الاقتصادي، لا يمكن تفسير الظواهر بمتغير واحد و إنما تؤثر مجموعة من المتغيرات او العوامل في الظاهرة. والانحدار الخطي المتعدد يهدف للتعبير عن العلاقة بين الظاهرة المدروسة او المفَسرة والعوامل المفسِرة باستعمال معادلة رياضية تسمح بالتنبؤ بتغيرات المتغير التابع انطلاقا من عدة متغيرات مستقلة، وهذا من خلال دراسة انحدار المتغير التابع Y على المتغيرات المستقلة $X_1, X_2, \ldots X_K$. ويستخدم نموذج الانحدار الخطي المتعدد عند توفر الشروط التالية :

1. العلاقة بين المتغيرات المستقلة والمتغير التابع علاقة خطية.
2. المعطيات موزعة توزيعا طبيعيا للمتغيرات المستقلة والمتغير التابع.
3. يجب أن تكون معطيات المتغير التابع من المستوى الترتيبي على الأقل.
4. ان لا تقل العينة عن عشرة اضعاف عدد المتغيرات المستقلة.

1.3 معادلات النموذج: على افتراض وجود علاقة خطية بين متغير تابع Y_i وعدد من المتغيرات المستقلة المفسرة $X_1, X_2, \ldots X_K$ وحد عشوائي U_i، ويعبر عن هذه العلاقة بالنسبة لـ n من المشاهدات وk من المتغيرات المستقلة، فان المعادلة الخطية لنموذج الانحدار المتعدد يعبر عنها بالشكل التالي:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \cdots + \beta_k X_{ik} + U_i \qquad i = 1 \ldots n$$

حيث:

- Y_i تمثل المتغير التابع
- X_i تمثل المتغيرات المستقلة
- U_i تمثل الخطأ العشوائي في تفسير Y_i

- β_0 ثابت الانحدار والتي تمثل قيمة المتغير التابع Y_i عندما تنعدم المتغيرات المستقلة X_i
- β_1 معامل انحدار المتغير التابع Y_i على المتغير المستقل الاول X_1
- β_k معامل انحدار المتغير التابع Y_i على المتغير المستقل الاخير X_k

هذه المعادلة هي عبارة عن جملة معادلات يبلغ عدد مشاهداتها n $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ مشاهدة وتتضمن k+1 من المعالم المطلوب تقديرها $(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k)$ وبالتالي يتم التعبير عنها باستخدام المصفوفات بالشكل التالي:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ . \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{12} & \ldots & X_{1K} \\ 1 & X_{21} & X_{22} & \ldots & X_{2K} \\ . & . & . & \ldots & . \\ 1 & X_{n1} & X_{n2} & \ldots & X_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ . \\ B_K \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ . \\ U_n \end{bmatrix}$$

$$Y = X\beta + U \text{ اي:}$$

حيث:

$Y_{(nx1)}$: مصفوفة المتغير التابع.

$X_{(nx(k+1))}$: مصفوفة المتغيرات المستقلة.

$\beta_{((k+1)x1)}$: شعاع المعالم.

$U_{(nx1)}$: شعاع الأخطاء.

2.3 افتراضات النموذج: يعتمد نموذج الانحدار الخطي على مجموعة من الافتراضات يمكن إجمالها فيما يلي:

اولا– المتغيرات المُفَسِّرة المهملة في النموذج لها أثر متوسط معدوم $E(U_i) = 0$.

$$E(Ui) = E\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ . \\ U_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(U_1) \\ E(U_2) \\ . \\ E(U_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ 0 \end{bmatrix}$$

ثانيا– الخطأ العشوائي Ui يتبع التوزيع الطبيعي المتعدد بمتوسط 0 وتباين σ^2، وتباين العناصر العشوائية ثابت من مشاهدة لأخرى اما التباين المشترك بينها فيساوي صفر. ويعبر عن هذا الافتراض كمايلي:

$$\begin{cases} var(U_i) = \sigma^2, & i = 1 \ldots n \\ cov(U_i, U_j) = 0, & i \neq j \end{cases}$$

$$E(UU') = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & ..... & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & ..... & 0 \\ 0 & 0 & ..... & \sigma_n^2 \end{bmatrix} = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & ..... & 0 \\ 0 & 1 & ..... & 0 \\ 0 & 0 & ..... & 1 \end{bmatrix} = \sigma^2 In$$

حيث أن: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = ... = \sigma_n^2$

وتسمى المصفوفة العددية أعلاه بمصفوفة التباين والتباين المشترك لحد الخطأ U. حيث تشكل العناصر القطرية في المصفوفة تباين قيم U، بينما تبقى العناصر غير القطرية مساوية للصفر لانعدام التباين المشترك والترابط بين قيم U_i أي أن الأخطاء ليست مرتبطة ببعضها.

ثالثا- المصفوفة X غير عشوائية وثابتة: هذا يعني أن قيم المتغيرات المستقلة يمكن مراقبتها، وبالإضافة إلى ذلك نفترض X ثابتة لضمان بأن قيم المتغيرات المستقلة لا تتغير من حين لأخر أي:

$$cov(X, U) = E(\acute{X}U) = 0$$

رابعا- عدد المشاهدات n هو أكبر من عدد المتغيرات المفسرة k، وهي الحالة التي تلغي الارتباط الخطي بين المتغيرات المستقلة.[7]

3.3 تقدير معالم النموذج: في نموذج الانحدار المتعدد $Y = X\beta + U$ المعالم المجهولة والمراد تقديرها هي β و U ، اما المصفوفة X و الشعاع Y فتمثل معطيات النموذج. وبما انه يوجد خطا عشوائي في تقدير Y فإننا نقوم بتقدير β بشكل يجعل المتغير التابع المقدر $\hat{Y}$ أقرب ما يمكن للمتغير التابع الحقيقي Y. ولتقدير معلمات النموذج الخطي المتعدد يمكن استخدام عدة طرق، اهمها طريقة المربعات الصغرى والتي تسمح بإعطاء احسن معادلة خط انحدار. حيث تمتاز هذه الطريقة بعدم تحيزها وأنها تعطي اقل خطا ممكن (اقل تباين)، حيث تتصف بخاصية: (Blue :Best Linear Unbiased Estimate).

وتستخدم طريقة المربعات الصغرى لإيجاد تقدير للشعاع β الذي يجعل مجموع مربعات الخطأ بين القيمة المقدرة $\hat{Y}$ والقيمة الحقيقية Y اقل ما يمكن، أي تصغير القيمة $\sum e_i^2$ كمايلي:

$$e_i = Y_i - \hat{Y}_i$$

$$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_{i1} + \hat{\beta}_2 X_{i2} + \cdots + \hat{\beta}_k X_{ik} \quad i = 1 \ldots n$$

$$\hat{Y} = X\hat{\beta}$$

[7] هذه الفرضية ضرورية جدا لضمان أيجاد معكوس المصفوفة $(\acute{X}X)$، إذ أن انتفاء هذا الفرض يجعل رتبة المصفوفة (X) اقل من (k+1) وبالتالي فان رتبة $(\acute{X}X)$ التي تستخدم في الحصول على مقدرات OLS بدورها اقل من (k+1) ول يمكن أيجاد معكوسها بسبب ما يسمى بمشكل الارتباط الخطي المتعدد , وبالتالي لايمكن الحصول على مقدرات المربعات الصغرى العادية، OLS.

$$Min \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \text{Min} \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{Y}_i)^2 = Min(Y - \hat{Y})'(Y - \hat{Y}) = Min\, e'e$$

$$T(Y,X,\hat{\beta}) = (Y - \hat{Y})'(Y - \hat{Y}) = \hat{Y}'\hat{Y} - 2\hat{Y}'Y + Y'Y$$

$$= \hat{\beta}'X'X\hat{\beta} - 2\hat{\beta}'X'Y + Y'Y = \min_{\hat{\beta}} T(Y,X,\hat{\beta}) \qquad (1)$$

ولإيجاد قيمة $\hat{\beta}$ التي تجعل قيمة $\sum e_i^2$ اقل ما يمكن يجب ان يتحقق الشرطان التاليان:

الشرط الاول: هو شرط ضروري، ويتعلق بإيجاد المشتقة الجزئية الاولى للمعادلة (1) بالنسبة الى $\hat{\beta}$ وجعلها مساوية للصفر فنحصل على:

$$\frac{\partial T(Y,X,\hat{\beta})}{\partial \hat{\beta}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial T(Y,X,\hat{\beta})}{\partial \hat{\beta}_0} \\ \frac{\partial T(Y,X,\hat{\beta})}{\partial \hat{\beta}_1} \\ \frac{\partial T(Y,X,\hat{\beta})}{\partial \hat{\beta}_2} \\ \\ \frac{\partial T(Y,X,\hat{\beta})}{\partial \hat{\beta}_k} \end{pmatrix} = -2X'Y + 2X'X\hat{\beta} = 0$$

ومنه:

$$\hat{\beta} = X'Y(X'X)^{-1}$$

اذن $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$ هو تقدير β.

الشرط الثاني: هو التأكد من أن $\hat{\beta}$ المتحصل عليه هو قيمة دنيا لـ $T(Y,X,\hat{\beta})$، بحيث يجب ان تكون المشتقة الجزئية الثانية للمعادلة (1) بالنسبة الى $\hat{\beta}$ موجبة، فنحصل على:

$$\frac{\partial^2 \Gamma(Y,X,\hat{\beta})}{\partial \hat{\beta}' \partial \hat{\beta}} = (X'X) > 0$$

وهي مصفوفة موجبة معرفة ومنه فإن $\hat{\beta}$ هو نهاية صغرى.

نرمز بـ A للمصفوفة $(X'X)^{-1}X'$ ، حيث:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{\beta} = A.Y \quad \therefore \hat{\beta}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} Y_j \quad ,i = 1.....k$$

4.3 جودة التوفيق: لدراسة العلاقة الموجودة ما بين المتغير التابع Y وعدة متغيرات مستقلة مرة واحدة، نستعمل معامل التحديد المتعدد R^2. والذي يشير إلى النسبة التي يمكن تفسيرها من التغير الكلي في المتغير

التابع Y بدلالة المتغيرات المستقلة في المعادلة، ويستعمل كمقياس لجودة التوفيق في نموذج الانحدار المحتوي على k متغير مستقل ويمكن حسابه من العلاقة التالية:

- في حالة وجود الثابت $\beta_0 \neq 0$:

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{Y}_i - \overline{Y}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2}$$

- في حالة عدم وجود الثابت $\beta_0 = 0$:

$$R^2 = \frac{\hat{Y}'\hat{Y}}{Y'Y} = \frac{\hat{\beta}'X'X\hat{\beta}}{Y'Y} = \frac{\hat{\beta}'X'Y}{Y'Y}$$

وينتمي معامل التحديد المتعدد للمجال التالي: $0 \leq R^2 \leq 1$، حيث: $R^2=0$ يعني ان معادلة الانحدار لا تفسر أيا من التغير في Y و $R^2=1$ يعني ان كل النقاط تقع على خط الانحدار.

ولكن يعاب على استعمال R^2 كمقياس لجودة التوفيق انه غير حساس لعدد المتغيرات المستقلة والموجودة بالنموذج، فإضافة متغيرات مستقلة أخرى لمعادلة الانحدار لا يقلل من قيمته، بل يمكن أن تزيد من قيمته. كما ان تفسير واستعمال R^2 يصبح صعبا عندما يكون النموذج بدون الحد الثابت لأنه في هذه الحالة لا يكون محصورا بين 0 و1. كما ان هذا المعامل يعتمد على التغيرات الحاصلة في Y (المشروحة وغير المشروحة)، وبالتالي لا يأخذ بعين الاعتبار عدد درجات الحرية في أي مشكل إحصائي. ولهذا الغرض يتم استعمال معامل آخر يسمى معامل التحديد المصحح $\bar{R}^2$ لتقييم القوة التفسيرية لنموذج الانحدار الخطي المتعدد. ويسمى بالمصحح لأنه يأخذ بعين الاعتبار عدد المتغيرات المستقلة كما انه مشتق من R^2) . ويحسب $\bar{R}^2$ كمايلي:

$$\bar{R}^2 = 1 - (1 - R^2)\left(\frac{n-k-1}{n-1}\right)$$

n تمثل عدد المشاهدات و $k+1$ تمثل عدد المعالم المقدرة.

حيث:

- اذا كان $k>1$ فان $\bar{R}^2 \leq R^2$
- اذا كان $k=1$ فان $\bar{R}^2 = R^2$
- إذا كان حجم العينة n كبيرا فإن $\bar{R}^2 \approx R^2$ (قيمتهما تتقاربان)

- إذا كان حجم العينة n صغيرا وعدد المتغيرات المستقلة كبيرا فإن $\bar{R}^2 < R^2$ ويمكن أن يأخذ قيما سالبة، ويفسر كما لو ان قيمته تساوي الصفر.

5.3 اختبار الفرضيات حول معالم النموذج: بعد حساب معاملات معادلة الانحدار الخطي المتعدد يجب أن نبين هل أن هذه المعاملات مقبولة من الناحية الإحصائية أي معنوية احصائيا. ويعتمد اختبار معنوية معالم النموذج على الصياغة التالية لكل من الفرضية الصفرية والفرضية البديلة:

الفرضية الصفرية: $H_0 : \beta_j=0 \quad _{j=0,\dots,k}$

الفرضية البديلة: $H_1: \beta_j\neq0\quad _{j=0,\dots,k}$

ولاختبار هذه الفرضيات والحكم على معنوية معاملات الانحدار اي لتقييم معنوية تأثير المتغيرات المستقلة في المتغير التابع، نستخدم اختبار t. واحصائية الاختبار تتبع توزيع t بدرجة حرية $(n-k-1)$ وتحسب كما يلي:

$$t_{cal.} = \frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\sigma^2\sqrt{a_{jj}}} = \frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_j}} \sim t_{n-k-1}$$

حيث أن a_{jj} هو العنصر j الموجود بقطر المصفوفة AA' أي $(X'X)^{-1}$ علما ان $A = (X'X)^{-1}X'$.

وفي حالة الانحدار المتعدد حيث هناك $k+1$ معلم للتقدير و n عدد المشاهدات، فان :

$$\hat{\sigma}^2_{\hat{\beta}_j} = \frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{n-k-1} \Rightarrow \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_j} = \sqrt{\hat{\sigma}^2_{\hat{\beta}_j}} \quad _{j=0,1,\dots,k}$$

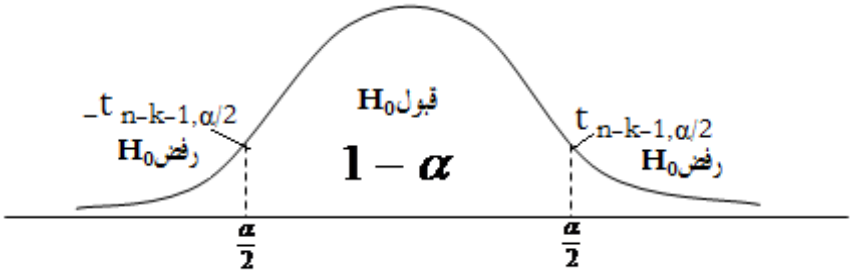
ويتم اتخاذ قرار قبول او رفض الفرضية الصفرية ومن ثم تقييم معنوية معلمات النموذج المقدر $\hat{\beta}_j$، بعد احتساب قيمة $t_{cal.}$ ومقارنتها مع قيمتها الجدولية. مع الاشارة الى ان تقييم المعنوية تكون لكل معامل على حدة. ويتخذ القرار في حالة اختبار الفرضية البديلة في اتجاهين $(H_1: \beta_j\neq0 \quad _{j=0,\dots,k})$ ، كما يلي:

- نقبل H_0 بمستوى معنوية α إذا كانت[8] $|t_{cal.}| \leq t_{n-k-1,\frac{\alpha}{2}}$، في هده الحالة المعلم β_j ليس له معنوية إحصائية أي يساوي معنويا الصفر.

- نرفض H_0 بمستوى معنوية α إذا كانت $|t_{cal.}| > t_{n-k-1,\frac{\alpha}{2}}$، في هده الحالة المعلم β_j له معنوية إحصائية أي يختلف معنويا عن الصفر.

في حالة العينة كبيرة $(n>30)$ فينبغي استعمال التوزيع الطبيعي و يمكن أخذ القيمة الحرجة $Z_{\alpha/2}$ وتحسب من جدول التوزيع الطبيعي المعياري.

[8] $t_{n-k-1,\frac{\alpha}{2}}$: القيمة الحرجة لتوزيع Student بدرجة حرية $n-k-1$ و نسبة معنوية α% نجد قيمتها في جدول توزيع t.



الشكل 10: توزيع المعاينة لـ $\hat{\beta}$ في الاختبار ثنائي الاتجاه

6.3 اختبار المعنوية الكلية للنموذج: يتم اختبار المعنوية الكلية للنموذج باستخدام نسبة التباين المفسر إلى التباين غير المفسر وهذا باستعمال توزيع فيشر F بدرجات حرية k و n-k-1، حيث n عدد المشاهدات و k+1 عدد المعالم المقدرة. وفرضيات هذا الاختبار هي:

الفرضية الصفرية: $H_0 : \beta_0 = \beta_1 = \ldots = \beta_j = \ldots = \beta_k = 0$

الفرضية البديلة: $H_1 : \exists \ \beta \neq 0$ [9]

واحصائية الاختبار F تحسب كما يلي:

$$F_{cal.} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2/k}{\sum_{i=1}^{n} e_i^2/(n-k-1)} = \frac{R^2/k}{(1-R^2)/(n-k-1)} \sim F_{\alpha}(k, n-k-1)$$

يكون للنموذج معنوية إحصائية، أي نقبل الفرضية H_1 القائلة بأن معالم النموذج ليست جميعها مساوية للصفر، إذا كانت[10] $F_{cal.} > F_{\alpha}(k, n-k-1)$. في هذه الحالة R^2 يختلف جوهريا عن الصفر.

مثال: لتفادي التعقيدات الحسابية اليدوية نلجأ للتطبيق مباشرة على برنامج SPSS.

4. التطبيق العملي باستخدام البرنامج الاحصائي SPSS

مثال تطبيقي 35: تمثل معطيات الجدول اللاحق كميات من سلعة معينة، سعرها، دخل المستهلك وسعر السلعة البديلة. وحسب النظرية الاقتصادية هناك علاقة بين الكمية المطلوبة من السلعة (Y) والمتغيرات التفسيرية المتمثلة في كل من: سعر السلعة (X_1)، الدخل (X_2) وسعر السلعة البديلة (X_3). نريد ان نتأكد من مدى مطابقة معطيات الجدول لمنطق النظرية الاقتصادية التي تنص على ان الكمية المطلوبة من سلعة معينة

[9] تقرأ: يوجد معامل يختلف عن الصفر

[10] $F_{\alpha}(k, n-k-1)$: القيمة الحرجة لتوزيع Fisher بدرجة حرية k و n-k-1 و نسبة معنوية α% نجد قيمتها في جدول توزيع F.

ترتبط بعلاقة عكسية مع سعرها وبعلاقة طردية مع دخل المستهلك وبعلاقة طردية مع سعر السلعة البديلة. وهذا من خلال مايلي:

1- دراسة علاقة الارتباط بين الكمية المطلوبة من السلعة وسعرها.

2- تحديد تأثير الدخل على الكمية المطلوبة من السلعة من خلال ايجاد معادلة خط الانحدار البسيط.

3- تحديد تأثير المتغيرات التفسيرية الثلاثة على الكمية المطلوبة من السلعة من خلال ايجاد معادلة خط الانحدار المتعدد.

الكمية Y	السعر X_1	الدخل X_2	سعر السلعة البديلة X_3
40	9	400	10
45	8	500	14
50	9	600	12
55	8	700	13
60	7	800	11
70	6	900	15
65	6	1000	16
65	8	1100	17
75	5	1200	22
75	5	1300	19
80	5	1400	20
100	3	1500	23
90	4	1600	18
95	3	1700	24
85	4	1800	21

لتقدير العلاقة والأثر بين المتغيرات نستخدم البرنامج الاحصائي SPSS حسب المراحل التالية:

اولا : نقوم بإدخال المعطيات في محرر معطيات SPSS.

ثانيا : نقوم بتسمية وترميز المتغيرات.

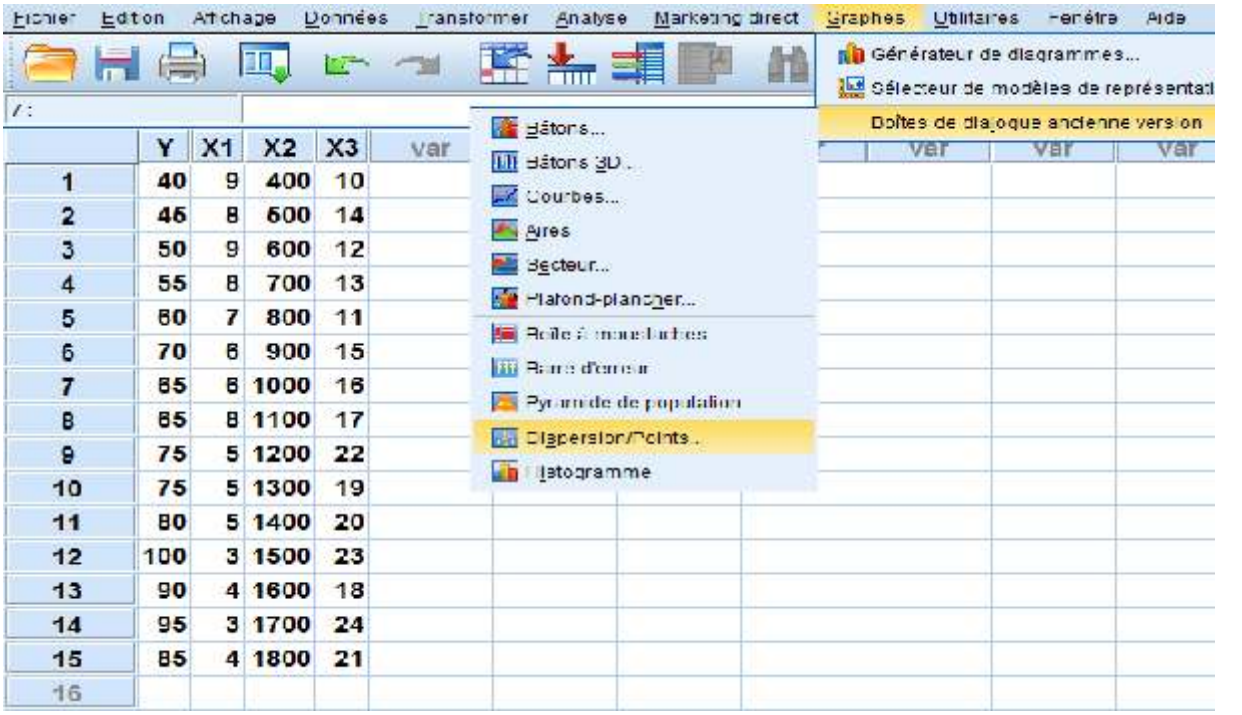
ثالثا: نذهب الى قائمة Analyze ونختار منها الامر المناسب وننفذه.

رابعا : نفسر ونحلل النتائج التي تظهر في شاشة المخرجات.

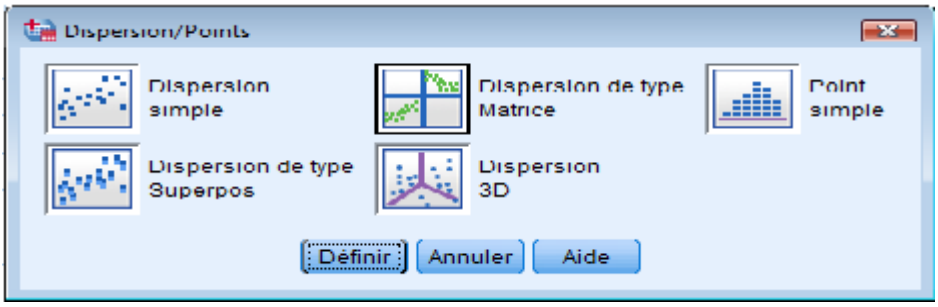
1.4 تحليل الارتباط: الغرض من دراسة علاقة الارتباط في هذا التمرين هو تحديد نوع وقوة العلاقة بين الكمية المطلوبة من السلعة وسعرها وهذا من خلال حساب معامل الارتباط للعينة ويرمز له في البرنامج بـ R. ويتحدد نوع وقوة العلاقة بين المتغيرين من خلال اشارة وقيمة معامل الارتباط.

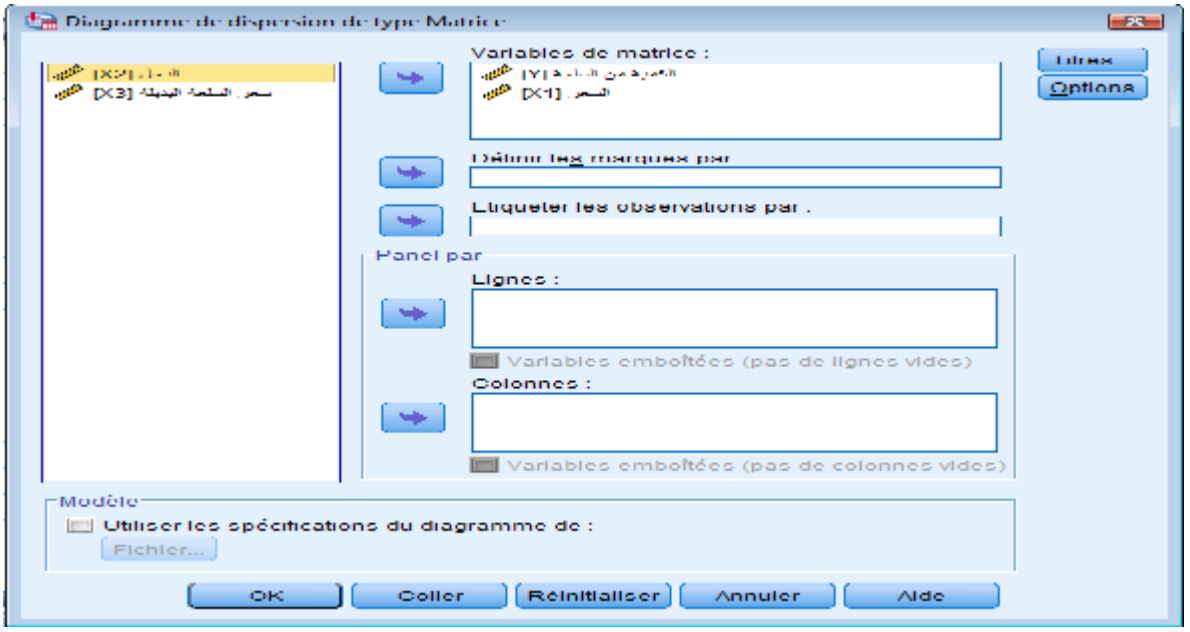
الا انه قبل حساب معامل الارتباط لابد من الفحص البياني للعلاقة بين المتغيرين للتأكد من كونها خطية او لا، وهذا من خلال رسم انتشار المعطيات. ولتنفيذ هذا الاجراء نتبع الخطوات التالية:

نختار من لائحة graphes الخيار Boites de dialogue ancienne version ثم ننقر على خيار Dispersion/points فيظهر مربع الحوار الخاص ونختار Dispersion de type matrice ثم ننقر على Définir فيظهر مربع الحوار الخاص وننقل المتغيرات التي نريد فحص ارتباطها الى مربع Variables de matrice ثم ننقر على OK.

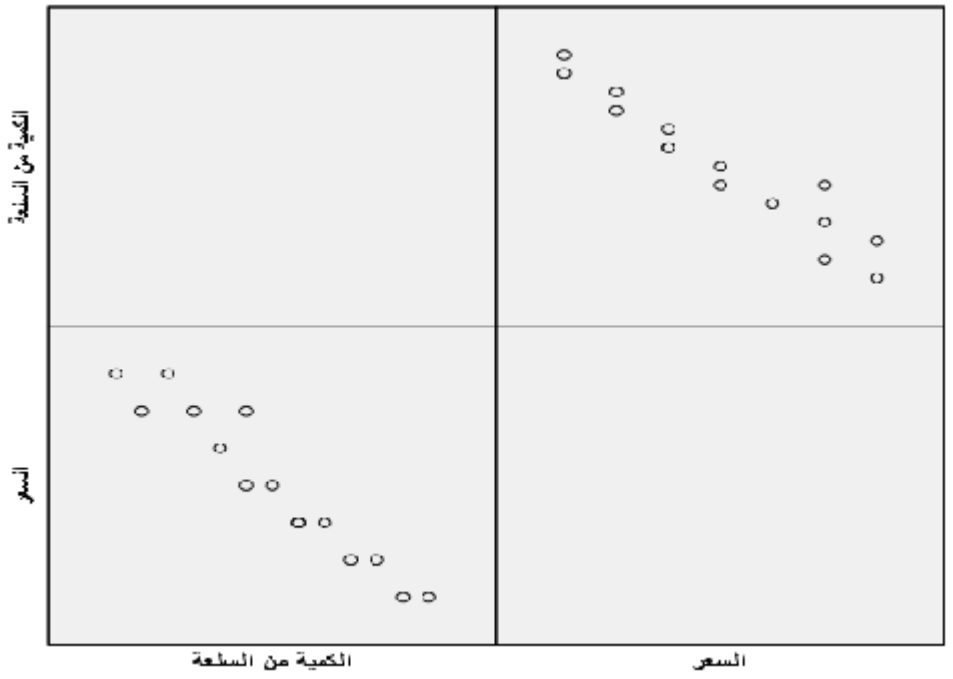


ومربع الحوار لرسم انتشار المعطيات يظهر بالشكل التالي:



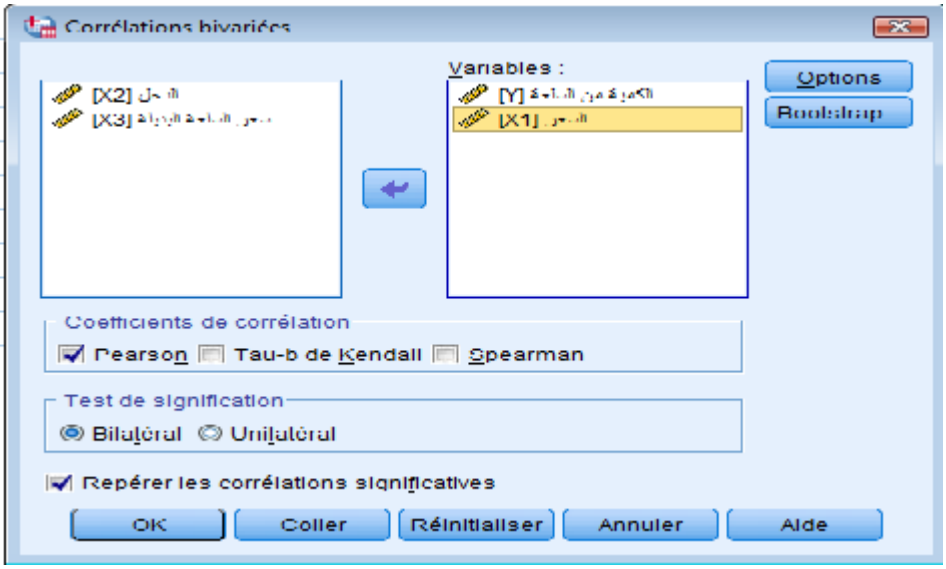


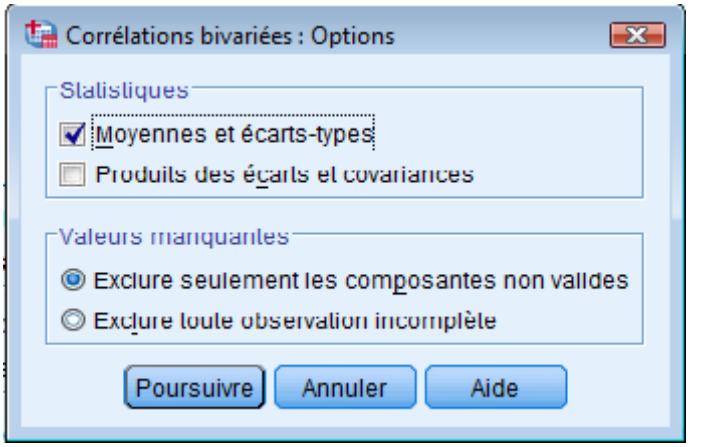
ويظهر رسم انتشار المعطيات كمايلي:



نلاحظ من الشكل ان العلاقة بين المتغيرين تأخذ شكل التوزيع الخطي العكسي لذا يمكننا التأكد من نوع العلاقة بين المتغيرين وقوتها من خلال حساب معامل الارتباط. ولحساب معامل الارتباط بين الكمية المطلوبة من السلعة وسعرها نستعمل معامل ارتباط Pearson لان المتغيرين كميين. ولتنفيذ هذا الاجراء نتبع الخطوات التالية:

نختار من لائحة Analyse الامر Corrélation ثم ننقر على خيار Bi variée فيظهر مربع الحوار الخاص وننقل المتغيرات المراد تحديد ارتباطها الى مربع Variables وهذا بالنقر على ثم ننقر على خيار Pearson من Coefficients de corrélation ثم ننقر على Repérer les corrélations significatives ثم ننقر على خيار Options ونختار Moyennes et écarts-types ثم ننقر على Poursuivre ثم OK.





وتظهر النتائج كمايلي:

Corrélations

Statistiques descriptives

	Moyenne	Ecart-type	N
السلعة من الكمية	70,00	18,127	15
السعر	6,00	2,070	15

Corrélations

		السلعة من الكمية	السعر
السلعة من الكمية	Corrélation de Pearson	1	-,961**
	Sig. (bilatérale)		,000
	N	15	15
السعر	Corrélation de Pearson	-,961**	1
	Sig. (bilatérale)	,000	
	N	15	15

**. La corrélation est significative au niveau 0.01 (bilatéral).

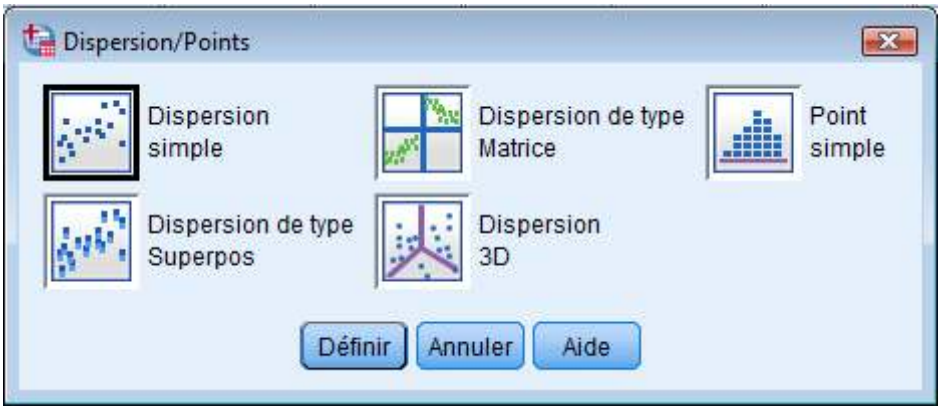
يظهر الجدول الاول المتوسط الحسابي والانحراف المعياري للمتغيرات وعدد المفردات. ويظهر الجدول الثاني معامل الارتباط بين المتغيرين والمقدر ب 0,961- وهو ارتباط عكسي قوي جدا بمستوى دلالة Sig. 0.000 وهو اقل من 0.01 أي هناك ارتباط عكسي قوي جدا بين الكمية المطلوبة من السلعة وسعرها. لاحظ ان قيمة معامل الارتباط متبوعة بنجمتين صغيرتين** والتي تدل على ان الاختبار معنوي عند مستوى دلالة α= 0.01.

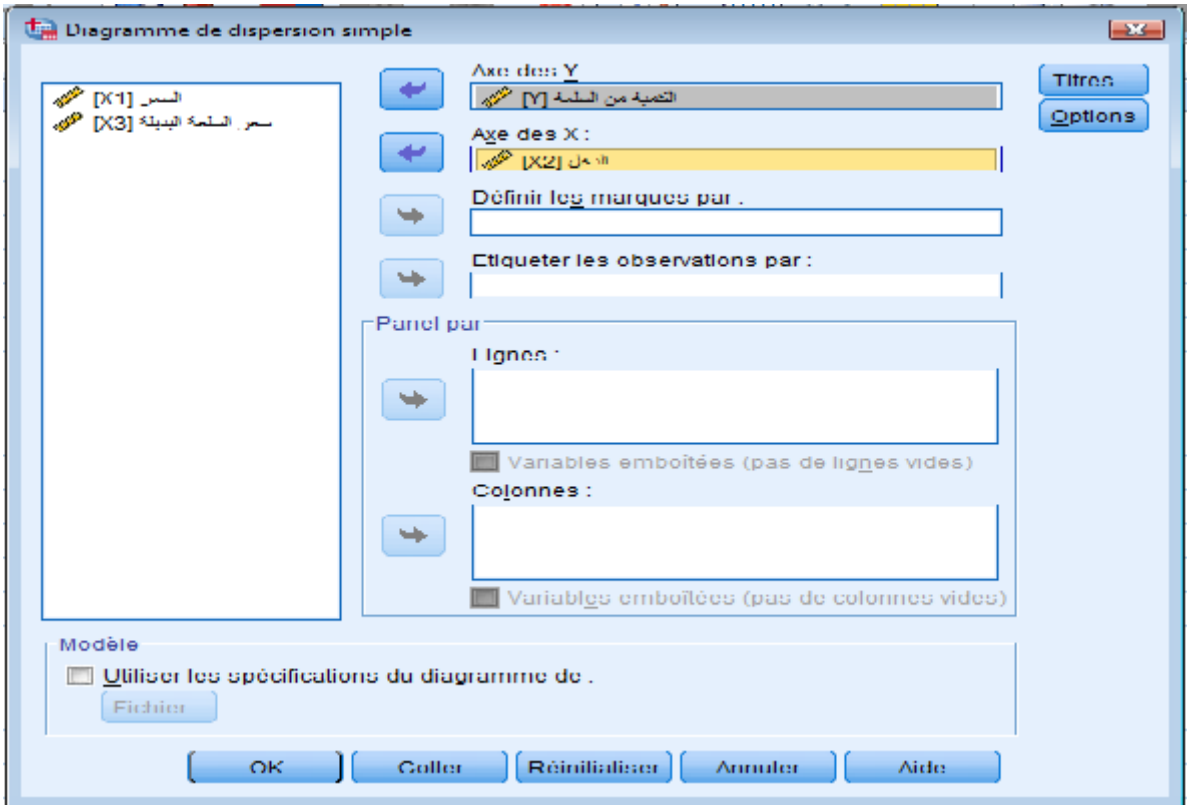
2.4 تحليل الانحدار الخطي البسيط: باستعمال نموذج الانحدار الخطي البسيط سنقوم بتحديد اثر متغير الدخل على الكمية المطلوبة من السلعة وهذا بتقدير العلاقة بينهما. وقبل تقدير معالم النموذج لابد من فحص العلاقة

بين المتغيرين بيانيا للتأكد من كونها خطية او لا وهذا من خلال رسم انتشار المعطيات. ولتنفيذ هذا الاجراء نتبع الخطوات التالية:

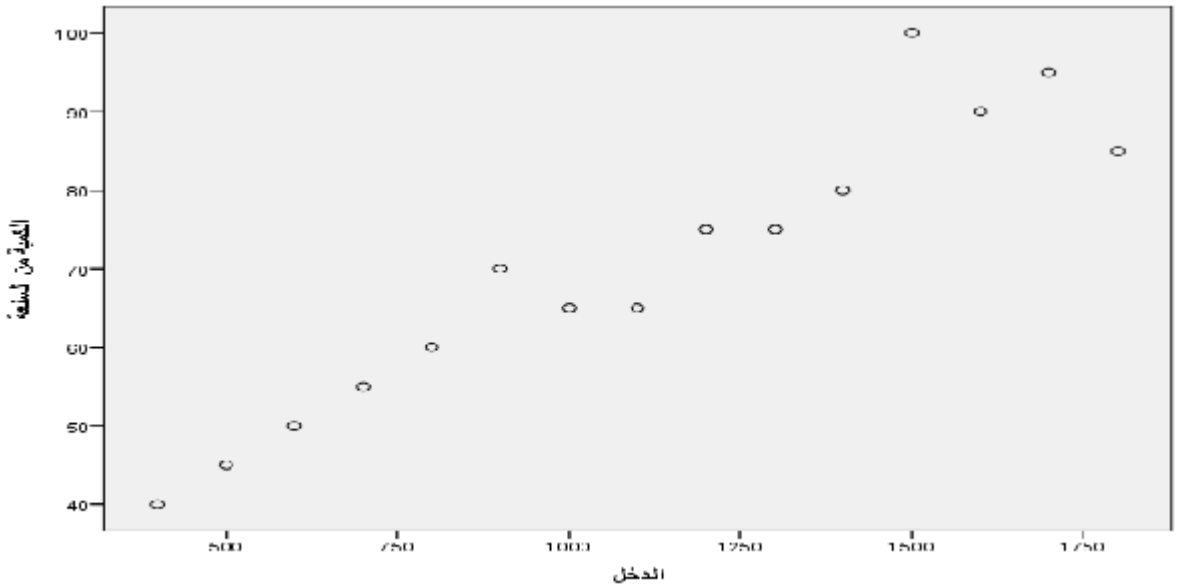
نختار من لائحة graphes الخيار Boites de dialogue ancienne version ثم ننقر على خيار Dispersion/points فيظهر مربع الحوار الخاص ونختار Dispersion simple ثم ننقر على Définir فيظهر مربع الحوار الخاص وننقل المتغير التابع الى Axe des Y والمتغير المستقل الى Axe des X ثم ننقر على OK.

ومربعات الحوار لرسم انتشار المعطيات تظهر بالشكل التالي:



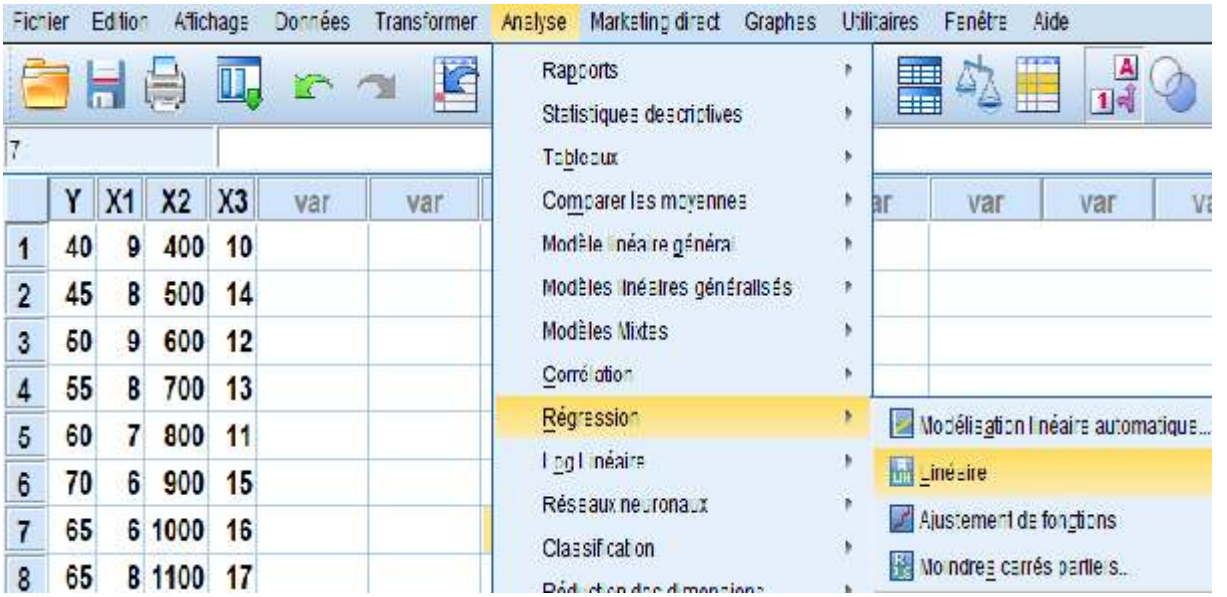


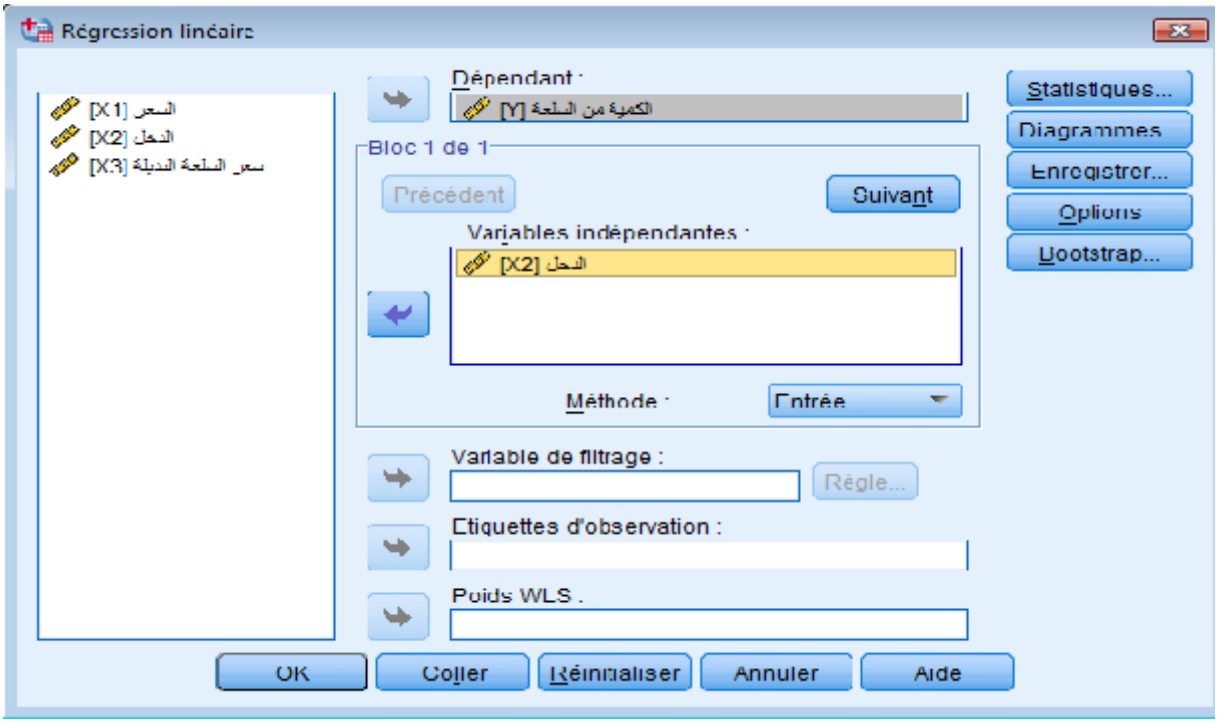
ويظهر رسم انتشار المعطيات كمايلي:

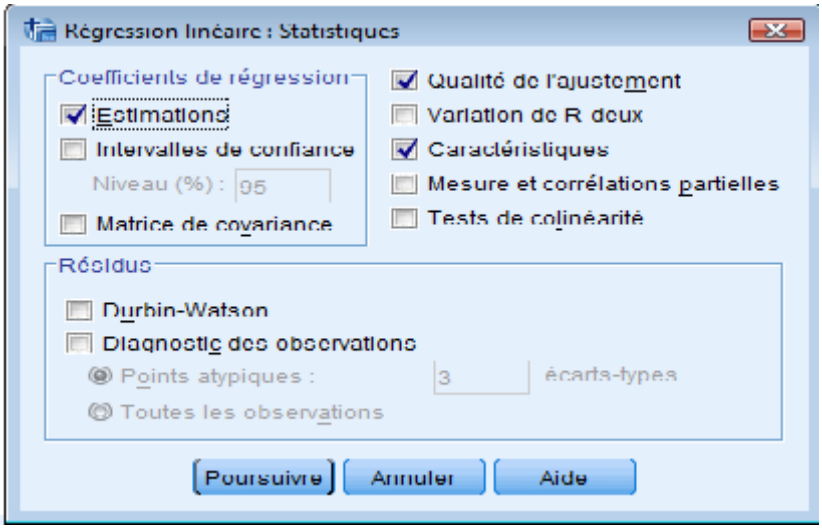


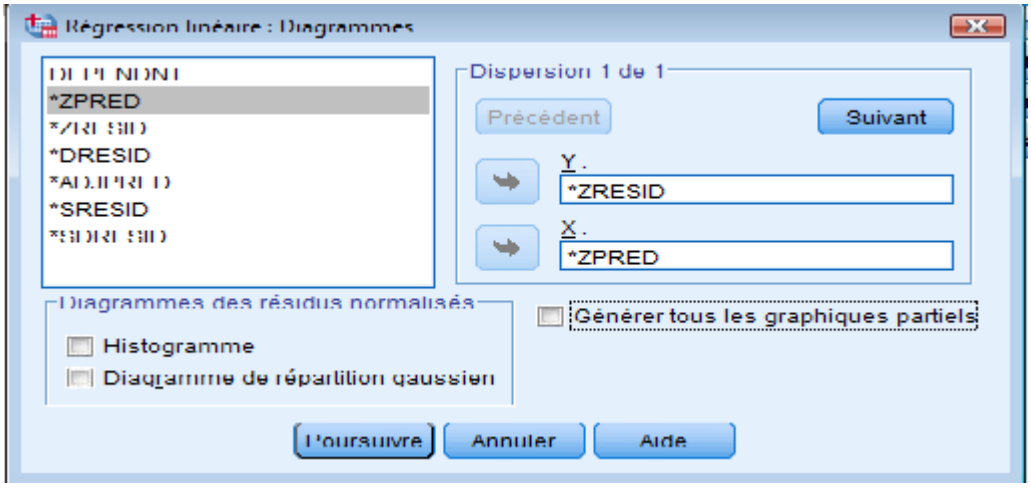
نلاحظ ان العلاقة بين المتغيرين تأخذ شكل التوزيع الخطي الطردي. لذلك يمكن تقدير معالم النموذج باستخدام الانحدار الخطي البسيط وهذا بإتباع الخطوات التالية:

نختار من لائحة Analyse الامر Régression ثم ننقر على خيار Linéaire فيظهر مربع الحوار الخاص وننقل المتغير التابع الى Dépendant والمتغير المستقل الى Variables indépendantes وهذا بالنقر على ثم ننقر على خيار Statistiques ونختار Estimations و Qualité de l'ajustement و Caractéristiques ثم ننقر على خيار Diagramme وننقل المتغير ZRESID* الى Y والمتغير ZPRED* الى X ثم ننقر على Poursuivre ثم OK.




Régression linéaire
[X1] السعر
[X2] الدخل
[X3] سعر السلعة البديلة
Dépendant :
[Y] الكمية من السلعة
Statistiques...
Diagrammes
Enregistrer...
Options
Bootstrap...
Bloc 1 de 1
Précédent
Suivant
Variables indépendantes :
[X2] الدخل
Méthode :
Entrée
Variable de filtrage :
Règle...
Etiquettes d'observation :
Poids WLS :
OK
Coller
Réinitialiser
Annuler
Aide


Régression linéaire : Statistiques
Coefficients de régression
Estimations
Intervalles de confiance
Niveau (%) : 95
Matrice de covariance
Qualité de l'ajustement
Variation de R deux
Caractéristiques
Mesure et corrélations partielles
Tests de colinéarité
Résidus
Durbin-Watson
Diagnostic des observations
Points atypiques : 3 écarts-types
Toutes les observations
Poursuivre
Annuler
Aide


Régression linéaire : Diagrammes
*ZPRED
*DRESID
*SRESID
Dispersion 1 de 1
Précédent
Suivant
Y :
*ZRESID
X :
*ZPRED
Diagrammes des résidus normalisés
Histogramme
Générer tous les graphiques partiels
Poursuivre
Annuler
Aide

وتظهر النتائج كمايلي:

Régression

Statistiques descriptives

	Moyenne	Ecart-type	N
السلعة من الكمية	70,00	18,127	15
الدخل	1100,00	447,214	15

Corrélations

		السلعة من الكمية	الدخل
Corrélation de Pearson	السلعة من الكمية	1,000	,947
	الدخل	,947	1,000
Sig. (unilatérale)	السلعة من الكمية	.	,000
	الدخل	,000	.
N	السلعة من الكمية	15	15
	الدخل	15	15

Récapitulatif des modèles[b]

Modèle	R	R-deux	R-deux ajusté	Erreur standard de l'estimation
1	,947[a]	,897	,889	6,030

a. Valeurs prédites : (constantes), الدخل

b. Variable dépendante : السلعة من الكمية

ANOVA[a]

Modèle		Somme des carrés	ddl	Moyenne des carrés	D	Sig.
1	Régression	4127,232	1	4127,232	113,489	,000[b]
	Résidu	472,768	13	36,367		
	Total	4600,000	14			

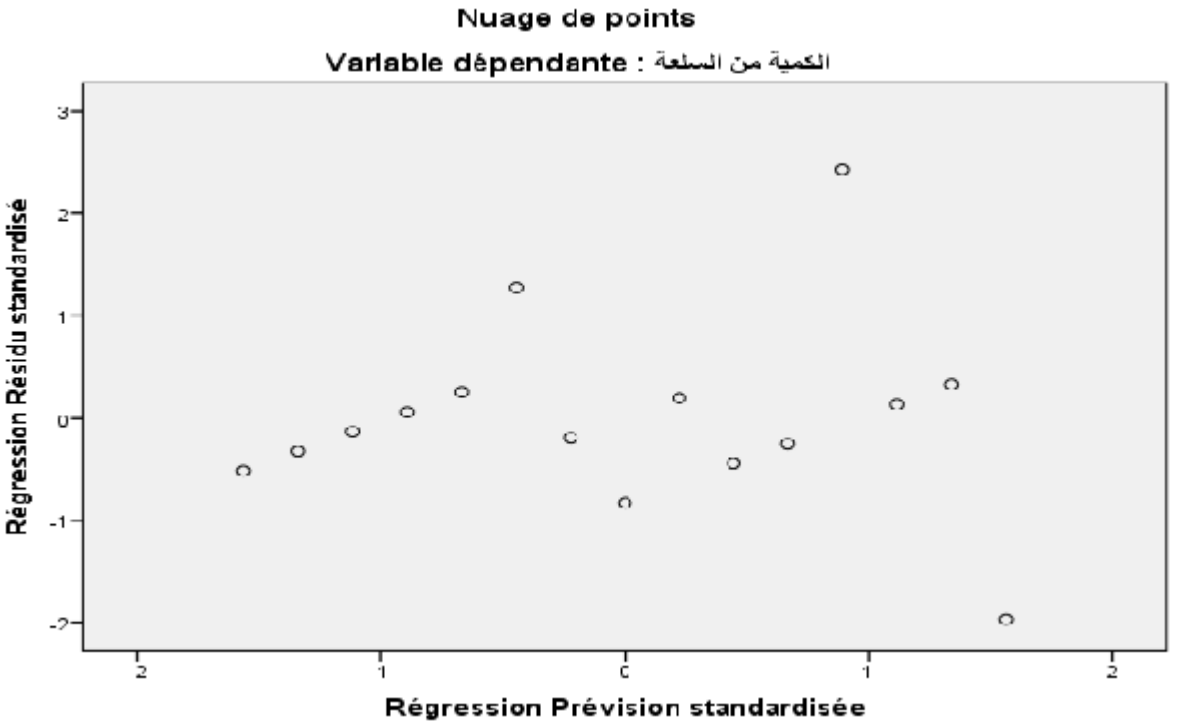
a. Variable dépendante : الكمية من السلعة

b. Valeurs prédites : (constantes), الدخل

Coefficients[a]

Modèle		Coefficients non standardisés		Coefficients standardisés	t	Sig.
		A	Erreur standard	Bêta		
1	(Constante)	27,768	4,259		6,520	,000
	الدخل	,038	,004	,947	10,653	,000

a. Variable dépendante : الكمية من السلعة



يظهر الجدول الاول المتوسط الحسابي والانحراف المعياري للمتغيرات وعدد المفردات. ويظهر الجدول الثاني معامل الارتباط R بين المتغيرين 0,947 وهو ارتباط طردي قوي بمستوى دلالة Sig. 0.000. في الجدول الثالث تظهر بالإضافة لمعامل الارتباط R، قيمة كل من: معامل التحديد R^2 ومعامل التحديد المصحح $\bar{R}^2$. تدل قيمة معامل التحديد على مقدار مساهمة المتغير المستقل في تفسير التغير في المتغير التابع. حيث نجد بالنسبة لنتائجنا ان الدخل يساهم في تفسير الطلب على السلعة بنسبة 90 % والباقي يتعلق بعوامل اخرى. أي ان النموذج يفسر 90% من الاختلافات في المتغير التابع. اما الجدول الثالث والمتعلق بتحليل التباين ANOVA فيعطي قيمة اختبار معنوية او دلالة القوة التفسيرية للنموذج ككل وهذا عن طريق الاحصائية D. ونلاحظ من جدول تحليل التباين ان قيمة الاختبار هي 113,489 بمستوى دلالة Sig 0.000، هذا يدل على ان معنوية الاختبار عالية وهي اقل من 0.05 أي ان لنموذج الانحدار الخطي البسيط قوة تفسيرية مرتفعة من الناحية الإحصائية. ويحتوي الجدول الاخير على تقديرات لمعالم النموذج باستعمال اختبار t والمبني على الفرضيتين $H_0 : \beta_1 = 0$ و $H_1 \ \beta_1 \neq 0$ ، $H_0 : \beta_0 = 0$ و $H_1 : \beta_0 \neq 0$. نتائج هذا الاختبار تعطي قيمة 27,768 لـ β_0 وقيمة الاختبار t هي 6,52 بمستوى دلالة Sig. 0.000 وبما انها اقل من α اي 0.05 فان قيمة t تقع في منطقة رفض الفرضية الصفرية أي ان معلمة النموذج دالة احصائيا ولا تساوي الصفر. و قيمة β_1 تساوي 0,038 وقيمة الاختبار t هي 10,653 بمستوى دلالة Sig. 0.000 وبما انها اقل من

0.05 فان قيمة t تقع في منطقة رفض الفرضية الصفرية أي ان معلمة النموذج دالة احصائيا وتختلف عن الصفر. وبالتالي تكتب معادلة الانحدار الخطي البسيط للدخل على الكمية المطلوبة من السلعة كمايلي:

y=27,768+0,038x

الكمية المطلوبة من السلعة= 27,768 + 0,038 الدخل

اما الشكل فيظهر شكل الانتشار بين القيم المتنبأ بها ZPRED* وأخطاء التقدير ZRESID* وهذا لاختبار شروط تحليل الانحدار. فإذا تحققت جميع الشروط سيكون الانتشار عشوائي اما اذا اتخذ شكلا محددا (U او او) فهذا دليل على عدم تحقق بعض الشروط ولا يمكن استخدام النموذج الخطي لتقدير النموذج.

3.4 تحليل الانحدار الخطي المتعدد: سنقوم من خلال هذا النموذج بتحديد اثر المتغيرات التفسيرية الثلاثة على الكمية المطلوبة من السلعة، وهذا بتقدير العلاقة بينها وبتقدير قيمة كل من : الثابت β_0 وقيمة معاملات المتغيرات المستقلة β_1، β_2، β_3. ونحكم على معنوية معاملات النموذج من خلال نتيجة اختبار t ومستوى الاحتمالية المقابل له والتي يستخرجها البرنامج بصفة تلقائية.

ويقدم البرنامج الاحصائي عدة طرق لإيجاد معادلة الانحدار والتي تختلف فيما بينها في طريقة التعامل مع المتغيرات المستقلة عند ادخالها في معادلة الانحدار. واهم هذه الطرق هي:

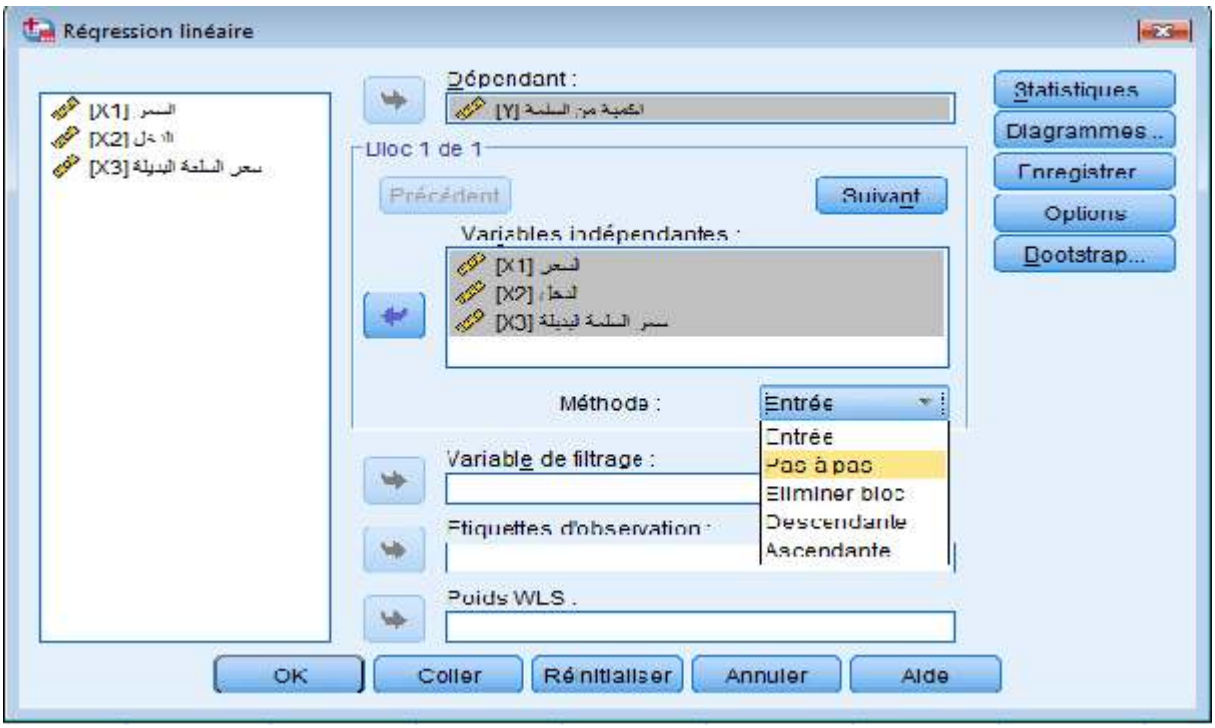
- طريقة الانحدار المعياري Entrée/Enter: هذه الطريقة تقوم بإدخال كل المتغيرات المستقلة الى معادلة الانحدار دفعة واحدة دون فحص أي المتغيرات لها اثر ذو دلالة احصائية على المتغير التابع.

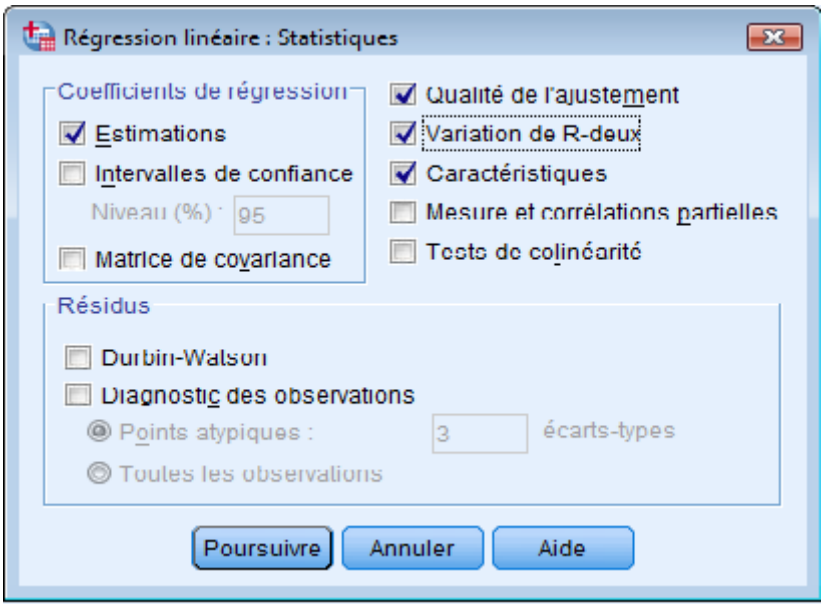
- طريقة الانحدار التدريجي Pas à pas/Stepwise: هذه الطريقة تقوم بإدخال المتغيرات المستقلة الى معادلة الانحدار على خطوات بحيث تستبعد المتغيرات المستقلة التي لا يكون ارتباطها مع المتغير التابع دال احصائيا. ويتم اختيار متغيرين في الخطوة الأولى لإدخالهم إلى المعادلة وإقرار إمكانية استبعادهما وحذفهما من المعادلة، وفي كل خطوة يتم ادخال متغيرين اثنين ويتم إتباع نفس الإجراءات. وهذه الطريقة تعتبر الافضل وهي الاكثر استخداما.

ولتقدير معالم النموذج ويجاد معادلة الانحدار الخطي المتعدد نتبع الخطوات التالية:

نختار من لائحة Analyse الامر Régression ثم ننقر على خيار Linéaire فيظهر مربع الحوار الخاص وننقل المتغير التابع الى Dépendant والمتغيرات المستقلة الى Variables indépendantes وهذا بالنقر على ثم نختار طريقة الانحدار ضمن خيار Méthode نختار طريقة Pas à pas ننقر على خيار Statistiques ونختار Estimations و Qualité de l'ajustement و Variation de R-deux و Caractéristiques ثم ننقر على Poursuivre ثم OK.

ومربعات الحوار الخاصة بالانحدار الخطي المتعدد تظهر كمايلي:





وتظهر النتائج باستخدام طريقة Pas à pas كمايلي:

Régression

Statistiques descriptives

	Moyenne	Ecart-type	N
الكمية من السلعة	70,00	18,127	15
السعر	6,00	2,070	15
الدخل	1100,00	447,214	15
سعر السلعة البديلة	17,00	4,472	15

Corrélations

		الكمية من السلعة	السعر	الدخل	سعر السلعة البديلة
Corrélation de Pearson	الكمية من السلعة	1,000	-,961	,947	,890
	السعر	-,961	1,000	-,918	-,887
	الدخل	,947	-,918	1,000	,886
	سعر السلعة البديلة	,890	-,887	,886	1,000
Sig. (unilatérale)	الكمية من السلعة	.	,000	,000	,000
	السعر	,000	.	,000	,000
	الدخل	,000	,000	.	,000
	سعر السلعة البديلة	,000	,000	,000	.
N	الكمية من السلعة	15	15	15	15
	السعر	15	15	15	15
	الدخل	15	15	15	15
	سعر السلعة البديلة	15	15	15	15

Variables introduites/supprimées[a]

Modèle	Variables introduites	Variables supprimées	Méthode
1	السعر	.	Pas à pas (critère : Probabilité de F pour introduire <= ,050, Probabilité de F pour éliminer >= ,100).
2	الدخل	.	Pas à pas (critère : Probabilité de F pour introduire <= ,050, Probabilité de F pour éliminer >= ,100).

a. Variable dépendante : الكمية من السلعة

Récapitulatif des modèles

Modèle	R	R-deux	R-deux ajusté	Erreur standard de l'estimation	Changement dans les statistiques				
					Variation de R-deux	Variation de F	ddl1	ddl2	Sig. Variation de F
1	,961[a]	,924	,918	5,186	,924	158,061	1	13	,000
2	,975[b]	,951	,942	4,350	,027	6,477	1	12	,026

a. Valeurs prédites : (constantes), السعر

b. Valeurs prédites : (constantes), الدخل, السعر

ANOVA[a]

Modèle		Somme des carrés	ddl	Moyenne des carrés	D	Sig.
1	Régression	4250,417	1	4250,417	158,061	,000[b]
	Résidu	349,583	13	26,891		
	Total	4600,000	14			
2	Régression	4372,963	2	2186,482	115,566	,000[c]
	Résidu	227,037	12	18,920		
	Total	4600,000	14			

a. Variable dépendante : السلعة من الكمية

b. Valeurs prédites : (constantes), السعر

c. Valeurs prédites :(constantes), الدخل ,السعر

Coefficients[a]

Modèle		Coefficients non standardisés		Coefficients standardisés	t	Sig.
		A	Erreur standard	Bêta		
1	(Constante)	120,500	4,234		28,460	,000
	السعر	-8,417	,669	-,961	-12,572	,000
2	(Constante)	82,275	15,433		5,331	,000
	السعر	-5,106	1,417	-,583	-3,604	,004
	الدخل	,017	,007	,412	2,545	,026

a. Variable dépendante : السلعة من الكمية

Variables exclues[a]

Modèle		Bêta dans	t	Sig.	Corrélation partielle	Statistiques de colinéarité
						Tolérance
1	الدخل	,412[b]	2,545	,026	,592	,157
	سعر السلعة البديلة	,174[b]	1,056	,312	,292	,213
2	سعر السلعة البديلة	,043[c]	,275	,789	,082	,181

a. Variable dépendante : الكمية من السلعة

b. Valeurs prédites dans le modèle : (constantes), السعر

c. Valeurs prédites dans le modèle : (constantes), الدخل ,السعر

قراءة مخرجات البرنامج الاحصائي تكون كمايلي:

- يظهر الجدول الاول المتوسط الحسابي والانحراف المعياري للمتغيرات وعدد مفردات العينة.

- يظهر الجدول الثاني مصفوفة معاملات الارتباط البسيط R بين المتغيرات المستقلة والمتغير التابع وأيها اكثر تأثيرا على المتغير التابع، وكذا الارتباطات الجزئية بين المتغيرات المستقلة.

- في الجدول الثالث تظهر المتغيرات المستقلة الدالة احصائيا التي ادخلت الى معادلة الانحدار والمتمثلة في كل من متغير السعر ومتغير الدخل، حيث يتبين ان البرنامج قام بإدخال المتغيرات المستقلة في معادلة الانحدار الخطي المتعدد على خطوتين.

- في الجدول الرابع تظهر قيمة معامل الارتباط R بين المتغير التابع والمتغيرات المستقلة التي دخلت معادلة الانحدار وقد بلغت قيمته 0,975 مما يدل على وجود ارتباط قوي بين كمية السلعة وسعرها ودخل الافراد.كما تظهر قيمة معامل التحديد R^2 و قيمة معامل التحديد الصحح $\bar{R}^2$، حيث تدل قيمة معامل التحديد المصحح على مقدار مساهمة المتغيرات المستقلة في التنبؤ بالمتغير التابع. حيث نجد بالنسبة لنتائجنا ان سعر السلعة ودخل الافراد يساهمان في تفسير الكمية المطلوبة من السلعة بنسبة 94 % أي ان النموذج يفسر

94% من الاختلافات في المتغير التابع والباقي 6% يعزى إلى عوامل اخرى. كما يظهر في نفس الجدول قيمة التغير في اختبار F لاختبار دلالة قيمة التغير في معامل التحديد ومستوى دلالته الاحصائية p=0.026.

- اما الجدول ANOVA فيعطي قيمة اختبار الدلالة الاحصائية الكلية لنموذج الانحدار، ففي مثالنا قيمة الاختبار هي 115,566 ومستوى الاحتمالية المقابل له أي مستوى الدلالة يساوي Sig. 0.000. وبما ان مستوى الدلالة اقل من α أي اقل من 0.05 فإننا نرفض الفرضية الصفرية القائلة بان كل معلمات النموذج تساوي الصفر ونقبل الفرضية البديلة القائلة بأنه يوجد على الاقل معلمة من معالم النموذج تختلف عن الصفر.

- ويحتوي الجدول ما قبل الاخير على تقديرات معالم النموذج باستعمال اختبار t. نتائج هذا الاختبار تعطي قيمة مقدرة 82,275 لـ β_0 بمستوى احتمالية Sig. 0.000 وبما انه اقل من α أي اقل من 0.05 نرفض الفرضية الصفرية أي ان المعلمة β_0 لا تساوي الصفر وهي دالة احصائيا. والقيمة المقدرة لـ β_2 تساوي 5,106- بمستوى احتمالية Sig. 0.004 وبما انه اقل من 0.05 نرفض الفرضية الصفرية أي ان المعلمة β_2 تختلف عن الصفر وهي دالة احصائيا. والقيمة المقدرة لـ β_3 تساوي 0,017 بمستوى احتمالية Sig. 0.026 وبما انه اقل من 0.05 نرفض الفرضية الصفرية أي ان المعلمة β_3 تختلف عن الصفر وهي دالة احصائيا. وبالتالي تكتب معادلة الانحدار للنموذج المقدر كمايلي:

$$\mathbf{y= 82,275 - 5,106x_1+0,017x_2}$$

أي ان:

الكمية المطلوبة من السلعة= 82,275 – 5,106 (السعر) + 0,017 (الدخل)

ونلاحظ بان العلاقة بين الكمية المطلوبة من السلعة وسعرها هي علاقة عكسية بينما العلاقة بين الكمية المطلوبة من السلعة ودخل الافراد هي علاقة طردية.

- اما الجدول الاخير فيظهر المتغيرات المستقلة التي لم تساهم كثيرا في تفسير تباين المتغير التابع وبالتالي لم تدخل في معادلة الانحدار، بحيث نلاحظ ان المتغير المستقل الثالث المتمثل في سعر السلعة البديلة له مستوى احتمالية 0,789 وهو اكبر من α وبالتالي نقبل الفرضية الصفرية أي ان المعلمة β_3 غير دالة احصائيا عند مستوى معنوية 0.05 وبالتالي يقصى هذا المتغير ولا يدخل في معادلة النموذج.

الفصل الخامس: التحليل العاملي

تعتبر الظواهر المدروسة محصلة لعدة عوامل، والتحليل العاملي هو اسلوب احصائي للتحليل متعدد المتغيرات. يستعمل لدراسة مجموعة من المتغيرات المختلفة من خلال ارجاعها الى اهم العوامل التي اثرت فيها، أي تحديد مدى تعلق المتغيرات المختلفة بظواهرها الرئيسية. فالتحليل العاملي يعمل على تجميع متغيرات ذات طبيعة واحدة في تركيبة متجانسة مرتبطة داخليا فيما بينها في تكوين يسمى "عامل"، بحيث يرتبط كل متغير من هذه المتغيرات بهذا العامل. هذه العوامل تتحدد من خلال الخصائص المشتركة بين المتغيرات وتفترض هذه الطريقة وجود علاقة خطية بين مجموعة المتغيرات وتستخدم في ذلك مصفوفة الارتباط بين المتغيرات او مصفوفة التباين. والهدف الاساسي من التحليل العاملي هو بناء الفروض التي تفسر العلاقات بين هذه المتغيرات.

1. مفهوم التحليل العاملي

التحليل العاملي هو عملية رياضية تستهدف تبسيط الارتباطات بين مختلف المتغيرات الداخلة في التحليل وصولا إلى العوامل المشتركة التي تصف العلاقة بين هذه المتغيرات وتفسيرها. فالتحليل العاملي يسعى لتلخيص المتغيرات المتعددة في عدد اقل وهذا بايجاد متغيرات جديدة تسمى بالعوامل بحيث يكون لكل عامل من هذه العوامل دالة تربطه ببعض او كل هذه المتغيرات . ويمكن من خلال هذه الدالة اعطاء تفسير لهذا العامل بحسب المتغيرات التي ترتبط معه بشكل قوي.

واسلوب التحليل العاملي يعتمد على حساب معاملات الارتباطات بين المتغيرات الاصلية للدراسة بحيث نحصل على مصفوفة الارتباطات بين هذه المتغيرات، ثم يتم تحليل هذه المصفوفة الارتباطية تحليلا عامليا للتوصل الى المكونات المشتركة بين المتغيرات الاصلية والتي ينتج عنها المتغيرات الجديدة او العوامل والتي تمكننا من التعبير عن أكبر قدر من التباين بين هذه المتغيرات باقل عدد ممكن من المحاور او العوامل.

1.1 اهداف التحليل العاملي وانواعه:

للتحليل العاملي هدفان هما:

- اولا تقليص العدد الكبير للمتغيرات الى عدد اقل من العوامل التي تفسر نسبة كبيرة من تباين المتغيرات الاصلية دون فقدان الكثير من المعلومات.
- ثانيا تحديد الابعاد الاساسية المستترة او الكامنة لسلسة من المتغيرات.

والتحليل العاملي نوعان: استكشافي و توكيدي.

- التحليل العاملي الاستكشافي L'Analyse Factorielle Exploratoire/Exploratory Factor Analysis: يستخدم عند دراسة الظواهر لأول مرة حيث تكون العلاقات بين المتغيرات والعوامل الكامنة غير معروفة. فيسمح هذا النوع من التحليل بكشف الابعاد التي تنطوي عليها مجموعة من المتغيرات المرتبطة ونتائج

هذا التحليل قد تكشف عن تكوينات فرضية او فرضيات تتطلب المزيد من البحث.كما يستخدم هذا التحليل في اختبار الفرضيات المتعلقة بوجود او عدم وجود علاقة بين المتغيرات والعوامل الكامنة.

- التحليل العاملي التوكيدي L'Analyse Factorielle Confirmatoire/Confirmatory Factor Analysis: يستخدم لتأكيد العلاقة بين المتغيرات والعوامل المكتشفة في دراسات سابقة وفي تقييم قدرة نموذج العوامل على التعبير عن مجموعة المعطيات الفعلية كما يستخدم لاختبار فرضيات حول وجود او عدم وجود هذه العلاقة في نماذج اخرى. وبالتالي فهذا النوع من التحليل يستخدم اساسا للتحقق من صحة الفرضيات.

2.1 مبدا التحليل العاملي: تهدف طريقة التحليل العاملي الى ايجاد مجموعة من العوامل التي تكون مسؤولة عن توليد الاختلافات في مجموعة مكونة من عدد كبير من المتغيرات او المعطيات المشاهدة. ويتم التعبير عن المتغيرات المشاهدة كتركيب خطي من العوامل الكامنة، وكل مجموعة من المتغيرات المشاهدة ترتبط بعامل واحد فقط بواسطة دالة. حيث ترتبط المتغيرات المشاهدة في العامل ارتباطا عاليا فيما بينها وضعيفا مع المتغيرات في العوامل الاخرى.

ويتم وضع توافيق خطية للمتغيرات على اساس العوامل التي تنتج عن حساب التباين في مجموعة المعطيات ككل ويشكل التوفيق االافضل للمكونات الاساسية الاولى العامل الاول. كما يتحدد العامل الثاني من خلال التوفيق الافضل للمكونات الاساسية الثانية لتغير التباين غير المحسوب في العامل الاول، وهكذا حيث يمكن ان يكون هناك عامل ثالث ورابع... الخ وتستمر العملية حتى تصبح جميع التباينات محسوبة فيتم ايقاف العملية بعد استخراج عدد معين من العوامل. ويمكن اعتبار العوامل كمتغيرات جديدة يجري عليها التحليل العاملي.

والدالة اوالعلاقة بين المتغيرات الأصلية المشاهدة $(X_1,X_2,\dots,X_n)$ والعوامل $(F_1,F_2,\dots,F_m)$ المكونة لها تكتب في شكل معادلات على النحو التالي:

$$F_1 = \alpha_{11}X_1 + \alpha_{12}X_2 + \cdots + \alpha_{1n}X_n$$
$$F_2 = \alpha_{21}X_1 + \alpha_{22}X_2 + \cdots + \alpha_{2n}X_n$$

$$F_m = \alpha_{m1}X_1 + \alpha_{m2}X_2 + \cdots + \alpha_{mn}X_n$$

اذا كان لدينا n من المتغيرات يكون لدينا $n(n-1)/2$ معامل ارتباط. ويؤدي التحليل العاملي للمصفوفة الارتباطية باية طريقة من الطرق العاملية الى استخلاص عوامل وهي عبارة عن محاور متعامدة تمثل تشبعات او تحميل المتغيرات المشاهدة على العامل.

والمعامل α_{ij} ($i=1,\dots,n$ و $j=1,\dots,m$) يعرف بمعامل تحميل او تشبع المتغير i على العامل j (Factor loading) كما يعبر عن مدى ارتباط العامل بالمتغير.

ويلاحظ أن مجموع مربعات درجات التشبع لكل عامل تسمى الجذر الكامن Eigen value. والجذر الكامن يسمح بقياس حجم التباين في المتغيرات التي تحسب على عامل واحد، كمثال الجذر الكامن للعامل الاول يساوي $\alpha_{11}^2+\alpha_{12}^2+\ldots+\alpha_{1n}^2$. كما ان مجموع الجذور الكامنة يعبر عن التباين الذي أمكن تفسيره من خلال هذه العوامل، وبنسبته إلى عدد المتغيرات نحصل على نسبة التباين العاملية لأنه يتم تحويل المشاهدات إلى قيم معيارية ويكون تباين كل متغير الواحد الصحيح.

وتعرف درجة شيوع المتغير او الاشتراكيات (Communality) بإسهامات هذا المتغير في جميع العوامل ويقاس بمجموع مربعات معاملات هذا المتغير في العوامل المختلفة، فمثلا تقاس درجة شيوع المتغير رقم (p) على النحو التالي:

$$C_p = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{pj}^2$$

كمثال درجة شيوع المتغير الاول تساوي $\alpha_{11}^2+\alpha_{21}^2+\ldots+\alpha_{m1}^2$. ومن خصائص درجة الشيوع انها موجبة تقع بين الصفر والواحد الصحيح. وتمثل مدى التداخل بين المتغيرات والعوامل المستخلصة:

- اذا كانت درجة الشيوع تقترب من 1 هذا يعني ان المتغير يتداخل كليا مع العوامل المستخلصة.
- اذا كانت درجة الشيوع مساوية للصفر هذا يعني ان العوامل المستخلصة لم تستطع تفسير أي جزء من تباين المتغير.
- اذا كانت درجة الشيوع بين الصفر والواحد هذا يعني ان المتغير يتداخل جزئيا مع العوامل المستخلصة.

ويمكن كتابة المعادلة السابقة على شكل مصفوفة تعرف بمصفوفة الارتباط. ولاستخلاص العوامل من المتغيرات يجب التقيد بمايلي:

1- العامل الأول F_1 هو اكثرها ارتباطا بالمتغيرات او اكثرها تفسيرا للتباين المشترك يليه العامل الثاني F_2 وهكذا.

2- يتضمن كل عامل عدد من المعاملات الصفرية.

3- أن يسهل تفسير هذه العوامل على ضوء علاقاتها بالمتغيرات.

3.1 خطوات التحليل العاملي: يتم التحليل العاملي للمتغيرات باتباع الخطوات التالية:

اولا- اختيار طريقة التحليل: يتم اختيار الطريقة المناسبة للتحليل العاملي للمتغيرات من بين الطرق التالية:

ا. طريقة التحليل بالمكونات الأساسية: تعتبر من اكثر طرق التحليل العاملي شيوعا واستخداما نظرا لدقة نتائجها بالمقارنة ببقية الطرق. فاستعمال هذه الطريقة يسمح بالحصول على تشبعات دقيقة، وكل عامل يستخرج أقصى كمية من التباين وباقل قدر ممكن من البواقي (اي ان مجموع مربعات تشبعات العامل تصل إلى

أقصى درجة بالنسبة لكل عامل)، كما أن المصفوفة الارتباطية تختزل إلى أقل عدد من العوامل المتعامدة غير المرتبطة.

ب. الطريقة القطرية: تعتبر من الطرق المباشرة والسهلة فى التحليل العاملي وتستخدم عند وجود عدد قليل من المتغيرات وتؤدى إلى استخلاص أكبر عدد ممكن من العوامل. ويتطلب استخدام هذه الطريقة معرفة مسبقة بقيم شيوع المتغيرات والا يتعذر استخدامها، وسميت هذه الطريقة بالقطرية نظرا لكونها تقوم على استخدام القيم القطرية فى المصفوفة الارتباطية مباشرة، وتبدا باستخلاص هذه القيم بكاملها فى العامل الأول وبذلك يكون جذر هذه القيم هو تشبع المتغير الأول على العامل الأول ويطلق عليه اسم التشبع القطري وهكذا.

ج. الطريقة المركزية: تتميز هذه الطريقة بسهولة حسابها كما انها تسمح باستخلاص عدد قليل من العوامل العامة. الا انها تفتقر إلى عدد من المزايا الهامة من اهمها انها لا تستخلص الا قدرا محدودا من التباين الارتباطي وتتحدد قيم الشيوع فى المصفوفة الارتباطية وفق تقديرات غير دقيقة حيث تستخدم اقصى ارتباط بين المتغير واي متغير فى المصفوفة وهو اجراء يؤدى الى خفض رتبة المصفوفة.

ثانيا– اختيار محك تحديد عدد العوامل: في عملية التحليل العاملي تطرح الاشكالية المتعلقة بتقدير عدد العوامل الواجب استخراجها من المتغيرات المشاهدة. ذلك انه يمكن نظريا استخلاص عدد من العوامل يساوي عدد المتغيرات الاصلية حيث يتم استخلاص عوامل من المصفوفة الارتباطية إلى الحد الذى تصبح فيه آخر مصفوفة بواقى صفرية. فعدد العوامل المستخرجة يجب ان يستجيب لمطلبان قد يكونان متعارضين وهما: استخراج اقل عدد من العوامل والتي تفسر اكبر نسبة من التباين. ولهذا الغرض يتم استخدام عدد من المحكات والتي تؤدي غالبا إلى نتائج متقاربة ومن اهمها محك كايزر – Kaiser-. حيث يعتمد هذا المحك على حجم التباين الذى يعبر عنه العامل ومن اجل ان يكون العامل بمثابة فئة تصنيفية فلابد ان يكون تباينه او جذره الكامن اكبر او مساو على الاقل لحجم التباين الاصلى للمتغير، وبما اننا لا نستطيع نظريا استخلاص كل تباين المتغير فى عامل واحد فان حصولنا على عامل جذره الكامن لا يقل عن واحد صحيح لابد ان يكون مصدر تباينه اكثر من متغير وبالتالي يكون عاملا معبرا عن تباين مشترك بين متغيرات متعددة. لذا فان العوامل الدالة فى هذه الطريقة هى العوامل التى يساوي او يزيد جذرها الكامن على واحد صحيح بشرط ان يكون قد وضع فى الخلايا القطرية واحد صحيح.

ثالثا– تدوير العوامل: ان استعمال الطرق الحسابية العاملية لتحليل مصفوفة ارتباط المتغيرات يؤدي إلى استخلاص عدد معين من المحاور والتي تمثل العوامل. واحداثيات هذه المحاور هي عبارة عن تشبعات المتغيرات. الا انه لا يمكن قبول العوامل الناتجة على انها الصورة النهائية التى تلخص لنا العلاقات الارتباطية المتعددة الا بعد تدويرها أي تبسيطها وهذا للوصول بها إلى قدر من الثبات والاتساق حتى يتسنى تفسيرها. وهناك نوعان من التدوير وهما:

- التدوير المتعامد Rotation orthogonale: والذي تدار فيه المحاور معا مع الاحتفاظ بالتعامد بينها. بحيث تكون العوامل في هذه الحالة غير مرتبطة. ومن اكثر اساليبه استخداما نجد اسلوب الفاريماكس Varimax والذي يميل اليه اغلب الباحثون لانه يقدم افضل الحلول. فعندما يتم تدوير مصفوفة عاملية تدويرا متعامدا فإنه يسمح بالوصول إلى نتيجة واحدة هي مصفوفة عوامل الرتبة الاولى بعد التدوير، والتشبعات على العوامل تمثل ايضا الارتباطات بين المتغيرات والعوامل.

- التدوير المائل Rotation Oblique: والذي تدار فيه المحاور وتترك لتتخذ الميل الملائم لها. بحيث تكون العوامل في هذه الحالة متداخلة فيما بينها. والميزة الأساسية للتدوير المائل هو انه الخطوة اللازمة للتقدم نحو التحليلات العاملية من الرتبة الثانية او اكثر. فعندما يتم تدوير مصفوفة عاملية تدويرا مائلا فإنه يسمح بالحصول على مصفوفتين، الأولى هي مصفوفة العوامل الأولية Premier ordre وقيم عواملها هي تشبعات المتغيرات على العوامل. والثانية هي مصفوفة البناء العاملي او مصفوفة العوامل من الرتبة الثانية Second ordre وقيم عواملها هي معاملات الارتباط بين المتغيرات والعوامل. وإذا ما كان هناك عديد من العوامل ذات الرتبة الثانية وأديرت تدويرا مائلا ينتج ايضا مصفوفة ارتباطات بين هذه العوامل ذات الرتبة الثانية، وهذه المصفوفة الارتباطية الأخيرة يمكن ان تحلل ايضا وتؤدى إلى العوامل ذات الرتبة الثالثة وهكذا. وتستمر العملية طالما امكن انتاج مصفوفة ارتباطية بالتدوير، وتتوقف التحليلات حتى نصل الى استخراج عامل واحد فقط او عوامل غير مرتبطة. ومن الاساليب المعروفة فى مجال التدوير المائل: اسلوب الكوارتيمن Quartimin واسلوب الأوبليمين Oblimin واسلوب Promax.

رابعا– تفسير العوامل: يتم تفسير العوامل بعد تحديد التشبعات المرتفعة أو ذات الدلالة الجوهرية للمتغيرات التى ترتبط بالعامل، والتى تعنى أن هناك علاقة بين المتغير والعامل. فاذا ما تطابق مضمون المتغيرات المشبعة على العامل الواحد فإنها تعطى للعامل اسمه. ويعتبر الباحثون ان التشبع الدال هو ما يزيد على 0.35 الا ان القيمة الشائعة فى معظم البحوث هي 0.3.

2. طريقة التحليل بالمركبات الرئيسية

طريقة التحليل بالمركبات الاساسية تعتبر من طرق التحليل العاملي الاكثر استعمالا. وتعتمد هذه الطريقة على التحليل الهندسي للمعطيات وهذا بعد ترتيبها في جدول تضم اعمدته المتغيرات الكمية للدراسة واسطره افراد الدراسة. فبافتراض اننا نريد دراسة مجموعة من المعطيات لاستخلاص ابعادها او مكوناتها الاساسية وتوفر لدينا عينة تتكون من n مشاهدة و p متغير. فانه يتم عرض المعطيات على شكل جدول كمايلي:

$$X_{n*p}=\begin{array}{c} \\ n \\ \text{فرد} \end{array}\begin{array}{c} \overset{\text{متغير } p}{} \\ \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1j} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2j} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & & \cdots & x_{ij} & \cdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nj} & \cdots & x_{np} \end{vmatrix} \end{array}$$

حيث: x_{ij} هي قيمة المتغير j لدى الفرد i.

نلاحظ انه لا يمكن تمثيل هذه الوحدات بنقطة في فضاء من بعدين R^2 (بمحور راسي ومحور عمودي) او ثلاثة ابعادR^3 (ثلاثة محاور) بل نحتاج الى تمثيل الافراد في فضاء يتكون من p ابعاد R^p والمتغيرات في فضاء R^n (أي محور لكل متغير ومحور لكل فرد). لذا فالهدف من استعمال طريقة المركبات الاساسية هو ايجاد نظام للمحاور يسمح لنا باعادة بناء وضعية كل نقطة بالنسبة للاخرى من خلال اسقاط سحابات النقط على هذه المحاور مما يسمح بتقليص الفضاء المتعدد الابعاد الى فضاء R^3 وتفسير النتائج في فضاء R^2.

1.2 تقليص المتغيرات بالاسقاط في الفضاء: تسمح طريقة المركبات الاساسية بايجاد لكل فرد من العينة متغيرات جديدة انطلاقا من المتغيرات الاصلية تكون اقل عددا لكن مع فقدان اقل قدر من المعلومات كمايلي:

$$Y_{n*q}=\text{فرد } n \quad \begin{array}{c} \overset{\text{متغير } q}{} \\ \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1j} & \cdots & x_{1q} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2j} & \cdots & x_{2q} \\ \vdots & & \cdots & x_{ij} & \cdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nj} & \cdots & x_{nq} \end{vmatrix} \end{array}$$

حيث: x_{ij} هي قيمة المتغير j لدى الفرد i.

يمكن ان نمثل كل فرد i في الفضاء R^p فنتحصل على الشعاع u_i :

$$u_i = \begin{pmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \\ \vdots \\ x_{ip} \end{pmatrix}$$

من اجل اسقاط الافراد في الفضاء R^q يجب تحديد مبدا أي مركز ثقل ومقياس لقياس المسافة بين النقاط. باعطاء لكل فرد ثقل pi حيث $p_i \geq 0$ و $\sum_{i=1}^{n} p_i$ نحصل على سحابة افراد تتكون من n عنصر في الفضاء R^p، يعبر عن هذه السحابة بمصفوفة قطرية تسمى مصفوفة الثقل للافراد وتكتب كمايلي:

$$D = \begin{bmatrix} p_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & p_n \end{bmatrix}$$

في طريقة المركبات الاساسية يعطى للافراد نفس الثقل أي $p_i = \frac{1}{n}$ وبالتالي تصبح مصفوفة الثقل للافراد كمايلي:

$$D = \frac{1}{n}\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{n} I$$

جيث I تمثل المصفوفة الاحادية.

ولاسقاط الجدول يجب ان نختار وحدة لقياس نقطتين في الفضاء، وعليه نستعمل وحدة القياس الاقليدية التالية:

$$d^2(u_i, u'_i) = \sum_{j=1}^{p} (x_{ij} - x'_{ij})^2$$

حيث: ui تمثل الفرد i و x_{ij} تمثل مركبات الفرد في الفضاء.

ولاختيار الفضاء w الذي يتم فيه الاسقاط يجب ان نختار محاور من الفضاء R_p المعرف بالنقطة a التي تسمح باسقاط النقاط باقل تشويه. بحيث المتغيرات الجديدة y^k يكون عددها اقل من الاصلية. هذه المتغيرات الجديدة تصبح q مركبة اسقاط لسحابة النقط. وتكتب كل نقطة او فرد i تم اسقاطه على الفضاء w كمايلي:

$$\hat{u}_i = \underline{a} + \sum_{k=1}^{q} y_i^k a_k$$

ويكتب الاسقاط الكلي على الفضاء w بالتباين الكلي كمايلي:

$$I_w = \sum_{k=1}^{n} p_i d^2(u_i, u'_i) \qquad (1)$$

والهدف هو تصغير I_w وذلك باختيار المبدا (مركز الثقل) والمحاور.

اولا– اختيار مبدا الاسقاط: لنحصل على تمثيل اقل تشوه لسحابة النقط خلال الاسقاط على الفضاء W ناخذ كمبدا مركز ثقل السحابة والمتمثل في متوسط المتغيرات كمايلي:

$$O = \begin{pmatrix} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{i1} \\ \vdots \\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \\ \vdots \\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ip} \end{pmatrix} = X'D1_n$$

حيث 1_n تمثل شعاع في R^n عناصره هي 1.

من اجل البحث عن المحاور نقوم بتعويض مركز الثقل O في جدول المتغيرات الاصلية فنحصل على:

$$X_c = \begin{vmatrix} x_{11} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{i1} & x_{12} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{i2} & \cdots & x_{1j} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ij} & \cdots & x_{1p} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ip} \\ x_{21} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{i1} & x_{22} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{i2} & \cdots & x_{2j} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ij} & \cdots & x_{2p} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ip} \\ \vdots & \cdots & \cdots & x_{ij} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ij} & \cdots & \vdots \\ x_{n1} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{i1} & x_{n1} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{i2} & \cdots & x_{nj} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ij} & \cdots & x_{np} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ip} \end{vmatrix}$$

ونتحصل على الشعاع الممركز للوحدة u_i كمايلي :

$$u_{ci} = \begin{pmatrix} x_{i1} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{i1} \\ x_{i2} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{i2} \\ \vdots \\ x_{ij} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \\ \vdots \\ x_{ip} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ip} \end{pmatrix}$$

وتكتب المصفوفة الممركزة لـ X_c كمايلي: $X_c=X-l_nO'=(I-l_nl'_nD)\ X$

وشعاع المركبات الممركز للمتغيرات V_j هو:

$$V_{ci} = \begin{pmatrix} x_{1j} - \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} x_{1j} \\ x_{2j} - \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} x_{2j} \\ \vdots \\ x_{ij} - \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} x_{ij} \\ \vdots \\ x_{nj} - \frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p} x_{nj} \end{pmatrix}$$

ثانيا– التباين الكلي لسحابة الافراد: التباين الكلي للسحابة يعبر عن مقدار تشتت الافراد او النقاط بالنسبة لمركز ثقلها. وهو عبارة عن مجموع العناصر القطرية لمصفوفة التباين والتباين المشترك ويحسب كمايلي:

$$I_O = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d^2(O,u_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}(x_{ij} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ij})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U'_{ci}U_{ci}$$

وتكتب ايضا:

$$I_O = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d^2(O,u_i) = \sum_{j=1}^{p}\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_{ij} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ij})^2\right| = \sum_{j=1}^{n} VAR(V_j)$$

حيث: $VAR(V_j)$ تمثل تباين المتغيرات V_j. ومصفوفة تباين المتغيرات والتباين المشترك V تكتب كمايلي:

$$V=X'_cDX_c$$

والاسقاط العمودي للشعاع الممركز للوحدة u_i على المحور Δ الذي يمر عليه تباين الافراد نرمز له بـ $I_{\Delta i}$ ويحسب من المعادلة التالية كمايلي:

$$I_\Delta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d^2(h_{\Delta i}, u_i)$$

وصيغة التباين الكلي للافراد بالنسبة للفضاء الشعاعي الجزئي W تعطى كمايلي:

$$I_w = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d^2(h_{wi}, u_i)$$

حيث: h_{wi} هو الاسقاط العمودي للشعاع الممركز للوحدة u_i على الفضاء الشعاعي الجزئي W.

واذا اعتبرنا w^* الفضاء المكمل العمودي للفضاء W في الفضاء R^p يمكن ان نكتب:

$$d^2(h_{wi}, u_i) + d^2(h_{w^* i}, u_i) = d^2(O, u_i)$$

أي: $$I_w + I_{w^*} = I_O$$

باعتبار ان المحور Δ_1 المار من المركز O والمعرف بالشعاع التوجيهي $\overrightarrow{Oa_1}$ هو المحور الذي يعطي اقل تشويه لسحابة الافراد أي اقل تباين $I_{\Delta 1}$، فان تصغير $I_{\Delta 1}$ يعني تعظيم $I_{\Delta 1}$. وتعظيم $I_{\Delta 1}$ يتطلب ان تتحقق المعادلة التالية:

$$I_{\Delta * 1} = t_{a_1} V_{a_1}$$

تحت القيد: $$\|\overrightarrow{Oa_i}\|^2 = t_{a1a1} = 1$$

حيث: a_1 هو شعاع ذاتي للمصفوفة V .

باستعمال دالة لاقرانج نجد ان: $t_{a_1} V_{a_1} = \lambda_1$ حيث: λ_1 تمثل اكبر قيمة ذاتية لـ V.

للبحث عن المحور الثاني Δ_2 العمودي على المحور Δ_1 ذو اصغر تباين، لابد ان نعظم $I_{\Delta 2}$ تحت قيد ان المحاور متعامدة $t_{a_2 a_1} = 0$ أي:

$$I_{\Delta * 2} = t_{a_2} V_{a_2}$$

تحت القيد: $$t_{a_2 a_1} = 0 \quad و \quad t_{a_2 a_2} = 1$$

باستعمال دالة لاقرانج نجد ان: a_2 هو الشعاع الذاتي للقيمة الذاتية الثانية λ_2 للمصفوفة V والتي تعتبر مصفوفة مربعة تحتوي على p شعاع ذاتي متعامد في الفضاء R_p. وتسمى المحاور المتعامدة الاولى بالمحاور الاساسية.

ثالثا– مساهمة المحاور في التباين: يتمثل التباين الكلي للافراد في مجموع القيم الذاتية للمحاور المتعامدة λ_k أي العناصر القطرية لمصفوفة التباين والتباين المشترك كمايلي:

$$I_O = I_{\Delta 1} + I_{\Delta 2} + \cdots + I_{\Delta p} = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_p$$

حيث تمثل λ_k المساهمة المطلقة لكل محور في التباين الكلي.

اما المساهمة النسبية للمحور فتقاس بالعلاقة:

$$cr(\Delta_k / I_O) = \lambda_k / (\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_p)$$

اما نسبة تمثيل المستوي فتقاس بالعلاقة:

$$cr(\Delta_1 \oplus \Delta_2 / I_O) = \lambda_1 + \lambda_2 / (\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_p)$$

2.2 حساب المركبات الاساسية للافراد: من اجل ايجاد y_{ik} مركبات الوحدة u_i على المحور Δ_k نقوم باسقاط الشعاع $\overrightarrow{Ou_i}$ على هذا المحور فنحصل على:

$$y_{ik} = \langle \overrightarrow{Ou_i}, \vec{a}_k \rangle = t_{a_k} U_{ci}$$

والصيغة العامة لحساب مركبات الافراد في المحاور هي:

$$\boldsymbol{Y_i = tAU_{ci}}$$

ولتفسير المركبات الاساسية يجب حساب المساهمة المطلقة للافراد في المحاور الرئيسية كمايلي:

$$ca(u_i/\Delta_k) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d^2(h_{\Delta ki}, O)$$

$$ca(u_i/\Delta_k) = \frac{\frac{1}{n} t_{a_k} U_{ci}\, {}^t U_{ci} a_k}{\lambda_k} \quad \text{و} \quad \sum_{i=1}^{n} ca(u_i/\Delta_k) = 1$$

3.2 حساب المركبات الاساسية للمتغيرات: يتم تمثيل المتغيرات في الفضاء R^n بدلا من الفضاء R^p وهذا باتباع الخطوات السابقة لكن بعد تغيير الاساس في هذا الفضاء لتصبح المحاور الجديدة عبارة عن تركيبة خطية للمحاور القديمة. ويمكن ان نعتبرها كمتغيرات جديدة مركبة خطيا بالمتغيرات الاولى وتمثل المركبات الاساسية ونرمز لها بـ z.

باعتبار z1,z2,…,zk,…,zp المركبات الاساسية المتعلقة بالمحور Δ_k نكتب:

$$z_k = \sum_{j=1}^{p} a_{kj} V_{cj} = X_c a_k$$

والصيغة العامة لحساب مركبات المتغيرات في المحاور هي:

$$Z = X_c A$$

والهدف هو معرفة العلاقة بتن المتغيرات القديمة والمتغيرات الجديدة عن طريق الارتباط.

ومعاملات التباين والتباين المشترك والارتباط للمتغيرات الجديدة تعطى كمايلي:

معاملات التباين:

$$Var(Z_k) = \frac{1}{n} t a_k t Z_c Z_c a_k = t a_k \rangle . a_k$$

معاملات التباين المشترك:

$$Cov(Z_k, V_{cj}) = \frac{1}{n} t a_k t X_c V_{cj} = \frac{1}{n} t a_k t X_c X_c \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_k t a_k \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_k a_{kj}$$

معاملات الارتباط:

$$R_{Z,k} = D_{\sqrt{\lambda}} t A D_{\frac{1}{\sigma}}$$

والارتباط بين المتغيرات الجديد k والممركزة V_{cj} تعطى كمايلي:

$$Cor(z_k, V_{cj}) = \sqrt{\lambda_k} \frac{a_{kj}}{\sqrt{Var(V_j)}}$$

4.2 مثال تطبيقي: مثال 36: لديك المعطيات التالية حول ستة افراد واربعة متغيرات والمطلوب هو تلخيص هذه المعطيات بطريقة المركبات الاساسية.

المتغيرات / الافراد	X_1	X_2	X_3	X_4
1	1	2	4	2
2	2	3	6	4
3	5	2	8	5
4	3	1	10	7
5	3	2	7	5
6	4	5	7	4

الحل:

– نحدد اولا المصفوفة القطرية لثقل الافراد حيث يعطى للافراد نفس الثقل أي $p_i = \frac{1}{n} = \frac{1}{6}$ وبالتالي تصبح مصفوفة الثقل للافراد كمايلي:

$$D = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

- نحدد مبدا مركز ثقل السحابة O بحساب متوسط المتغيرات كمايلي:

المتغيرات / الافراد	X_1	X_2	X_3	X_4
1	1	2	4	2
2	2	3	6	4
3	5	2	8	5
4	3	1	10	7
5	3	2	7	5
6	4	5	7	4
المجموع	18	15	42	27
المتوسط	3	2.5	7	4.5
الانحراف المعياري σ	1.291	1.258	1.286	1.5

وبالتالي نكتب مصفوفة مركز الثقل كمايلي:

$$O = \begin{pmatrix} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{i1} \\ \vdots \\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \\ \vdots \\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ip} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2.5 \\ 7 \\ 4.5 \end{pmatrix}$$

- نقوم بتعويض قيم O في جدول المتغيرات الاصلية لنحصل على الجدول الممركز بحيث $x_j=X_j-O_j$:

المتغيرات / الافراد	x_1	x_2	x_3	x_4
1	-2	-0.5	-3	-2.5
2	-1	0.5	-1	-0.5
3	2	-0.5	1	0.5
4	0	-1.5	3	2.5
5	0	-0.5	0	0.5
6	1	2.5	0	-0.5

- نحسب الان مصفوفة تباين المتغيرات اي مصفوفة التباين والتباين المشترك V وهذا بالتعويض في المعادلة:

$$V = X'_c D X_c = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} -2 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ -0.5 & 0.5 & -0.5 & -1.5 & -0.5 & 2.5 \\ -3 & -1 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ -2.5 & -0.5 & 0.5 & 2.5 & 0.5 & -0.5 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -0.5 & -3 & -2.5 \\ -1 & 0.5 & -1 & -0.5 \\ 2 & -0.5 & 1 & 0.5 \\ 0 & -1.5 & 3 & 2.5 \\ 0 & -0.5 & 0 & 0.5 \\ 1 & 2.5 & 0 & -0.5 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 10 & 2 & 9 & 6 \\ 2 & 9.5 & -4 & -4.5 \\ 9 & -4 & 20 & 16 \\ 6 & -4.5 & 16 & 13.5 \end{vmatrix}$$

- نحسب التباين الكلي لتشتت الافراد والذي يمثل مجموع العناصر القطرية لمصفوفة التباين والتباين المشترك أي:

$$I_0 = \sum_{j=1}^{4} VAR(V_j) = \frac{10}{6} + \frac{9.5}{6} + \frac{20}{6} + \frac{13.5}{6} = 8.83$$

- نحسب القيم الذاتية لمصفوفة التباين والتباين المشترك من خلال العلاقة $t_{a_1} V_{a_1} = \lambda_1$ وبما ان $t_{a1} = 1$ فان $V_a = \lambda_a$ ومن اجل الحصول على القيم الذاتية نحسب المحدد:

$$|V - \lambda I_4| = \begin{pmatrix} \frac{10}{6} - \lambda & \frac{2}{6} & \frac{9}{6} & \frac{6}{6} \\ \frac{2}{6} & \frac{9.5}{6} - \lambda & \frac{-4}{6} & \frac{-4.5}{6} \\ \frac{9}{6} & \frac{-4}{6} & \frac{20}{6} - \lambda & \frac{16}{6} \\ \frac{6}{6} & \frac{-4.5}{6} & \frac{16}{6} & \frac{13.5}{6} - \lambda \end{pmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{10}{6} - \lambda & \frac{2}{6} & \frac{9}{6} & \frac{6}{6} \\ \frac{2}{6} & \frac{9.5}{6} - \lambda & \frac{-4}{6} & \frac{-4.5}{6} \\ \frac{9}{6} & \frac{-4}{6} & \frac{20}{6} - \lambda & \frac{16}{6} \\ \frac{6}{6} & \frac{-4.5}{6} & \frac{16}{6} & \frac{13.5}{6} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

بحل المعادلة نحصل على:

$$\lambda_1=6.36,\ \lambda_2=1.94,\ \lambda_3=0.5,\ \lambda_4=0.04$$

والاشعة الذاتية المقابلة لها هي:

a1	a2	a3	a4
0.34	0.58	0.72	0.13
-0.17	0.8	-0.57	0.05
0.72	0.02	-0.24	-0.65
0.58	-0.14	0.3	0.74

- نحدد المحاور الاساسية من خلال حساب المساهمة النسبية لكل محور في التباين كمايلي:

المحور الاول: $cr(\Delta_1 / I_0) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4} = 0.719$

المحور الثاني: $cr(\Delta_1 / I_0) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4} = 0.219$

نستنتج ان المحاور الاساسية هي 1 و 2 لان نسبتهما معا في تمثيل المستوي تقدر بـ 0.938 أي 93.8% هذا يعني ضياع 6% فقط من المعلومات والتي تساهم بها المحاور الاخرى.

- نحدد المركبات الاساسية أي مركبات الافراد في المحاور الاساسية كمايلي:

$$Y_i = tAU_{ci} = \begin{pmatrix} 0.34 & -0.17 & 0.72 & 0.58 \\ 0.58 & 0.8 & 0.02 & -0.14 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} -2 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ -0.5 & 0.5 & -0.5 & -1.5 & -0.5 & 2.5 \\ -3 & -1 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ -2.5 & -0.5 & 0.5 & 2.5 & 0.5 & -0.5 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -4.22 & -1.44 & 1.78 & 3.88 & 0.38 & -0.37 \\ -1.27 & -0.33 & 0.71 & -1.49 & -0.47 & 2.65 \end{pmatrix}$$

اذن مركبات الافراد في المحاور الاساسية هي:

الافراد	المحور 1	المحور 2
1	-4.22	-1.27
2	-1.44	-0.33
3	1.78	0.71
4	3.88	-1.49
5	0.38	-0.47
6	-0.37	2.65

ويمكن تمثيل الافراد على المحورين المتعامدين بيانيا باسقاط مركبات او احداثيات الافراد على كل محور.

- نحسب مساهمة الافراد في بنا المحورين الاساسيين بتربيع المركبات ثم قسمتها على ثقل المصفوفة 6/1 ثم على القيمة الذاتية المقابلة لها فنحصل على:

المساهمة المطلقة للافراد في المحور الاول:

الافراد	المركبات	مربع المركبات	مربع المركبات/6	مربع المركبات/λ_1/6	المساهمة المطلقة للافراد في المحور
1	-4.22	17,8084	2,9681	0,4667	**46,67%**
2	-1.44	2,0736	0,3456	0,0543	5,43%
3	1.78	3,1684	0,5281	0,0830	8,30%
4	3.88	15,0544	2,5091	0,3945	**39,45%**
5	0.38	0,1444	0,0241	0,0038	0,38%
6	-0.37	0,1369	0,0228	0,0036	0,36%
المساهمة الكلية للافراد في المحور					100%

المساهمة المطلقة للافراد في المحور الثاني:

الافراد	المركبات	مربع المركبات	مربع المركبات/6	مربع المركبات/λ_2/6	المساهمة المطلقة للافراد في المحور
1	-1.27	1,6129	0,2688	0,1386	13,86%
2	-0.33	0,1089	0,0182	0,0094	0,94%
3	0.71	0,5041	0,0840	0,0433	4,33%
4	-1.49	2,2201	0,3700	0,1907	**19,07%**
5	-0.47	0,2209	0,0368	0,0190	1,90%
6	2.65	7,0225	1,1704	0,6033	**60,33%**
المساهمة الكلية للافراد في المحور					100%

- نحدد المركبات الاساسية للمتغيرات بحساب معاملات الارتباط كمايلي:

$$R_{Z,k} = D_{\sqrt{\lambda}} t A D_{\frac{1}{\sigma}}$$

$$R_{Z,k} = D_{\sqrt{\lambda}} t A D_{\frac{1}{\sigma}} =$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{6.36} & 0 \\ 0 & \sqrt{1.94} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.34 & -0.17 & 0.72 & 0.58 \\ 0.58 & 0.8 & 0.02 & -0.14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{1.291} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1.258} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1.826} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{1.5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.66 & -0.34 & 0.99 & 0.97 \\ 0.62 & 0.88 & 0.01 & -0.129 \end{pmatrix}$$

اذن مركبات المتغيرات في المحاور الاساسية هي:

المتغيرات	المحور 1	المحور 2
م1	0.66	0.62
م2	-0.34	0.88
م3	0.99	0.01
م4	0.97	-0.129

ويمكن تمثيل المتغيرات على المحورين المتعامدين بيانياباسقاط مركبات او احداثيات المتغيرات على كل محور.

3. التطبيق العملي باستخدام البرنامج الاحصائي SPSS

سوف نقوم من خلال التطبيق العملي بالتحليل العاملي للمتغيرات وهذا باستخدام طريقة التحليل بالمركبات الاساسية ACP. باعتبار ان هذا الاسلوب هو الاسلوب الاكثر استعمالا في اغلب الدراسات الاقتصادية. بحيث ترتب المعطيات الاصلية في الاسطر والاعمدة كمايلي: المفردات او الافراد تظهر في الاسطر و المتغيرات في الاعمدة. ومن ثمة يقوم البرنامج بحساب معاملات الارتباط بين المتغيرات (الاعمدة) ثم يحللها عامليا ويستخرج منها العوامل او المتغيرات الجديدة.

لضمان صحة نتائج التحليل العاملي للمتغيرات لابد من تحقق الشروط التالية: التوزيع الطبيعي للمتغيرات، خطية العلاقة بين المتغيرات وعدم وجود قيم شاذة. وقبل القيام بهذا الاجراء لابد من التأكد مما يلي:

1- وجود علاقة بين المتغيرات أي ان معاملات الارتباط بين المتغيرات غير معدومة. ونتأكد من ذلك من خلال فحص مصفوفة الارتباط ومن خلال اختبار Bartlett المبني على الفرضية الصفرية القائلة ان مصفوفة الارتباط مصفوفة صفرية اي ان كل المتغيرات مستقلة عن بعضها البعض. ويجب ان تكون معنوية هذا الاختبار اقل من 0.05 حتى نرفض الفرضية الصفرية ونقبل الفرضية البديلة.

2- كفاية عدد مفردات العينة لقبول الحل العاملي وهذا من خلال حساب مؤشر Kaiser-Meyer-Olkin حيث يجب ان تتراوح قيمته بين 0.5 و 1 مما يعني ان الحل المقترح مقبول احصائيا مقارنة بحجم العينة وان المتغيرات المقبولة متجانسة وتقيس المتغيرات الجديدة بطريقة مناسبة.

وعند تنفيذ هذا الاجراء لابد من تطبيق القواعد التالية:

1- عدد العوامل المستخرجة مرتبط بنسبة التباين الذي تفسره هذه العوامل. فنتوقف عن عملية الاستخراج عندما تصل نسبة التباين المتراكم الى 60%.

2- يتم قبول العوامل المستخرجة التي يكون حجم تباين متغيراتها لا يقل عن 1 ويرمز له في البرنامج بـ Valeur propre.

3- المتغيرات الاصلية الواجب الاحتفاظ بها بالنسبة لكل عامل هي التي يكون لديها جودة تمثيل للعامل تفوق 0.5.

4- درجة ارتباط كل متغير مع العامل الذي يمثله تقاس من خلال درجة تشبع العامل او Factor loading وتظهر في جدول تشبعات العوامل. ونأخذ القيمة 0.5 كقيمة مرجعية لتحديد المتغيرات الواجب الاحتفاظ بها ضمن عامل معين او حذفها. فنحتفظ فقط بالمتغيرات التي تفوق درجة تشبعها 0.5 لأنها تصف العامل المرتبطة به جيدا. اما المتغيرات التي تقل درجة تشبعها عن 0.5 فتحذف لعدم قدرتها على وصف هذا العامل جيدا بل قد تصف عامل اخر بدرجة احسن. وتحذف كذلك المتغيرات التي لها درجة تشبع تفوق 0.3 وتقل عن 0.5 على اكثر من عامل (Cross loading) لأنه من غير المنطقي ان تساهم بنفس الدرجة في وصف عاملين او بعدين مختلفين.

مثال تطبيقي 37: لدينا في الملحق -3- معطيات عينة تتكون من 100 شخص من كبار السن الذين تراوح اعمارهم بين 60 و 75 سنة، وهذا لدراسة علاقة تأثير قوة الجسم على الاصابات الجسدية. المطلوب: تقليص عدد متغيرات قوة الجسم الخمسة (قوة الأطراف، قوة عضلات الفخذ الخلفية واسفل الظهر، قوة عضلات البطن، قوة عضلات الساعد والكتف وقوة قبضة اليد) في عدد اقل من المتغيرات دون التاثير على اهمية المعلومات، وهذا باستعمال طريقة ACP.

لتنفيذ هذا الاجراء نتبع الخطوات التالية:

نختار من لائحة Analyse الامر Réduction des dimensions ثم ننقر على Analyse factorielle فيظهر مربع الحوار الخاص وننقل المتغيرات[11] المراد تحليلها الى Variables وهذا بالنقر على ثم ننقر على الخيار Descriptives ونختار:

-Caractéristiques univariées - Structure initiale - Coefficients - Seuils de signification – Déterminants - Indice KMO

ثم ننقر على Poursuivre ثم ننقر على خيار Extraction ونختار:

-Composante principales - Matrice de corrélation - Structure factorielle sans rotation - Valeurs propres supérieures à 1

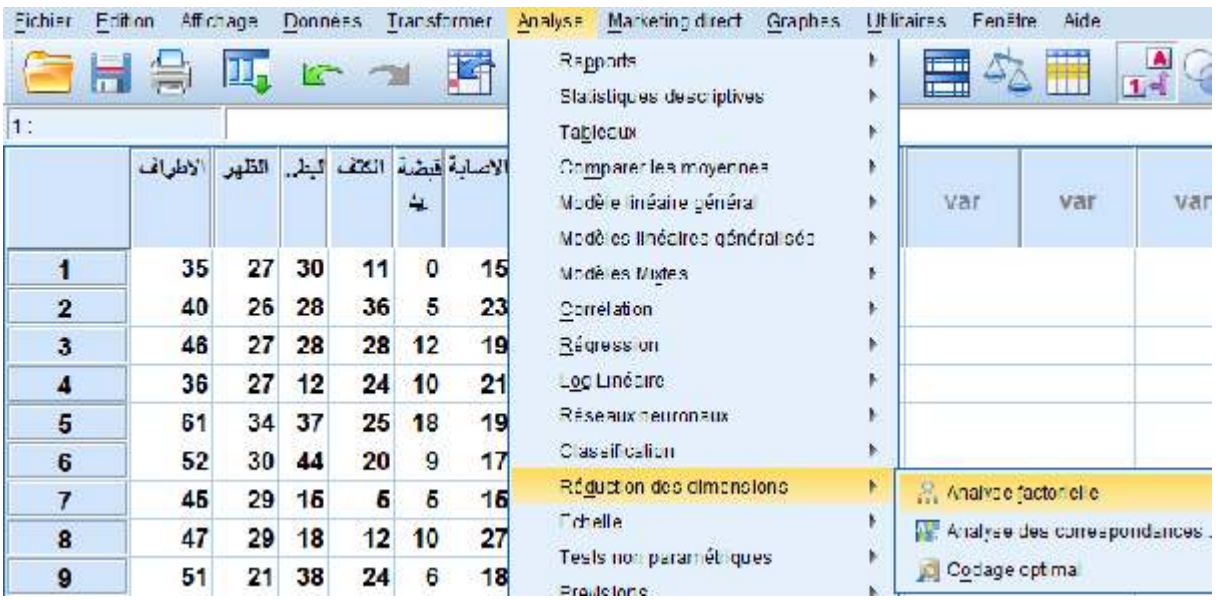
ثم ننقر على Poursuivre ثم ننقر على خيار Rotation ونختار:

- Varimax - Structure après rotation

ثم ننقر على الخيار Options ونختار:

-Classement des variables par taille - Supprimer les faibles coefficients - Valeur absolue inférieure à 0.5

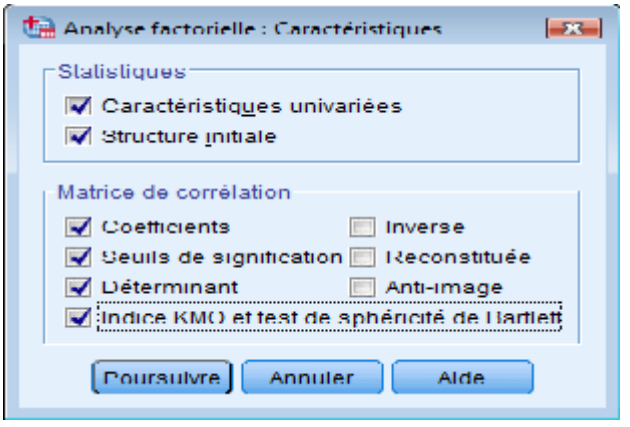
ثم ننقر على Poursuivre ثم OK.

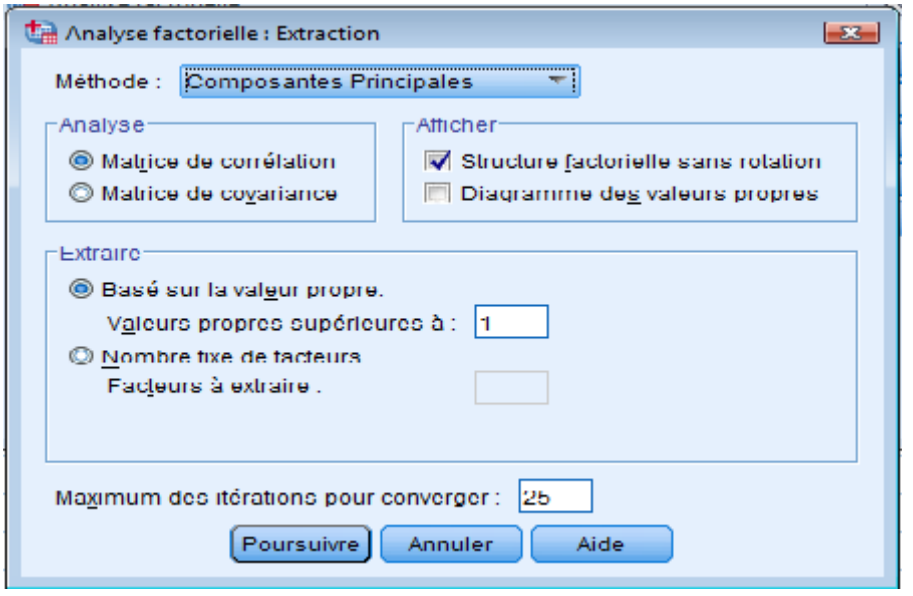


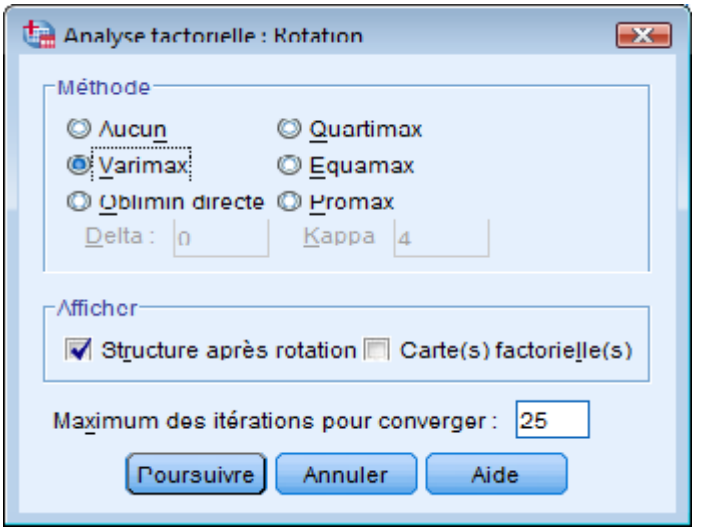
ومربعات الحوار لتنفيذ اجراء التحليل العاملي تظهر كمايلي:

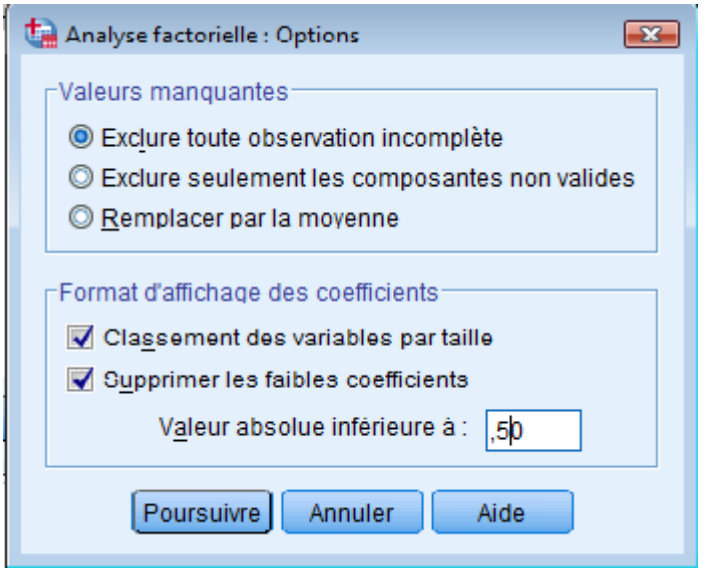
[11] اذا اردنا اجراء التحليل العاملي على مجموعة معينة ضمن العينة كعينة الذكور ننقر على خانة Variable de filtrage وننقل المتغير الذي نريد ان يتم التقسيم على اساسه كمتغير الجنس ثم ننقر على Valeur ثم نكتب رمز هذه المجموعة بالنسبة للمتغير المختار ثم ننقر على Poursuivre.

Analyse factorielle
معامل الاصابة [م.الاصابة]
Variables :
قوة الاطراف [الاطراف]
قوة عضلات الفخذ الخلفية ...
قوة عضلات البطن [البطن]
قوة عضلات الساعد والكتف ...
قوة قبضة اليد [قبضة يد]
Descriptives
Extraction...
Rotation...
Facteurs...
Options
Variable de filtrage :
Valeur...
OK
Coller
Réinitialiser
Annuler
Aide


Analyse factorielle : Caractéristiques
Statistiques
Caractéristiques univariées
Structure initiale
Matrice de corrélation
Coefficients
Seuils de signification
Déterminant
Indice KMO et test de sphéricité de Bartlett
Inverse
Reconstituée
Anti-image
Poursuivre
Annuler
Aide


Analyse factorielle : Extraction
Méthode :
Composantes Principales
Analyse
Matrice de corrélation
Matrice de covariance
Afficher
Structure factorielle sans rotation
Diagramme des valeurs propres
Extraire
Basé sur la valeur propre.
Valeurs propres supérieures à :
1
Nombre fixe de facteurs
Facteurs à extraire :
Maximum des itérations pour converger :
25
Poursuivre
Annuler
Aide





وتظهر النتائج بالشكل التالي:

Analyse factorielle

Statistiques descriptives

	Moyenne	Ecart-type	n analyse
قوة الاطراف	47,06	9,646	100
قوة عضلات الفخذ الخلفية واسفل الظهر	31,08	5,783	100
قوة عضلات البطن	28,66	8,970	100
قوة عضلات الساعد والكتف	30,40	8,540	100
قوة قبضة اليد	9,06	5,224	100

Matrice de corrélation[a]

		قوة الاطراف	قوة عضلات الفخذ الخلفية واسفل الظهر	قوة عضلات البطن	قوة عضلات الساعد والكتف	قوة قبضة اليد
Corrélation	قوة الاطراف	**1,000**	,484	,521	,372	,190
	قوة عضلات الفخذ الخلفية واسفل الظهر	**,484**	**1,000**	,487	,338	,253
	قوة عضلات البطن	**,521**	**,487**	**1,000**	,194	,190
	قوة عضلات الساعد والكتف	**,372**	**,338**	**,194**	**1,000**	,493
	قوة قبضة اليد	**,190**	**,253**	**,190**	**,493**	**1,000**
Signification (unilatérale)	قوة الاطراف		,000	,000	,000	,029
	قوة عضلات الفخذ الخلفية واسفل الظهر	**,000**		,000	,000	,006
	قوة عضلات البطن	**,000**	**,000**		,027	,029
	قوة عضلات الساعد والكتف	**,000**	**,000**	**,027**		,000
	قوة قبضة اليد	**,029**	**,006**	**,029**	**,000**	

a. Déterminant = ,308

Indice KMO et test de Bartlett

Mesure de précision de l'échantillonnage de Kaiser-Meyer-Olkin.		,694
Test de sphéricité de Bartlett	Khi-deux approximé	113,745
	ddl	10
	Signification de Bartlett	,000

Qualité de représentation

	Initial	Extraction
قوة الاطراف	1,000	,678
قوة عضلات الفخذ الخلفية واسفل الظهر	1,000	,631
قوة عضلات البطن	1,000	,709
قوة عضلات الساعد والكتف	1,000	,736
قوة قبضة اليد	1,000	,761

Méthode d'extraction : Analyse en composantes principales.

Variance totale expliquée

Composante	Valeurs propres initiales			Extraction Sommes des carrés des facteurs retenus			Somme des carrés des facteurs retenus pour la rotation		
	Total	% de la variance	% cumulés	Total	% de la variance	% cumulés	Total	% de la variance	% cumulés
1	2,425	48,503	48,503	2,425	48,503	48,503	1,985	39,693	39,693
2	1,090	21,792	70,295	1,090	21,792	70,295	1,530	30,602	70,295
3	,579	11,571	81,866						
4	,519	10,375	92,240						
5	,388	7,760	100,000						

Méthode d'extraction : Analyse en composantes principales.

Matrice des composantes après rotation[a]

	Composante	
	1	2
قوة عضلات البطن	,842	
قوة الاطراف	,801	
قوة عضلات الفخذ الخلفية واسفل الظهر	,756	
قوة قبضة اليد		,869
قوة عضلات الساعد والكتف		,823

Méthode d'extraction : Analyse en composantes principales.

Méthode de rotation : Varimax avec normalisation de Kaiser.

a. La rotation a convergé en 3 itérations.

تظهر نتائج التحليل العاملي على شكل مجموعة من الجداول تقرا على النحو التالي:

- الجدول الاول: يعطي نتائج الاحصاء الوصفي للمعطيات والمتمثلة في المتوسط الحسابي والانحراف المعياري وعدد المشاهدات لكل متغير.

- الجدول الثاني: يعطي مصفوفة الارتباط بين المتغيرات ومحدد المصفوفة. يجب ان نفحص مصفوفة الارتباط للتأكد من ان المتغيرات غير مستقلة عن بعضها البعض (اذا كانت المتغيرات مستقلة اي ارتباطها معدوم لا يمكن اجراء التحليل العاملي). ونلاحظ ان مصفوفتنا خالية من حالات الاستقلالية بل هناك ارتباط بين كل المتغيرات ولو كان ارتباطا ضعيفا. كما يجب ان نتأكد من عدم وجود حالات ارتباط ذاتي بين المتغيرات ($r \geq 0.8$). وهذا من خلال فحص قيمة محدد المصفوفة Déterminant فهو مؤشر لقياس حالات الارتباط الذاتي ونسجل هذه الحالة لما تقل قيمة المحدد عن 0.0001 في هذه الحالة يحذف واحد من المتغيرات التي لديها معامل ارتباط يفوق 0.8.

- الجدول الثالث: يعطي قيمة مؤشر KMO = 0,694 وهي اكبر من 0.5 هذا يعني ان العينة كافية لإجراء التحليل. كما يظهر الجدول نتائج اختبار Bartlett ومعنوية هذا الاختبار= 0,000 وهي اقل من 0.05 أي ان مصفوفة الارتباط ليست صفرية.

- الجدول الرابع: يعطي قيمة جودة تمثيل المتغيرات حيث نحتفظ بالمتغيرات التي تفوق جودة تمثيلها 0.5.

- الجدول الخامس: يعطي عدد العوامل المستخرجة ونسبة التباين الذي يفسره كل عامل. بالنسبة لمثالنا نجد انه تم استخراج عاملين او مكونين رئيسيين يفسران معا 70,3% من التباين الكلي للمتغيرات.

- الجدول السادس: يعطي مصفوفة تشبعات العوامل المستخرجة بعد عملية التدوير بطريقة Varimax. ونلاحظ انه تم اظهار تشبعات المتغيرات على العاملين المستخرجين والتي تفوق قيمتها 0.5 اما باقي التشبعات فلا تظهر لأنها اقل من 0.5. ومن هذا الجدول نتوصل للاستنتاجات التالية:

- ✓ العامل او المكون الرئيسي الاول: يتضمن المتغيرات قوة عضلات البطن، قوة الاطراف و قوة عضلات الفخذ الخلفية وأسفل الظهر بمعاملات تشبع على التوالي 0.842، 0.801 و 0,756. ويمكن تسمية هذا العامل قوة اسفل الجسم او قوة العضلات السفلى للجسم.
- ✓ العامل او المكون الرئيسي الثاني: يتضمن المتغيرات قوة قبضة اليد و قوة عضلات الساعد والكتف بمعاملات تشبع على التوالي 0.869 و 0.823. ويمكن تسمية هذا العامل قوة اعلى الجسم او قوة العضلات العليا للجسم.

ومنه فان اسلوب التحليل العاملي سمح لنا بتقليص مجموعة المتغيرات الاصلية الى متغيرين فقط يسمى كل منهما بالعامل. ويتم تسمية هذا العامل من خلال اكتشاف الخاصية المشتركة بين متغيرات تشبع العامل. فمتغيرات العامل الاول تشترك جميعها في كونها تنتمي لعضلات الجسم السفلى اما متغيرات العامل الثاني فتشترك جميعها في كونها تنتمي لعضلات الجسم العليا.

خاتمة

لقد تطرقنا في هذه المطبوعة للاساليب والنماذج الاحصائية الوصفية والاستقرائية الاكثر استعمالا في الدراسات الانسانية والاقتصادية. مع توضيح طريقة حسابها رياضيا وكيفية تنفيذها باستعمال الاوامر المختلفة للحزمة الاحصائية الجاهزة SPSS. فقسمنا هذه المطبوعة الى خمسة فصول تستجيب لاحتياجات كل مرحلة من مراحل التحليل الاحصائي للمعطيات. وعليه فقد خصصنا الفصل الاول لاستعراض بعض المفاهيم الاساسية المرتبطة بالتحليل الاحصائي للمعطيات بالإضافة لكيفية جمع المعطيات من مختلف مصادرها. اما الفصل الثاني فقد خصصناه لتقديم مختلف الاساليب المستخدمة في عرض المعطيات بالاضافة الى اهم المقاييس التي تسمح بوصفها. اما الفصل الثالث فقد خصصناه لشرح كيفية اتخاذ قرار قبول او رفض فرضيات الدراسة، بالاضافة لتقديم اهم الاختبارات الاحصائية المعلمية واللامعلمية التي تسمح باتخاذ قرار حول هذه الفرضيات. اما الفصل الرابع فقد خصصناه لدراسة اهم اساليب التحليل الاستقرائي ثنائي ومتعدد المتغيرات وهذا من خلال دراسة الارتباط الثنائي والانحدار الخطي البسيط والمتعدد. اما الفصل الخامس فقد خصصناه لدراسة اساليب التحليل الاستقرائي متعدد المتغيرات المتعمق وهذا من خلال التركيز على دراسة التحليل العاملي بالمركبات الاساسية. وتم تزويد كل فصل بامثلة تطبيقية تدعم الجانب النظري وكذلك بامثلة تطبيقية عملية حول كيفية تنفيذ مختلف الاساليب الاحصائية باستخدام البرنامج الاحصائي الجاهز.

قائمة المراجع

باللغة العربية:

1) ابو صالح محمد صبحي. "**مقدمة في الاحصاء**". دار المسيرة. الاردن. 2004.

2) ابو سريع رضا عبد الله. "**تحليل المعطيات باستخدام برنامج SPSS**". دار الفكر. الاردن. 2004.

3) البلداوي عبد الحميد. "**اساليب البحث العلمي والتحليل الاحصائي**". دار الشروق للنشر والتوزيع. الاردن. 2007.

4) السواعي خالد محمد. "**مدخل لتحليل المعطيات باستخدام SPSS**". عالم الكتب الحديث. الاردن. 2011.

5) الزعبي محمد بلال والطلافحة عباس."**النظام الاحصائي SPSS**". دار وائل للنشر. ط 3. الاردن. 2006.

6) البياتي محمود مهدي. "**تحليل المعطيات الاحصائية باستخدام البرنامج الاحصائي SPSS**". دار الحامد. الاردن. 2005.

7) بدر محمد الأنصاري. "**اسلوب التحليل العاملي: عرض منهجي نقدي لعينة من الدراسات العربية استخدمت التحليل العاملي**". ندوة البحث العلمي في المجالات الاجتماعية في الوطن العربي. المجلس الأعلى لرعاية الفنون والآداب والعلوم الاجتماعية. 5 و 6 ديسمبر 1999. سوريا. متوفر على الرابط: www.up-sy.com

8) مروان عبد المجيد ابراهيم. "**الاحصاء الوصفي والاستدلالي**". دار الفكر للنشر والطباعة والتوزيع. الاردن. 2000.

9) مصطفى حسين باهي، احمد عبد الفتاح سالم، محمد فوزي عبد العزيز، هيثم عبد المجيد محمد. " **الاحصاء التطبيقي**". مكتبة الانجلو المصرية. مصر. 2006.

10) مصطفى زايد. "**الاحصاء والاستقراء**". ط2.هجر للطباعة والنشر. 1990.

11) فاتن عبد العليم ابو علي. "**مبادئ الاحصاء الوصفي**". دار الفكر. الاردن. 2000.

12) عدنان كريم نجم الدين. "**الاحصاء للاقتصاد والادارة**". دار وائل للنشر. الاردن. 2000.

13) اماني موسى محمد. "**التحليل الاحصائي للمعطيات**". مركز تطوير الدراسا العليا والبحوث. جامعة القاهرة. القاهرة. 2007. متوفر على الرابط: www.capscu.com

14) صواليلي صدر الدين. "**تحليل المعطيات**". دار هومه. الجزائر. 2012.

باللغات الاجنبية:

15) Carricano manu et Poujol fanny. **« Analyse de données avec SPSS »**. Pearson éducation. France. 2009.

16) IBM. SPSS Statistics. Version 21. 2013.

17) Malhotra Naresh K. (No year). "**Marketing research, an applied orientation"**. Sixth Edition, Global edition. Ed. Pearson, Prentice Hall, New Jersey. U.S.A.

18) Michel Jambu (1999). « **Méthodes de base de l'analyse des données** ». editions Eyrolles. France.

19) Sakaran Uma and Bougie Roger (2013). "**Research Methods for Business: a skill-building approach"**. Sixth edition. Wiley, United Kingdom.

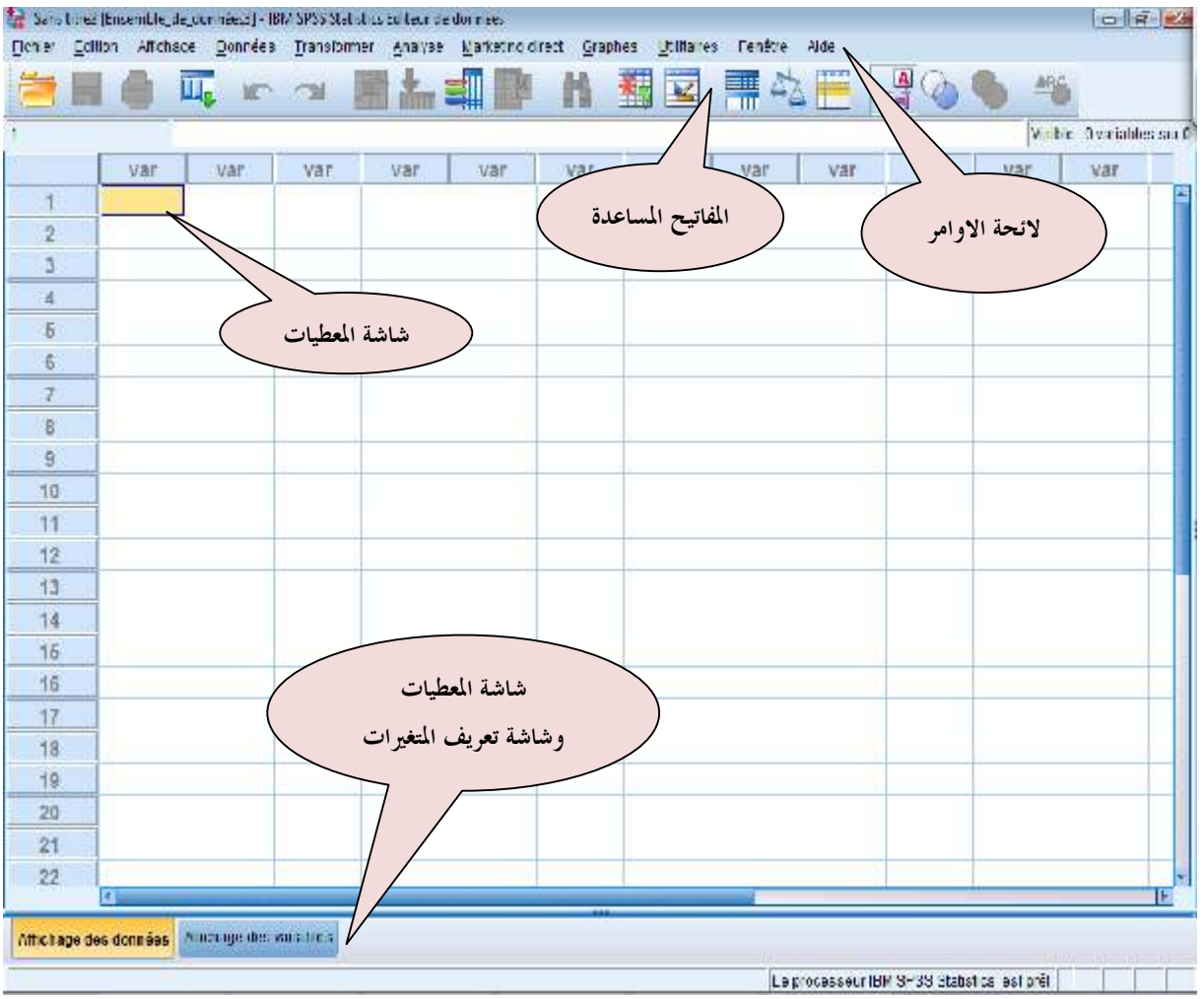
الملاحق

الملحق 1: مكونات البرنامج الاحصائيSPSS

(Statistical Package for Social Sciences) SPSS

هو برنامج احصائي جاهز للعلوم الانسانية يستخدم لتحليل جميع انواع المعطيات الاحصائية من مختلف انواع العلوم تحت نظام النوافذ (Windows). ويتميز هذا البرنامج بميزته في التحليل السريع والمبسط للمعطيات، حيث يتم إدخال المعطيات وتخزينها ضمن ملف خاص بالمعطيات يسمى Editeur de données، واظهار النتائج وتخزينها ضمن ملف آخر خاص بالمخرجات يسمى Résultats او Outputs.

اولا– نافذة محرر المعطيات Editeur de données: اول نافذة تظهر عند تشغيل البرنامج، تتكون من: لائحة الاوامر؛ المفاتيح المساعدة؛ شاشة المعطيات وشاشة تعريف المتغيرات. وتظهر نافذة محرر المعطيات بالشكل التالي:



ثانيا– شاشة المخرجات الاحصائية Résultats : تظهر نتائج الاجراءات الاحصائية المختلفة التي تم تنفيذها على المعطيات. وتظهر بالشكل التالي:

ثالثا– لائحة الاوامر La barre des menus: تتضمن إحدى عشرة لائحة رئيسية، نستطيع من خلالها القيام بجميع العمليات التي يوفرها البرنامج والمتمثلة في:

1) لائحة ملف Fichier: تسمح بإنشاء، فتح، تخزين، طباعة الملفات وكذلك الخروج من النظام.
2) لائحة تحرير Edition: تسمح بنسخ ونقل المعطيات وإضافة او البحث عن متغيرات او معطيات.
3) لائحة عرض Affichage: تسمح بإظهار شريط الادوات التي يكثر استخدامها بدلا من البحث في اللوائح الرئيسية وإظهار او اخفاء خطوط شبكة المعطيات وعناوين القيم.
4) لائحة معطيات Données: تسمح بالقيام بالعمليات المختلفة على المعطيات من فرز ودمج مع معطيات اخرى وكذلك تحديد المعطيات المضاعفة وغير الاعتيادية.
5) لائحة التحويلات Transformer: تسمح بإجراء تحويلات على المتغيرات وإعادة ترميزها وإضافة متغيرات جديدة من خلال القيام بعمليات حسابية او استخدام مختلف الدوال الاحصائية على المتغيرات.
6) لائحة تحليل Analyse: تسمح بتحليل المعطيات باستعمال مختلف مستويات وأدوات التحليل الاحصائي الوصفي والاستقرائي.
7) لائحة التسويق المباشر Marketing direct: تسمح باستعمال بعض التقنيات التسويقية لتصنيف الزبائن وتحسين الحملات التسويقية.
8) لائحة الرسومات البيانية Graphes: تسمح بتلخيص المعطيات بأشكال ورسومات بيانية مختلفة كالأشرطة و الدوائر والمنحنيات.
9) لائحة الادوات Utilitaires: تسمح بإيجاد معلومات عن الملف المستخدم والمتغيرات التي يحويها واستخدام المجموعات للمتغيرات المختلفة.
10) لائحة نافذة Fenêtre: تسمح بالتنقل بين النوافذ المختلفة والتحكم بحجم هذه النوافذ.

11) لائحة المساعدة Aide: تسمح بالإجابة على التساؤلات المتعلقة بالنظام او كيفية استخدام الاوامر.

رابعا– المفاتيح المساعدة Barre d'outils: عبارة عن ايقونات تحمل رسوم تمثل وظائف او عمليات معينة تغني عن الذهاب والبحث في اللوائح الرئيسية للنظام. والجدول التالي يمثل المفاتيح المساعدة كما تظهر في النافذة الرئيسية لبرنامج SPSS مع تحديد وظيفة كل ايقونة.

الايقونة	الوظيفة	الايقونة	الوظيفة
	فتح ملف		البحث
	تخزين		اضافة مشاهدة جديدة
	طباعة		اضافة متغير جديد
	اظهار اخر الاجراءات التي تم استخدامها		شطر الملف
	تراجع عن اخر تغيير		اعطاء اوزان للحالات
	تراجع عن التراجع		اختيار مشاهدات
	الذهاب الى مشاهدة		اظهار عناوين القيم
	الذهاب الى متغير		استعمال مجموعة من المتغيرات
	المتغيرات		اظهار كل المتغيرات
	اجراء التحليل الوصفي		مصحح اللغة

خامسا– شاشة المعطيات Affichage des données : تسمح بإدخال وعرض وتسجيل المعطيات المراد تحليلها. بحيث تمثل الاعمدة متغيرات الدراسة أو اسئلة الاستبيان والأسطر معطيات المشاهدات أو الاجابات عن هذه الاسئلة. وتظهر بالشكل التالي:

سادسا– شاشة تعريف المتغيرات Affichage des variables: تسمح بعرض وتعريف المتغيرات وهذا بتحديد:

– اسم المتغير Nom: يتكون من 8 احرف كحد اقصى ولا يتضمن رموز خاصة او يشبه اسم متغير اخر.

– نوع المتغير Type: يقترح البرنامج الانواع التالية:

1. رقمي Numérique: متغير رقمي عادي كالرقم 1679,12.
2. فاصلة Virgule: متغير رقمي عادي مع اضافة فاصلة بين كل ثلاثة ارقام صحيحة كالرقم 167,912.89 .
3. نقطة points: متغير رقمي عادي مع اضافة نقطة للفصل بين كل ثلاثة ارقام صحيحة وفاصلة للأرقام العشرية.
4. علمي Scientific notation: متغير رقمي يستخدم للارقام الكبيرة جدا كالرقم $2,3 E+5=2,3\times10^{5}$ او الصغيرة جدا كالرقم $2,35-E=2,3\times10^{-5}$.
5. تاريخ Date: متغير يمثل تاريخ او وقت بأشكال مختلفة.
6. دولار Dollar: متغير رقمي عادي للدلالة على المال بالدولار.
7. عملة Symbole monétaire: متغير رقمي عادي للدلالة على المال بعملة اخرى غير الدولار.
8. سلسلة Chaine: متغير يستخدم الرموز والاحرف للدلالة على فئات المتغير عند استخدامه يصعب التعامل معه.
9. رقمي محدود Numérique limité: متغير رقمي لا يستخدم الفاصلة ولا النقطة ويظهر فيه الصفر على اليسار كرقم الضمان الاجتماعي.

- عدد الارقام الصحيحة بالمتغير Largeur: تمثل عدد الارقام المسموح بها قبل الفاصلة ويضع البرنامج ثمانية ارقام صحيحة يمكن قبول ذلك دون تغيير ولن يؤثر حتى اذا كان عدد الارقام اقل.
- عدد الارقام العشرية بالمتغير Décimales: تمثل عدد الارقام المسموح بها بعد الفاصلة والتي يحددها البرنامج عادة بـ 2.
- وصف المتغير Etiquette: يمثل الاسم او المعنى الحقيقي للمتغير او شرح له في حدود 120 حرف.
- وصف القيم المرمزة للمتغير Valeurs: تستخدم لتعريف الارقام التي استعملت لترميز المتغير.
- تحديد رمز القيم الناقصة Manquant : نحدد قبول او عدم قبول وجود قيم ناقصة في التحليل وعدم قبول وجود قيم ناقصة هو الخيار الذي يعتمده البرنامج بصفة اوتوماتيكية. ويقدم البرنامج ثلاثة خيارات:
  - لا توجد قيم ناقصة: ويقصد به ترك مكان القيم الناقصة فارغا.
  - رمز او رموز للقيم الناقصة: يتم تعريف من قيمة الى ثلاثة قيم لتمثل القيمة الناقصة مثلا استعمال الرقم 9 للدلالة على عدم الاجابة عن عدد الاطفال بالنسبة للأعزب والرقم 8 للدلالة على عدم الاجابة للمتزوج بدون اطفال.
  - مدى من الرموز للقيم الناقصة مثلا من 6-10.
- تحديد اتساع عمود معطيات المتغير Colonnes: يستخدم لتحديد وسع العمود أي تحديد عدد الارقام التي يمكن اظهارها.
- موقع الارقام داخل العمود Alignement: يمكن ان توضع الارقام وسط الخلية، على اليمين او اليسار.
- مقياس او سلم المتغير Mesure: تحدد سلم قياس المتغير اما سلمي او ترتيبي او اسمي.
- دور المتغير Rôle: تحدد دور المتغير هل هو عبارة عن معطيات او هدف او الاثنين معا.

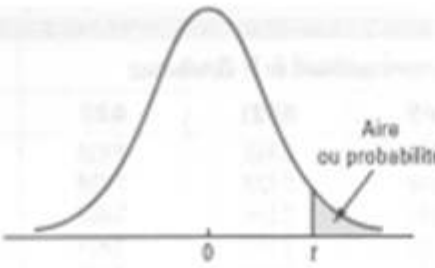
وتظهر شاشة تعريف المتغيرات بالشكل التالي:

	Nom	Type	Largeur	Décimales	Etiquette	Valeurs	Manquant	Colonnes	Align	Mesure	Rôle
1											
2											
3											
4											
5											
6											

الملحق 2: الجداول الاحصائية

1- جدول توزيع t لستودنت

Loi du *t* de Student



Les chiffres de la table correspondent aux valeurs *t* pour différentes aires ou probabilités situées dans la queue supérieure de la distribution de Student. Par exemple, avec 10 degrés de liberté et une aire de 0,05 dans la queue supérieure de la distribution, $t_{0,05} = 1,812$. **(pour test unilatéral !)**

Degrés de liberté	Aire dans la queue supérieure de la distribution					
	0,20	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005
1	1,376	3,078	6,314	12,706	31,821	63,656
2	1,061	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	0,978	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	0,941	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	0,920	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	0,906	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	0,896	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	0,889	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	0,883	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10	0,879	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
11	0,876	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
12	0,873	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
13	0,870	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
14	0,868	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
15	0,866	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
16	0,865	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
17	0,863	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
18	0,862	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
19	0,861	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861
20	0,860	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
21	0,859	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831
22	0,858	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819
23	0,858	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807
24	0,857	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797
25	0,856	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787
26	0,856	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779
27	0,855	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771
28	0,855	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
29	0,854	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756
30	0,854	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750
31	0,853	1,309	1,696	2,040	2,453	2,744
32	0,853	1,309	1,694	2,037	2,449	2,738
33	0,853	1,308	1,692	2,035	2,445	2,733
34	0,852	1,307	1,691	2,032	2,441	2,728

Loi du *t* de Student (suite)

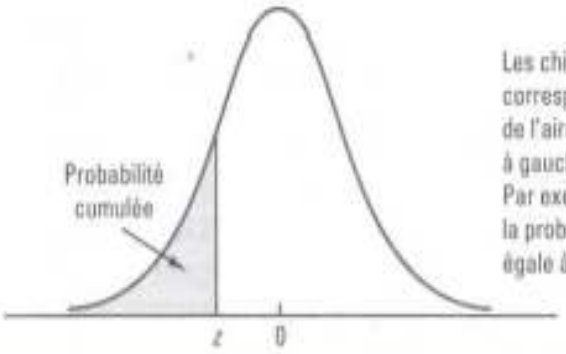
Degrés de liberté	Aire dans la queue supérieure de la distribution					
	0,20	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005
35	0,852	1,306	1,690	2,030	2,438	2,724
36	0,852	1,306	1,688	2,028	2,434	2,719
37	0,851	1,305	1,687	2,026	2,431	2,715
38	0,851	1,304	1,686	2,024	2,429	2,712
39	0,851	1,304	1,685	2,023	2,426	2,708
40	0,851	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704
41	0,850	1,303	1,683	2,020	2,421	2,701
42	0,850	1,302	1,682	2,018	2,418	2,698
43	0,850	1,302	1,681	2,017	2,416	2,695
44	0,850	1,301	1,680	2,015	2,414	2,692
45	0,850	1,301	1,679	2,014	2,412	2,690
46	0,850	1,300	1,679	2,013	2,410	2,687
47	0,849	1,300	1,678	2,012	2,408	2,685
48	0,849	1,299	1,677	2,011	2,407	2,682
49	0,849	1,299	1,677	2,010	2,405	2,680
50	0,849	1,299	1,676	2,009	2,403	2,678
51	0,849	1,298	1,675	2,008	2,402	2,676
52	0,849	1,298	1,675	2,007	2,400	2,674
53	0,848	1,298	1,674	2,006	2,399	2,672
54	0,848	1,297	1,674	2,005	2,397	2,670
55	0,848	1,297	1,673	2,004	2,396	2,668
56	0,848	1,297	1,673	2,003	2,395	2,667
57	0,848	1,297	1,672	2,002	2,394	2,665
58	0,848	1,296	1,672	2,002	2,392	2,663
59	0,848	1,296	1,671	2,001	2,391	2,662
60	0,848	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660
61	0,848	1,296	1,670	2,000	2,389	2,659
62	0,847	1,295	1,670	1,999	2,388	2,657
63	0,847	1,295	1,669	1,998	2,387	2,656
64	0,847	1,295	1,669	1,998	2,386	2,655
65	0,847	1,295	1,669	1,997	2,385	2,654
66	0,847	1,295	1,668	1,997	2,384	2,652
67	0,847	1,294	1,668	1,996	2,383	2,651
68	0,847	1,294	1,668	1,995	2,382	2,650
69	0,847	1,294	1,667	1,995	2,382	2,649
70	0,847	1,294	1,667	1,994	2,381	2,648
71	0,847	1,294	1,667	1,994	2,380	2,647
72	0,847	1,293	1,666	1,993	2,379	2,646
73	0,847	1,293	1,666	1,993	2,379	2,645
74	0,847	1,293	1,666	1,993	2,378	2,644
75	0,846	1,293	1,665	1,992	2,377	2,643
76	0,846	1,293	1,665	1,992	2,376	2,642
77	0,846	1,293	1,665	1,991	2,376	2,641
78	0,846	1,292	1,665	1,991	2,375	2,640
79	0,846	1,292	1,664	1,990	2,374	2,639

Loi du *t* de Student (suite)

Degrés de liberté	Aire dans la queue supérieure de la distribution					
	0,20	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005
80	0,846	1,292	1,664	1,990	2,374	2,639
81	0,846	1,292	1,664	1,990	2,373	2,638
82	0,846	1,292	1,664	1,989	2,373	2,637
83	0,846	1,292	1,663	1,989	2,372	2,636
84	0,846	1,292	1,663	1,989	2,372	2,636
85	0,846	1,292	1,663	1,988	2,371	2,635
86	0,846	1,291	1,663	1,988	2,370	2,634
87	0,846	1,291	1,663	1,988	2,370	2,634
88	0,846	1,291	1,662	1,987	2,369	2,633
89	0,846	1,291	1,662	1,987	2,369	2,632
90	0,846	1,291	1,662	1,987	2,368	2,632
91	0,846	1,291	1,662	1,986	2,368	2,631
92	0,846	1,291	1,662	1,986	2,368	2,630
93	0,846	1,291	1,661	1,986	2,367	2,630
94	0,845	1,291	1,661	1,986	2,367	2,629
95	0,845	1,291	1,661	1,985	2,366	2,629
96	0,845	1,290	1,661	1,985	2,366	2,628
97	0,845	1,290	1,661	1,985	2,365	2,627
98	0,845	1,290	1,661	1,984	2,365	2,627
99	0,845	1,290	1,660	1,984	2,364	2,626
100	0,845	1,290	1,660	1,984	2,364	2,626
∞	0,842	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576

2- جدول التوزيع الطبيعي المعياري Z

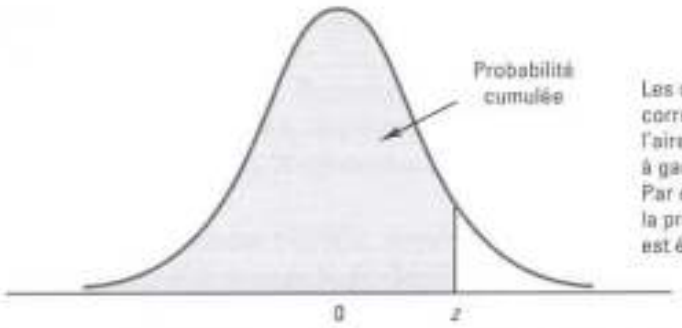
Loi Normale Centrée Réduite



Les chiffres de la table correspondent à la valeur de l'aire située sous la courbe à gauche de la valeur z.
Par exemple, pour $z = -0,85$, la probabilité cumulée est égale à 0,1977.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
-3,0	0,0013	0,0013	0,0013	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010
-2,9	0,0019	0,0018	0,0018	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014
-2,8	0,0026	0,0025	0,0024	0,0023	0,0023	0,0022	0,0021	0,0021	0,0020	0,0019
-2,7	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026
-2,6	0,0047	0,0045	0,0044	0,0043	0,0041	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036
-2,5	0,0062	0,0060	0,0059	0,0057	0,0055	0,0054	0,0052	0,0051	0,0049	0,0048
-2,4	0,0082	0,0080	0,0078	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0068	0,0066	0,0064
-2,3	0,0107	0,0104	0,0102	0,0099	0,0096	0,0094	0,0091	0,0089	0,0087	0,0084
-2,2	0,0139	0,0136	0,0132	0,0129	0,0125	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110
-2,1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	0,0146	0,0143
-2,0	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202	0,0197	0,0192	0,0188	0,0183
-1,9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0239	0,0233
-1,8	0,0359	0,0351	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	0,0301	0,0294
-1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
-1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455
-1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
-1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0721	0,0708	0,0694	0,0681
-1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823
-1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
-1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
-1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
-0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
-0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
-0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
-0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
-0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
-0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
-0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
-0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
-0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
-0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641

Loi Normale Centrée Réduite (suite)



Les chiffres de la table correspondent à la valeur de l'aire située sous la courbe à gauche de la valeur z. Par exemple, pour $z = 1{,}25$ la probabilité cumulée est égale à 0,8944.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9913
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9986	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

3- جدول توزيع X^2 كاي تربيع

Loi du Khi-deux

$$P(\chi^2_\nu \geq \chi^2_{\nu,\alpha}) = \alpha$$

1 – α	0,001	0,005	0,01	0,025	0,05	0,1	0,5	0,9	0,95	0,975	0,99	0,995	0,999
α	0,999	0,995	0,99	0,975	0,95	0,9	0,5	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001
ν = ddl													
1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,02	0,45	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88	10,83
2	0,00	0,01	0,02	0,05	0,10	0,21	1,39	4,61	5,99	7,38	9,21	10,60	13,82
3	0,02	0,07	0,11	0,22	0,35	0,58	2,37	6,25	7,81	9,35	11,34	12,84	16,27
4	0,09	0,21	0,30	0,48	0,71	1,06	3,36	7,78	9,49	11,14	13,28	14,86	18,47
5	0,21	0,41	0,55	0,83	1,15	1,61	4,35	9,24	11,07	12,83	15,09	16,75	20,51
6	0,38	0,68	0,87	1,24	1,64	2,20	5,35	10,64	12,59	14,45	16,81	18,55	22,46
7	0,60	0,99	1,24	1,69	2,17	2,83	6,35	12,02	14,07	16,01	18,48	20,28	24,32
8	0,86	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49	7,34	13,36	15,51	17,53	20,09	21,95	26,12
9	1,15	1,73	2,09	2,70	3,33	4,17	8,34	14,68	16,92	19,02	21,67	23,59	27,88
10	1,48	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87	9,34	15,99	18,31	20,48	23,21	25,19	29,59
11	1,83	2,60	3,05	3,82	4,57	5,58	10,34	17,28	19,68	21,92	24,73	26,76	31,26
12	2,21	3,07	3,57	4,40	5,23	6,30	11,34	18,55	21,03	23,34	26,22	28,30	32,91
13	2,62	3,57	4,11	5,01	5,89	7,04	12,34	19,81	22,36	24,74	27,69	29,82	34,53
14	3,04	4,07	4,66	5,63	6,57	7,79	13,34	21,06	23,68	26,12	29,14	31,32	36,12
15	3,48	4,60	5,23	6,26	7,26	8,55	14,34	22,31	25,00	27,49	30,58	32,80	37,70
16	3,94	5,14	5,81	6,91	7,96	9,31	15,34	23,54	26,30	28,85	32,00	34,27	39,25
17	4,42	5,70	6,41	7,56	8,67	10,09	16,34	24,77	27,59	30,19	33,41	35,72	40,79
18	4,90	6,26	7,01	8,23	9,39	10,86	17,34	25,99	28,87	31,53	34,81	37,16	42,31
19	5,41	6,84	7,63	8,91	10,12	11,65	18,34	27,20	30,14	32,85	36,19	38,58	43,82
20	5,92	7,43	8,26	9,59	10,85	12,44	19,34	28,41	31,41	34,17	37,57	40,00	45,31
21	6,45	8,03	8,90	10,28	11,59	13,24	20,34	29,62	32,67	35,48	38,93	41,40	46,80
22	6,98	8,64	9,54	10,98	12,34	14,04	21,34	30,81	33,92	36,78	40,29	42,80	48,27
23	7,53	9,26	10,20	11,69	13,09	14,85	22,34	32,01	35,17	38,08	41,64	44,18	49,73
24	8,08	9,89	10,86	12,40	13,85	15,66	23,34	33,20	36,42	39,36	42,98	45,56	51,18
25	8,65	10,52	11,52	13,12	14,61	16,47	24,34	34,38	37,65	40,65	44,31	46,93	52,62
26	9,22	11,16	12,20	13,84	15,38	17,29	25,34	35,56	38,89	41,92	45,64	48,29	54,05
27	9,80	11,81	12,88	14,57	16,15	18,11	26,34	36,74	40,11	43,19	46,96	49,65	55,48
28	10,39	12,46	13,56	15,31	16,93	18,94	27,34	37,92	41,34	44,46	48,28	50,99	56,89
29	10,99	13,12	14,26	16,05	17,71	19,77	28,34	39,09	42,56	45,72	49,59	52,34	58,30
30	11,59	13,79	14,95	16,79	18,49	20,60	29,34	40,26	43,77	46,98	50,89	53,67	59,70

Pour $\nu > 30$, La loi du χ^2 peut –être approximée par la loi normale $N(\nu, \sqrt{\nu})$

4- جدول توزيع F لفيشر

(v_1درجة حرية البسط و v_2 درجة حرية المقام)

Loi du *F* de Fisher

$$P(F_{\nu_1,\nu_2} < f_{\nu_1,\nu_2,\alpha}) = \alpha$$

$\alpha = 0{,}975$

ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	30	50	100	200	500	•
1	648	800	864	900	922	937	948	957	963	969	985	993	1001	1008	1013	1016	1017	1018
2	38,5	39,0	39,2	39,3	39,3	39,4	39,4	39,4	39,4	39,4	39,4	39,4	39,5	39,5	39,5	39,5	39,5	39,5
3	17,4	16,0	15,4	15,1	14,9	14,7	14,6	14,5	14,5	14,4	14,3	14,2	14,1	14,0	14,0	13,9	13,9	13,9
4	12,2	10,6	9,98	9,60	9,36	9,20	9,07	8,98	8,90	8,84	8,66	8,56	8,46	8,38	8,32	8,29	8,27	8,26
5	10,0	8,43	7,76	7,39	7,15	6,98	6,85	6,76	6,68	6,62	6,43	6,33	6,23	6,14	6,08	6,05	6,03	6,02
6	8,81	7,26	6,60	6,23	5,99	5,82	5,70	5,60	5,52	5,46	5,27	5,17	5,07	4,98	4,92	4,88	4,86	4,85
7	8,07	6,54	5,89	5,52	5,29	5,12	4,99	4,90	4,82	4,76	4,57	4,47	4,36	4,28	4,21	4,18	4,16	4,14
8	7,57	6,06	5,42	5,05	4,82	4,65	4,53	4,43	4,36	4,30	4,10	4,00	3,89	3,81	3,74	3,70	3,68	3,67
9	7,21	5,71	5,08	4,72	4,48	4,32	4,20	4,10	4,03	3,96	3,77	3,67	3,56	3,47	3,40	3,37	3,35	3,33
10	6,94	5,46	4,83	4,47	4,24	4,07	3,95	3,85	3,78	3,72	3,52	3,42	3,31	3,22	3,15	3,12	3,09	3,08
11	6,72	5,26	4,63	4,28	4,04	3,88	3,76	3,66	3,59	3,53	3,33	3,23	3,12	3,03	2,96	2,92	2,90	2,88
12	6,55	5,10	4,47	4,12	3,89	3,73	3,61	3,51	3,44	3,37	3,18	3,07	2,96	2,87	2,80	2,76	2,74	2,72
13	6,41	4,97	4,35	4,00	3,77	3,60	3,48	3,39	3,31	3,25	3,05	2,95	2,84	2,74	2,67	2,63	2,61	2,60
14	6,30	4,86	4,24	3,89	3,66	3,50	3,38	3,29	3,21	3,15	2,95	2,84	2,73	2,64	2,56	2,53	2,50	2,49
15	6,20	4,76	4,15	3,80	3,58	3,41	3,29	3,20	3,12	3,06	2,86	2,76	2,64	2,55	2,47	2,44	2,41	2,40
16	6,12	4,69	4,08	3,73	3,50	3,34	3,22	3,12	3,05	2,99	2,79	2,68	2,57	2,47	2,40	2,36	2,33	2,32
17	6,04	4,62	4,01	3,66	3,44	3,28	3,16	3,06	2,98	2,92	2,72	2,62	2,50	2,41	2,33	2,29	2,26	2,25
18	5,98	4,56	3,95	3,61	3,38	3,22	3,10	3,01	2,93	2,87	2,67	2,56	2,44	2,35	2,27	2,23	2,20	2,19
19	5,92	4,51	3,90	3,56	3,33	3,17	3,05	2,96	2,88	2,82	2,62	2,51	2,39	2,30	2,22	2,18	2,15	2,13
20	5,87	4,46	3,86	3,51	3,29	3,13	3,01	2,91	2,84	2,77	2,57	2,46	2,35	2,25	2,17	2,13	2,10	2,09
22	5,79	4,38	3,78	3,44	3,22	3,05	2,93	2,84	2,76	2,70	2,50	2,39	2,27	2,17	2,09	2,05	2,02	2,00
24	5,72	4,32	3,72	3,38	3,15	2,99	2,87	2,78	2,70	2,64	2,44	2,33	2,21	2,11	2,02	1,98	1,95	1,94
26	5,66	4,27	3,67	3,33	3,10	2,94	2,82	2,73	2,65	2,59	2,39	2,28	2,16	2,05	1,97	1,92	1,90	1,88
28	5,61	4,22	3,63	3,29	3,06	2,90	2,78	2,69	2,61	2,55	2,34	2,23	2,11	2,01	1,92	1,88	1,85	1,83
30	5,57	4,18	3,59	3,25	3,03	2,87	2,75	2,65	2,57	2,51	2,31	2,20	2,07	1,97	1,88	1,84	1,81	1,79
40	5,42	4,05	3,46	3,13	2,90	2,74	2,62	2,53	2,45	2,39	2,18	2,07	1,94	1,83	1,74	1,69	1,66	1,64
50	5,34	3,98	3,39	3,06	2,83	2,67	2,55	2,46	2,38	2,32	2,11	1,99	1,87	1,75	1,66	1,60	1,57	1,55
60	5,29	3,93	3,34	3,01	2,79	2,63	2,51	2,41	2,33	2,27	2,06	1,94	1,82	1,70	1,60	1,54	1,51	1,48
80	5,22	3,86	3,28	2,95	2,73	2,57	2,45	2,36	2,28	2,21	2,00	1,88	1,75	1,63	1,53	1,47	1,43	1,40
100	5,18	3,83	3,25	2,92	2,70	2,54	2,42	2,32	2,24	2,18	1,97	1,85	1,71	1,59	1,48	1,42	1,38	1,35
200	5,10	3,76	3,18	2,85	2,63	2,47	2,35	2,26	2,18	2,11	1,90	1,78	1,64	1,51	1,39	1,32	1,27	1,23
500	5,05	3,72	3,14	2,81	2,59	2,43	2,31	2,22	2,14	2,07	1,86	1,74	1,60	1,46	1,34	1,25	1,19	1,14
•	5,02	3,69	3,12	2,79	2,57	2,41	2,29	2,19	2,11	2,05	1,83	1,71	1,57	1,43	1,30	1,21	1,13	1,00

Loi du *F* de Fisher (suite)

$$P(F_{v_1,v_2} < f_{v_1,v_2,\alpha}) = \alpha$$

$\alpha = 0{,}95$

v_2 \ v_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	30	50	100	200	500	•
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	246	248	250	252	253	254	254	254
2	18,5	19,0	19,2	19,2	19,3	19,3	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5
3	10,1	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,70	8,66	8,62	8,58	8,55	8,54	8,53	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,86	5,80	5,75	5,70	5,66	5,65	5,64	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,62	4,56	4,50	4,44	4,41	4,39	4,37	4,37
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	3,94	3,87	3,81	3,75	3,71	3,69	3,68	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,51	3,44	3,38	3,32	3,27	3,25	3,24	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,22	3,15	3,08	3,02	2,97	2,95	2,94	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,01	2,94	2,86	2,80	2,76	2,73	2,72	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,85	2,77	2,70	2,64	2,59	2,56	2,55	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,72	2,65	2,57	2,51	2,46	2,43	2,42	2,40
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,62	2,54	2,47	2,40	2,35	2,32	2,31	2,30
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,53	2,46	2,38	2,31	2,26	2,23	2,22	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,46	2,39	2,31	2,24	2,19	2,16	2,14	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,40	2,33	2,25	2,18	2,12	2,10	2,08	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,35	2,28	2,19	2,12	2,07	2,04	2,02	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,31	2,23	2,15	2,08	2,02	1,99	1,97	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,27	2,19	2,11	2,04	1,98	1,95	1,93	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,23	2,16	2,07	2,00	1,94	1,91	1,89	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,20	2,12	2,04	1,97	1,91	1,88	1,86	1,84
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,15	2,07	1,98	1,91	1,85	1,82	1,80	1,78
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,11	2,03	1,94	1,86	1,80	1,77	1,75	1,73
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,07	1,99	1,90	1,82	1,76	1,73	1,71	1,69
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19	2,04	1,96	1,87	1,79	1,73	1,69	1,67	1,65
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,01	1,93	1,84	1,76	1,70	1,66	1,64	1,62
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	1,92	1,84	1,74	1,66	1,59	1,55	1,53	1,51
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,20	2,13	2,07	2,03	1,87	1,78	1,69	1,60	1,52	1,48	1,46	1,44
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,84	1,75	1,65	1,56	1,48	1,44	1,41	1,39
80	3,96	3,11	2,72	2,49	2,33	2,21	2,13	2,06	2,00	1,95	1,79	1,70	1,60	1,51	1,43	1,38	1,35	1,32
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,31	2,19	2,10	2,03	1,97	1,93	1,77	1,68	1,57	1,48	1,39	1,34	1,31	1,28
200	3,89	3,04	2,65	2,42	2,26	2,14	2,06	1,98	1,93	1,88	1,72	1,62	1,52	1,41	1,32	1,26	1,22	1,19
500	3,86	3,01	2,62	2,39	2,23	2,12	2,03	1,96	1,90	1,85	1,69	1,59	1,48	1,38	1,28	1,21	1,16	1,11
•	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88	1,83	1,67	1,57	1,46	1,35	1,24	1,17	1,11	1,00

5- جدول توزيع B ذات الحدين

(n حجم العينة و x عدد الاشارات الموجبة في العينة)

$P(X \leq x)$ où $X \sim B(n,p)$

		p									
n	x	.05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45	.50
2	0	0.9025	0.8100	0.7225	0.6400	0.5625	0.4900	0.4225	0.3600	0.3025	0.2500
	1	0.9975	0.9900	0.9775	0.9600	0.9375	0.9100	0.8775	0.8400	0.7975	0.7500
3	0	0.8574	0.7290	0.6141	0.5120	0.4219	0.3430	0.2746	0.2160	0.1664	0.1250
	1	0.9927	0.9720	0.9392	0.8960	0.8438	0.7840	0.7182	0.6480	0.5748	0.5000
	2	0.9999	0.9990	0.9966	0.9920	0.9844	0.9730	0.9571	0.9360	0.9089	0.8750
4	0	0.8145	0.6561	0.5220	0.4096	0.3164	0.2401	0.1785	0.1296	0.0915	0.0625
	1	0.9860	0.9477	0.8905	0.8192	0.7383	0.6517	0.5630	0.4752	0.3910	0.3125
	2	0.9995	0.9963	0.9880	0.9728	0.9492	0.9163	0.8735	0.8208	0.7585	0.6875
	3	1	0.9999	0.9995	0.9984	0.9961	0.9919	0.9850	0.9744	0.9590	0.9375
5	0	0.7738	0.5905	0.4437	0.3277	0.2373	0.1681	0.1160	0.0778	0.0503	0.0312
	1	0.9774	0.9185	0.8352	0.7373	0.6328	0.5282	0.4284	0.3370	0.2562	0.1875
	2	0.9988	0.9914	0.9734	0.9421	0.8965	0.8369	0.7648	0.6826	0.5931	0.5000
	3	1	0.9995	0.9978	0.9933	0.9844	0.9692	0.9460	0.9130	0.8688	0.8125
	4	1	1	0.9999	0.9997	0.9990	0.9976	0.9947	0.9898	0.9815	0.9688
6	0	0.7351	0.5314	0.3771	0.2621	0.1780	0.1176	0.0754	0.0467	0.0277	0.0156
	1	0.9672	0.8857	0.7765	0.6554	0.5339	0.4202	0.3191	0.2333	0.1636	0.1094
	2	0.9978	0.9842	0.9527	0.9011	0.8306	0.7443	0.6471	0.5443	0.4415	0.3438
	3	0.9999	0.9987	0.9941	0.9830	0.9624	0.9295	0.8826	0.8208	0.7447	0.6562
	4	1	0.9999	0.9996	0.9984	0.9954	0.9891	0.9777	0.9590	0.9308	0.8906
	5	1	1	1	0.9999	0.9998	0.9993	0.9982	0.9959	0.9917	0.9844
7	0	0.6983	0.4783	0.3206	0.2097	0.1335	0.0824	0.0490	0.0280	0.0152	0.0078
	1	0.9556	0.8503	0.7166	0.5767	0.4449	0.3294	0.2338	0.1586	0.1024	0.0625
	2	0.9962	0.9743	0.9262	0.8520	0.7564	0.6471	0.5323	0.4199	0.3164	0.2266
	3	0.9998	0.9973	0.9879	0.9667	0.9294	0.8740	0.8002	0.7102	0.6083	0.5000
	4	1	0.9998	0.9988	0.9953	0.9871	0.9712	0.9444	0.9037	0.8471	0.7734
	5	1	1	0.9999	0.9996	0.9987	0.9962	0.9910	0.9812	0.9643	0.9375
	6	1	1	1	1	0.9999	0.9998	0.9994	0.9984	0.9963	0.9922
8	0	0.6634	0.4305	0.2725	0.1678	0.1001	0.0576	0.0319	0.0168	0.0084	0.0039
	1	0.9428	0.8131	0.6572	0.5033	0.3671	0.2553	0.1691	0.1064	0.0632	0.0352
	2	0.9942	0.9619	0.8948	0.7969	0.6785	0.5518	0.4278	0.3154	0.2201	0.1445
	3	0.9996	0.9950	0.9786	0.9437	0.8862	0.8059	0.7064	0.5941	0.4770	0.3633
	4	1	0.9996	0.9971	0.9896	0.9727	0.9420	0.8939	0.8263	0.7396	0.6367
	5	1	1	0.9998	0.9988	0.9958	0.9887	0.9747	0.9502	0.9115	0.8555
	6	1	1	1	0.9999	0.9996	0.9987	0.9964	0.9915	0.9819	0.9648
	7	1	1	1	1	1	0.9999	0.9998	0.9993	0.9983	0.9961
9	0	0.6302	0.3874	0.2316	0.1342	0.0751	0.0404	0.0207	0.0101	0.0046	0.0020
	1	0.9288	0.7748	0.5995	0.4362	0.3003	0.1960	0.1211	0.0705	0.0385	0.0195
	2	0.9916	0.9470	0.8591	0.7382	0.6007	0.4628	0.3373	0.2318	0.1495	0.0898
	3	0.9994	0.9917	0.9661	0.9144	0.8343	0.7297	0.6089	0.4826	0.3614	0.2539
	4	1	0.9991	0.9944	0.9804	0.9511	0.9012	0.8283	0.7334	0.6214	0.5000
	5	1	0.9999	0.9994	0.9969	0.9900	0.9747	0.9464	0.9006	0.8342	0.7461
	6	1	1	1	0.9997	0.9987	0.9957	0.9888	0.9750	0.9502	0.9102
	7	1	1	1	1	0.9999	0.9996	0.9986	0.9962	0.9909	0.9805
	8	1	1	1	1	1	1	0.9999	0.9997	0.9992	0.9980

$P(X \leq x)$ où $X \sim B(n,p)$

		p									
n	x	.05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45	.50
10	0	0.5987	0.3487	0.1969	0.1074	0.0563	0.0282	0.0135	0.0060	0.0025	0.0010
	1	0.9139	0.7361	0.5443	0.3758	0.2440	0.1493	0.0860	0.0464	0.0233	0.0107
	2	0.9885	0.9298	0.8202	0.6778	0.5256	0.3828	0.2616	0.1673	0.0996	0.0547
	3	0.9990	0.9872	0.9500	0.8791	0.7759	0.6496	0.5138	0.3823	0.2660	0.1719
	4	0.9999	0.9984	0.9901	0.9672	0.9219	0.8497	0.7515	0.6331	0.5044	0.3770
	5	1	0.9999	0.9986	0.9936	0.9803	0.9527	0.9051	0.8338	0.7384	0.6230
	6	1	1	0.9999	0.9991	0.9965	0.9894	0.9740	0.9452	0.8980	0.8281
	7	1	1	1	0.9999	0.9996	0.9984	0.9952	0.9877	0.9726	0.9453
	8	1	1	1	1	1	0.9999	0.9995	0.9983	0.9955	0.9893
	9	1	1	1	1	1	1	1	0.9999	0.9997	0.9990
11	0	0.5688	0.3138	0.1673	0.0859	0.0422	0.0198	0.0088	0.0036	0.0014	0.0005
	1	0.8981	0.6974	0.4922	0.3221	0.1971	0.1130	0.0606	0.0302	0.0139	0.0059
	2	0.9848	0.9104	0.7788	0.6174	0.4552	0.3127	0.2001	0.1189	0.0652	0.0327
	3	0.9984	0.9815	0.9306	0.8389	0.7133	0.5696	0.4256	0.2963	0.1911	0.1133
	4	0.9999	0.9972	0.9841	0.9496	0.8854	0.7897	0.6683	0.5328	0.3971	0.2744
	5	1	0.9997	0.9973	0.9883	0.9657	0.9218	0.8513	0.7535	0.6331	0.5000
	6	1	1	0.9997	0.9980	0.9924	0.9784	0.9499	0.9006	0.8262	0.7256
	7	1	1	1	0.9998	0.9988	0.9957	0.9878	0.9707	0.9390	0.8867
	8	1	1	1	1	0.9999	0.9994	0.9980	0.9941	0.9852	0.9673
	9	1	1	1	1	1	1	0.9998	0.9993	0.9978	0.9941
	10	1	1	1	1	1	1	1	1	0.9998	0.9995
12	0	0.5404	0.2824	0.1422	0.0687	0.0317	0.0138	0.0057	0.0022	0.0008	0.0002
	1	0.8816	0.6590	0.4435	0.2749	0.1584	0.0850	0.0424	0.0196	0.0083	0.0032
	2	0.9804	0.8891	0.7358	0.5583	0.3907	0.2528	0.1513	0.0834	0.0421	0.0193
	3	0.9978	0.9744	0.9078	0.7946	0.6488	0.4925	0.3467	0.2253	0.1345	0.0730
	4	0.9998	0.9957	0.9761	0.9274	0.8424	0.7237	0.5833	0.4382	0.3044	0.1938
	5	1	0.9995	0.9954	0.9806	0.9456	0.8822	0.7873	0.6652	0.5269	0.3872
	6	1	0.9999	0.9993	0.9961	0.9857	0.9614	0.9154	0.8418	0.7393	0.6128
	7	1	1	0.9999	0.9994	0.9972	0.9905	0.9745	0.9427	0.8883	0.8062
	8	1	1	1	0.9999	0.9996	0.9983	0.9944	0.9847	0.9644	0.9270
	9	1	1	1	1	1	0.9998	0.9992	0.9972	0.9921	0.9807
	10	1	1	1	1	1	1	0.9999	0.9997	0.9989	0.9968
	11	1	1	1	1	1	1	1	1	0.9999	0.9998
13	0	0.5133	0.2542	0.1209	0.0550	0.0238	0.0097	0.0037	0.0013	0.0004	0.0001
	1	0.8646	0.6213	0.3983	0.2336	0.1267	0.0637	0.0296	0.0126	0.0049	0.0017
	2	0.9755	0.8661	0.6920	0.5017	0.3326	0.2025	0.1132	0.0579	0.0269	0.0112
	3	0.9969	0.9658	0.8820	0.7473	0.5843	0.4206	0.2783	0.1686	0.0929	0.0461
	4	0.9997	0.9935	0.9658	0.9009	0.7940	0.6543	0.5005	0.3530	0.2279	0.1334
	5	1	0.9991	0.9925	0.9700	0.9198	0.8346	0.7159	0.5744	0.4268	0.2905
	6	1	0.9999	0.9987	0.9930	0.9757	0.9376	0.8705	0.7712	0.6437	0.5000
	7	1	1	0.9998	0.9988	0.9944	0.9818	0.9538	0.9023	0.8212	0.7095
	8	1	1	1	0.9998	0.9990	0.9960	0.9874	0.9679	0.9302	0.8666
	9	1	1	1	1	0.9999	0.9993	0.9975	0.9922	0.9797	0.9539
	10	1	1	1	1	1	0.9999	0.9997	0.9987	0.9959	0.9888
	11	1	1	1	1	1	1	1	0.9999	0.9995	0.9983
	12	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0.9999
14	0	0.4877	0.2288	0.1028	0.0440	0.0178	0.0068	0.0024	0.0008	0.0002	0.0001
	1	0.8470	0.5846	0.3567	0.1979	0.1010	0.0475	0.0205	0.0081	0.0029	0.0009
	2	0.9699	0.8416	0.6479	0.4481	0.2811	0.1608	0.0839	0.0398	0.0170	0.0065
	3	0.9958	0.9559	0.8535	0.6982	0.5213	0.3552	0.2205	0.1243	0.0632	0.0287
	4	0.9996	0.9908	0.9533	0.8702	0.7415	0.5842	0.4227	0.2793	0.1672	0.0898
	5	1	0.9985	0.9885	0.9561	0.8883	0.7805	0.6405	0.4859	0.3373	0.2120
	6	1	0.9998	0.9978	0.9884	0.9617	0.9067	0.8164	0.6925	0.5461	0.3953
	7	1	1	0.9997	0.9976	0.9897	0.9685	0.9247	0.8499	0.7414	0.6047
	8	1	1	1	0.9996	0.9978	0.9917	0.9757	0.9417	0.8811	0.7880
	9	1	1	1	1	0.9997	0.9983	0.9940	0.9825	0.9574	0.9102
	10	1	1	1	1	1	0.9998	0.9989	0.9961	0.9886	0.9713
	11	1	1	1	1	1	1	0.9999	0.9994	0.9978	0.9935
	12	1	1	1	1	1	1	1	0.9999	0.9997	0.9991
	13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0.9999

$P(X \leq x)$ où $X \sim B(n,p)$

		p									
n	x	.05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45	.50
15	0	0.4633	0.2059	0.0874	0.0352	0.0134	0.0047	0.0016	0.0005	0.0001	0.0000
	1	0.8290	0.5490	0.3186	0.1671	0.0802	0.0353	0.0142	0.0052	0.0017	0.0005
	2	0.9638	0.8159	0.6042	0.3980	0.2361	0.1268	0.0617	0.0271	0.0107	0.0037
	3	0.9945	0.9444	0.8227	0.6482	0.4613	0.2969	0.1727	0.0905	0.0424	0.0176
	4	0.9994	0.9873	0.9383	0.8358	0.6865	0.5155	0.3519	0.2173	0.1204	0.0592
	5	0.9999	0.9978	0.9832	0.9389	0.8516	0.7216	0.5643	0.4032	0.2608	0.1509
	6	1	0.9997	0.9964	0.9819	0.9434	0.8689	0.7548	0.6098	0.4522	0.3036
	7	1	1	0.9994	0.9958	0.9827	0.9500	0.8868	0.7869	0.6535	0.5000
	8	1	1	0.9999	0.9992	0.9958	0.9848	0.9578	0.9050	0.8182	0.6964
	9	1	1	1	0.9999	0.9992	0.9963	0.9876	0.9662	0.9231	0.8491
	10	1	1	1	1	0.9999	0.9993	0.9972	0.9907	0.9745	0.9408
	11	1	1	1	1	1	0.9999	0.9995	0.9981	0.9937	0.9824
	12	1	1	1	1	1	1	0.9999	0.9997	0.9989	0.9963
	13	1	1	1	1	1	1	1	1	0.9999	0.9995
	14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
16	0	0.4401	0.1853	0.0743	0.0281	0.0100	0.0033	0.0010	0.0003	0.0001	0.0000
	1	0.8108	0.5147	0.2839	0.1407	0.0635	0.0261	0.0098	0.0033	0.0010	0.0003
	2	0.9571	0.7892	0.5614	0.3518	0.1971	0.0994	0.0451	0.0183	0.0066	0.0021
	3	0.9930	0.9316	0.7899	0.5981	0.4050	0.2459	0.1339	0.0651	0.0281	0.0106
	4	0.9991	0.9830	0.9209	0.7982	0.6302	0.4499	0.2892	0.1666	0.0853	0.0384
	5	0.9999	0.9967	0.9765	0.9183	0.8103	0.6598	0.4900	0.3288	0.1976	0.1051
	6	1	0.9995	0.9944	0.9733	0.9204	0.8247	0.6881	0.5272	0.3660	0.2272
	7	1	0.9999	0.9989	0.9930	0.9729	0.9256	0.8406	0.7161	0.5629	0.4018
	8	1	1	0.9998	0.9985	0.9925	0.9743	0.9329	0.8577	0.7441	0.5982
	9	1	1	1	0.9998	0.9984	0.9929	0.9771	0.9417	0.8759	0.7728
	10	1	1	1	1	0.9997	0.9984	0.9938	0.9809	0.9514	0.8949
	11	1	1	1	1	1	0.9997	0.9987	0.9951	0.9851	0.9616
	12	1	1	1	1	1	1	0.9998	0.9991	0.9965	0.9894
	13	1	1	1	1	1	1	1	0.9999	0.9994	0.9979
	14	1	1	1	1	1	1	1	1	0.9999	0.9997
	15	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
17	0	0.4181	0.1668	0.0631	0.0225	0.0075	0.0023	0.0007	0.0002	0.0000	0.0000
	1	0.7922	0.4818	0.2525	0.1182	0.0501	0.0193	0.0067	0.0021	0.0006	0.0001
	2	0.9497	0.7618	0.5198	0.3096	0.1637	0.0774	0.0327	0.0123	0.0041	0.0012
	3	0.9912	0.9174	0.7556	0.5489	0.3530	0.2019	0.1028	0.0464	0.0184	0.0064
	4	0.9988	0.9779	0.9013	0.7582	0.5739	0.3887	0.2348	0.1260	0.0596	0.0245
	5	0.9999	0.9953	0.9681	0.8943	0.7653	0.5968	0.4197	0.2639	0.1471	0.0717
	6	1	0.9992	0.9917	0.9623	0.8929	0.7752	0.6188	0.4478	0.2902	0.1662
	7	1	0.9999	0.9983	0.9891	0.9598	0.8954	0.7872	0.6405	0.4743	0.3145
	8	1	1	0.9997	0.9974	0.9876	0.9597	0.9006	0.8011	0.6626	0.5000
	9	1	1	1	0.9995	0.9969	0.9873	0.9617	0.9081	0.8166	0.6855
	10	1	1	1	0.9999	0.9994	0.9968	0.9880	0.9652	0.9174	0.8338
	11	1	1	1	1	0.9999	0.9993	0.9970	0.9894	0.9699	0.9283
	12	1	1	1	1	1	0.9999	0.9994	0.9975	0.9914	0.9755
	13	1	1	1	1	1	1	0.9999	0.9995	0.9981	0.9936
	14	1	1	1	1	1	1	1	0.9999	0.9997	0.9988
	15	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0.9999
	16	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
18	0	0.3972	0.1501	0.0536	0.0180	0.0056	0.0016	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000
	1	0.7735	0.4503	0.2241	0.0991	0.0395	0.0142	0.0046	0.0013	0.0003	0.0001
	2	0.9419	0.7338	0.4797	0.2713	0.1353	0.0600	0.0236	0.0082	0.0025	0.0007
	3	0.9891	0.9018	0.7202	0.5010	0.3057	0.1646	0.0783	0.0328	0.0120	0.0038
	4	0.9985	0.9718	0.8794	0.7164	0.5187	0.3327	0.1886	0.0942	0.0411	0.0154
	5	0.9998	0.9936	0.9581	0.8671	0.7175	0.5344	0.3550	0.2088	0.1077	0.0481
	6	1	0.9988	0.9882	0.9487	0.8610	0.7217	0.5491	0.3743	0.2258	0.1189
	7	1	0.9998	0.9973	0.9837	0.9431	0.8593	0.7283	0.5634	0.3915	0.2403
	8	1	1	0.9995	0.9957	0.9807	0.9404	0.8609	0.7368	0.5778	0.4073
	9	1	1	0.9999	0.9991	0.9946	0.9790	0.9403	0.8653	0.7473	0.5927
	10	1	1	1	0.9998	0.9988	0.9939	0.9788	0.9424	0.8720	0.7597
	11	1	1	1	1	0.9998	0.9986	0.9938	0.9797	0.9463	0.8811
	12	1	1	1	1	1	0.9997	0.9986	0.9942	0.9817	0.9519
	13	1	1	1	1	1	1	0.9997	0.9987	0.9951	0.9846
	14	1	1	1	1	1	1	1	0.9998	0.9990	0.9962
	15	1	1	1	1	1	1	1	1	0.9999	0.9993
	16	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0.9999
	17	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

$P(X \leq x)$ où $X \sim B(n,p)$

		p									
n	x	.05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45	.50
19	0	0.3774	0.1351	0.0456	0.0144	0.0042	0.0011	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000
	1	0.7547	0.4203	0.1985	0.0829	0.0310	0.0104	0.0031	0.0008	0.0002	0.0000
	2	0.9335	0.7054	0.4413	0.2369	0.1113	0.0462	0.0170	0.0055	0.0015	0.0004
	3	0.9868	0.8850	0.6841	0.4551	0.2631	0.1332	0.0591	0.0230	0.0077	0.0022
	4	0.9980	0.9648	0.8556	0.6733	0.4654	0.2822	0.1500	0.0696	0.0280	0.0096
	5	0.9998	0.9914	0.9463	0.8369	0.6678	0.4739	0.2968	0.1629	0.0777	0.0318
	6	1	0.9983	0.9837	0.9324	0.8251	0.6655	0.4812	0.3081	0.1727	0.0835
	7	1	0.9997	0.9959	0.9767	0.9225	0.8180	0.6656	0.4878	0.3169	0.1796
	8	1	1	0.9992	0.9933	0.9713	0.9161	0.8145	0.6675	0.4940	0.3238
	9	1	1	0.9999	0.9984	0.9911	0.9674	0.9125	0.8139	0.6710	0.5000
	10	1	1	1	0.9997	0.9977	0.9895	0.9653	0.9115	0.8159	0.6762
	11	1	1	1	1	0.9995	0.9972	0.9886	0.9648	0.9129	0.8204
	12	1	1	1	1	0.9999	0.9994	0.9969	0.9884	0.9658	0.9165
	13	1	1	1	1	1	0.9999	0.9993	0.9969	0.9891	0.9682
	14	1	1	1	1	1	1	0.9999	0.9994	0.9972	0.9904
	15	1	1	1	1	1	1	1	0.9999	0.9995	0.9978
	16	1	1	1	1	1	1	1	1	0.9999	0.9996
	17	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	18	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
20	0	0.3585	0.1216	0.0388	0.0115	0.0032	0.0008	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.7358	0.3917	0.1756	0.0692	0.0243	0.0076	0.0021	0.0005	0.0001	0.0000
	2	0.9245	0.6769	0.4049	0.2061	0.0913	0.0355	0.0121	0.0036	0.0009	0.0002
	3	0.9841	0.8670	0.6477	0.4114	0.2252	0.1071	0.0444	0.0160	0.0049	0.0013
	4	0.9974	0.9568	0.8298	0.6296	0.4148	0.2375	0.1182	0.0510	0.0189	0.0059
	5	0.9997	0.9887	0.9327	0.8042	0.6172	0.4164	0.2454	0.1256	0.0553	0.0207
	6	1	0.9976	0.9781	0.9133	0.7858	0.6080	0.4166	0.2500	0.1299	0.0577
	7	1	0.9996	0.9941	0.9679	0.8982	0.7723	0.6010	0.4159	0.2520	0.1316
	8	1	0.9999	0.9987	0.9900	0.9591	0.8867	0.7624	0.5956	0.4143	0.2517
	9	1	1	0.9998	0.9974	0.9861	0.9520	0.8782	0.7553	0.5914	0.4119
	10	1	1	1	0.9994	0.9961	0.9829	0.9468	0.8725	0.7507	0.5881
	11	1	1	1	0.9999	0.9991	0.9949	0.9804	0.9435	0.8692	0.7483
	12	1	1	1	1	0.9998	0.9987	0.9940	0.9790	0.9420	0.8684
	13	1	1	1	1	1	0.9997	0.9985	0.9935	0.9786	0.9423
	14	1	1	1	1	1	1	0.9997	0.9984	0.9936	0.9793
	15	1	1	1	1	1	1	1	0.9997	0.9985	0.9941
	16	1	1	1	1	1	1	1	1	0.9997	0.9987
	17	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0.9998
	18	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	19	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
21	0	0.3406	0.1094	0.0329	0.0092	0.0024	0.0006	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.7170	0.3647	0.1550	0.0576	0.0190	0.0056	0.0014	0.0003	0.0001	0.0000
	2	0.9151	0.6484	0.3705	0.1787	0.0745	0.0271	0.0086	0.0024	0.0006	0.0001
	3	0.9811	0.8480	0.6113	0.3704	0.1917	0.0856	0.0331	0.0110	0.0031	0.0007
	4	0.9968	0.9478	0.8025	0.5860	0.3674	0.1984	0.0924	0.0370	0.0126	0.0036
	5	0.9996	0.9856	0.9173	0.7693	0.5666	0.3627	0.2009	0.0957	0.0389	0.0133
	6	1	0.9967	0.9713	0.8915	0.7436	0.5505	0.3567	0.2002	0.0964	0.0392
	7	1	0.9994	0.9917	0.9569	0.8701	0.7230	0.5365	0.3495	0.1971	0.0946
	8	1	0.9999	0.9980	0.9856	0.9439	0.8523	0.7059	0.5237	0.3413	0.1917
	9	1	1	0.9996	0.9959	0.9794	0.9324	0.8377	0.6914	0.5117	0.3318
	10	1	1	0.9999	0.9990	0.9936	0.9736	0.9228	0.8256	0.6790	0.5000
	11	1	1	1	0.9998	0.9983	0.9913	0.9687	0.9151	0.8159	0.6682
	12	1	1	1	1	0.9996	0.9976	0.9892	0.9648	0.9092	0.8083
	13	1	1	1	1	0.9999	0.9994	0.9969	0.9877	0.9621	0.9064
	14	1	1	1	1	1	0.9999	0.9993	0.9964	0.9868	0.9608
	15	1	1	1	1	1	1	0.9999	0.9992	0.9963	0.9867
	16	1	1	1	1	1	1	1	0.9998	0.9992	0.9964
	17	1	1	1	1	1	1	1	1	0.9999	0.9993
	18	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0.9999
	19	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	20	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

$F(X \leq x)$ où $X \sim B(n,p)$

		p									
n	x	.05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45	.50
22	0	0.3325	0.0985	0.0280	0.0074	0.0018	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.6582	0.3392	0.1367	0.0480	0.0149	0.0041	0.0010	0.0002	0.0000	0.0000
	2	0.9052	0.6200	0.3382	0.1545	0.0606	0.0207	0.0061	0.0015	0.0003	0.0001
	3	0.9778	0.8281	0.5752	0.3320	0.1624	0.0681	0.0245	0.0076	0.0020	0.0004
	4	0.9960	0.9379	0.7738	0.5429	0.3235	0.1645	0.0716	0.0266	0.0083	0.0022
	5	0.9994	0.9818	0.9001	0.7326	0.5168	0.3134	0.1629	0.0722	0.0271	0.0085
	6	0.9999	0.9956	0.9632	0.8670	0.6994	0.4942	0.3022	0.1584	0.0705	0.0262
	7	1	0.9991	0.9886	0.9439	0.8385	0.6713	0.4736	0.3038	0.1518	0.0689
	8	1	0.9999	0.9970	0.9799	0.9254	0.8135	0.6466	0.4540	0.2764	0.1431
	9	1	1	0.9993	0.9939	0.9705	0.9084	0.7916	0.6244	0.4350	0.2617
	10	1	1	0.9999	0.9984	0.9900	0.9613	0.9030	0.7720	0.6037	0.4159
	11	1	1	1	0.9997	0.9971	0.9860	0.9526	0.8793	0.7543	0.5841
	12	1	1	1	0.9999	0.9993	0.9957	0.9820	0.9449	0.8672	0.7383
	13	1	1	1	1	0.9999	0.9989	0.9942	0.9785	0.9383	0.8569
	14	1	1	1	1	1	0.9998	0.9984	0.9930	0.9757	0.9331
	15	1	1	1	1	1	1	0.9997	0.9981	0.9920	0.9738
	16	1	1	1	1	1	1	0.9999	0.9996	0.9979	0.9915
	17	1	1	1	1	1	1	1	0.9999	0.9995	0.9978
	18	1	1	1	1	1	1	1	1	0.9999	0.9996
	19	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0.9999
	20	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	21	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
23	0	0.3074	0.0886	0.0238	0.0059	0.0013	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.6794	0.3151	0.1204	0.0398	0.0116	0.0030	0.0007	0.0001	0.0000	0.0000
	2	0.8948	0.5920	0.3080	0.1332	0.0492	0.0157	0.0043	0.0010	0.0002	0.0000
	3	0.9742	0.8073	0.5306	0.2965	0.1370	0.0538	0.0181	0.0052	0.0012	0.0002
	4	0.9951	0.9269	0.7440	0.5007	0.2832	0.1356	0.0551	0.0190	0.0055	0.0013
	5	0.9992	0.9774	0.8811	0.6947	0.4685	0.2688	0.1309	0.0540	0.0186	0.0053
	6	0.9999	0.9942	0.9537	0.8402	0.6537	0.4399	0.2534	0.1240	0.0510	0.0173
	7	1	0.9988	0.9848	0.9285	0.8037	0.6181	0.4136	0.2373	0.1152	0.0466
	8	1	0.9998	0.9958	0.9727	0.9037	0.7709	0.5860	0.3884	0.2203	0.1050
	9	1	1	0.9990	0.9911	0.9592	0.8759	0.7408	0.5562	0.3636	0.2024
	10	1	1	0.9998	0.9975	0.9851	0.9454	0.8575	0.7129	0.5278	0.3388
	11	1	1	1	0.9994	0.9954	0.9786	0.9318	0.8364	0.6865	0.5000
	12	1	1	1	0.9999	0.9988	0.9928	0.9717	0.9187	0.8164	0.6612
	13	1	1	1	1	0.9997	0.9979	0.9900	0.9651	0.9063	0.7976
	14	1	1	1	1	0.9999	0.9995	0.9970	0.9872	0.9589	0.9050
	15	1	1	1	1	1	0.9999	0.9992	0.9960	0.9847	0.9534
	16	1	1	1	1	1	1	0.9998	0.9990	0.9952	0.9827
	17	1	1	1	1	1	1	1	0.9998	0.9988	0.9947
	18	1	1	1	1	1	1	1	1	0.9998	0.9987
	19	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0.9998
	20	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	21	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	22	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
24	0	0.2920	0.0798	0.0202	0.0047	0.0010	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.6608	0.2925	0.1059	0.0331	0.0090	0.0022	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000
	2	0.8841	0.5643	0.2798	0.1145	0.0398	0.0119	0.0030	0.0007	0.0001	0.0000
	3	0.9702	0.7857	0.5049	0.2639	0.1150	0.0424	0.0133	0.0035	0.0008	0.0001
	4	0.9940	0.9149	0.7134	0.4599	0.2466	0.1111	0.0422	0.0134	0.0036	0.0008
	5	0.9990	0.9723	0.8606	0.6559	0.4222	0.2288	0.1044	0.0409	0.0137	0.0033
	6	0.9999	0.9925	0.9428	0.8111	0.6074	0.3886	0.2106	0.0960	0.0364	0.0113
	7	1	0.9983	0.9801	0.9108	0.7662	0.5647	0.3575	0.1919	0.0863	0.0320
	8	1	0.9997	0.9941	0.9638	0.8787	0.7250	0.5257	0.3279	0.1730	0.0758
	9	1	0.9999	0.9985	0.9874	0.9453	0.8472	0.6866	0.4891	0.2991	0.1537
	10	1	1	0.9997	0.9962	0.9787	0.9258	0.8167	0.6502	0.4539	0.2706
	11	1	1	0.9999	0.9990	0.9928	0.9686	0.9058	0.7870	0.6151	0.4194
	12	1	1	1	0.9998	0.9979	0.9885	0.9577	0.8857	0.7580	0.5806
	13	1	1	1	1	0.9995	0.9964	0.9836	0.9465	0.8659	0.7294
	14	1	1	1	1	0.9999	0.9990	0.9945	0.9783	0.9352	0.8463
	15	1	1	1	1	1	0.9998	0.9984	0.9925	0.9731	0.9242
	16	1	1	1	1	1	1	0.9996	0.9978	0.9905	0.9680
	17	1	1	1	1	1	1	0.9999	0.9995	0.9972	0.9887
	18	1	1	1	1	1	1	1	0.9999	0.9993	0.9967
	19	1	1	1	1	1	1	1	1	0.9999	0.9992
	20	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0.9998
	21	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	22	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	23	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

$P(X \leq x)$ où $X \sim B(n,p)$

		p									
n	x	.05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45	.50
25	0	0.2774	0.0718	0.0172	0.0038	0.0008	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.6424	0.2712	0.0931	0.0274	0.0070	0.0016	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000
	2	0.8729	0.5371	0.2537	0.0982	0.0321	0.0090	0.0021	0.0004	0.0001	0.0000
	3	0.9659	0.7636	0.4711	0.2340	0.0962	0.0332	0.0097	0.0024	0.0005	0.0001
	4	0.9928	0.9020	0.6821	0.4207	0.2137	0.0905	0.0320	0.0095	0.0023	0.0005
	5	0.9988	0.9666	0.8385	0.6167	0.3783	0.1935	0.0826	0.0294	0.0086	0.0020
	6	0.9998	0.9905	0.9305	0.7800	0.5611	0.3407	0.1734	0.0736	0.0258	0.0073
	7	1	0.9977	0.9745	0.8909	0.7265	0.5118	0.3061	0.1536	0.0639	0.0216
	8	1	0.9995	0.9920	0.9532	0.8506	0.6769	0.4668	0.2735	0.1340	0.0539
	9	1	0.9999	0.9979	0.9827	0.9287	0.8106	0.6303	0.4246	0.2424	0.1148
	10	1	1	0.9995	0.9944	0.9703	0.9022	0.7712	0.5858	0.3843	0.2122
	11	1	1	0.9999	0.9985	0.9893	0.9558	0.8746	0.7323	0.5426	0.3450
	12	1	1	1	0.9996	0.9966	0.9825	0.9396	0.8462	0.6937	0.5000
	13	1	1	1	0.9999	0.9991	0.9940	0.9745	0.9222	0.8173	0.6550
	14	1	1	1	1	0.9998	0.9982	0.9907	0.9656	0.9040	0.7878
	15	1	1	1	1	1	0.9995	0.9971	0.9868	0.9560	0.8852
	16	1	1	1	1	1	0.9999	0.9992	0.9957	0.9826	0.9461
	17	1	1	1	1	1	1	0.9998	0.9988	0.9942	0.9784
	18	1	1	1	1	1	1	1	0.9997	0.9984	0.9927
	19	1	1	1	1	1	1	1	0.9999	0.9996	0.9980
	20	1	1	1	1	1	1	1	1	0.9999	0.9995
	21	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0.9999
	22	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	23	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	24	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
30	0	0.2146	0.0424	0.0076	0.0012	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.5535	0.1837	0.0480	0.0105	0.0020	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.8122	0.4114	0.1514	0.0442	0.0106	0.0021	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000
	3	0.9392	0.6474	0.3217	0.1227	0.0374	0.0093	0.0019	0.0003	0.0000	0.0000
	4	0.9844	0.8245	0.5245	0.2552	0.0979	0.0302	0.0075	0.0015	0.0002	0.0000
	5	0.9967	0.9268	0.7106	0.4275	0.2026	0.0766	0.0233	0.0057	0.0011	0.0002
	6	0.9994	0.9742	0.8474	0.6070	0.3481	0.1595	0.0586	0.0172	0.0040	0.0007
	7	0.9999	0.9922	0.9302	0.7608	0.5143	0.2814	0.1238	0.0435	0.0121	0.0026
	8	1	0.9980	0.9722	0.8713	0.6736	0.4315	0.2247	0.0940	0.0312	0.0081
	9	1	0.9995	0.9903	0.9389	0.8034	0.5888	0.3575	0.1763	0.0694	0.0214
	10	1	0.9999	0.9971	0.9744	0.8943	0.7304	0.5078	0.2915	0.1350	0.0494
	11	1	1	0.9992	0.9905	0.9493	0.8407	0.6548	0.4311	0.2327	0.1002
	12	1	1	0.9998	0.9969	0.9784	0.9155	0.7802	0.5785	0.3592	0.1808
	13	1	1	1	0.9991	0.9918	0.9599	0.8737	0.7145	0.5025	0.2923
	14	1	1	1	0.9998	0.9973	0.9831	0.9348	0.8246	0.6448	0.4278
	15	1	1	1	0.9999	0.9992	0.9936	0.9699	0.9029	0.7691	0.5722
	16	1	1	1	1	0.9998	0.9979	0.9876	0.9519	0.8644	0.7077
	17	1	1	1	1	0.9999	0.9994	0.9955	0.9788	0.9286	0.8192
	18	1	1	1	1	1	0.9998	0.9986	0.9917	0.9666	0.8998
	19	1	1	1	1	1	1	0.9996	0.9971	0.9862	0.9506
	20	1	1	1	1	1	1	0.9999	0.9991	0.9950	0.9786
	21	1	1	1	1	1	1	1	0.9998	0.9984	0.9919
	22	1	1	1	1	1	1	1	1	0.9996	0.9974
	23	1	1	1	1	1	1	1	1	0.9999	0.9993
	24	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0.9998
	25	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	à	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	29	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

$P(X \leq x)$ où $X \sim B(n,p)$

		p									
n	x	.05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45	.50
35	0	0.1661	0.0250	0.0034	0.0004	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.4720	0.1224	0.0243	0.0040	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.7458	0.3663	0.0870	0.0190	0.0033	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
	3	0.9042	0.5810	0.2088	0.0605	0.0136	0.0024	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000
	4	0.9710	0.7807	0.3807	0.1435	0.0410	0.0091	0.0016	0.0002	0.0000	0.0000
	5	0.9927	0.8684	0.5689	0.2721	0.0976	0.0269	0.0058	0.0010	0.0001	0.0000
	6	0.9985	0.9448	0.7348	0.4328	0.1920	0.0650	0.0170	0.0034	0.0005	0.0001
	7	0.9997	0.9800	0.8562	0.5993	0.3223	0.1326	0.0419	0.0102	0.0019	0.0003
	8	1	0.9937	0.9311	0.7450	0.4743	0.2341	0.0890	0.0260	0.0057	0.0009
	9	1	0.9983	0.9708	0.8543	0.6263	0.3646	0.1651	0.0575	0.0152	0.0030
	10	1	0.9996	0.9890	0.9253	0.7581	0.5100	0.2716	0.1123	0.0354	0.0083
	11	1	0.9999	0.9963	0.9656	0.8579	0.6516	0.4019	0.1952	0.0729	0.0205
	12	1	1	0.9989	0.9858	0.9244	0.7729	0.5423	0.3057	0.1344	0.0448
	13	1	1	0.9997	0.9947	0.9637	0.8650	0.6760	0.4361	0.2233	0.0877
	14	1	1	0.9999	0.9982	0.9842	0.9269	0.7891	0.5728	0.3376	0.1553
	15	1	1	1	0.9995	0.9938	0.9641	0.8744	0.7003	0.4685	0.2498
	16	1	1	1	0.9999	0.9978	0.9840	0.9318	0.8065	0.6024	0.3679
	17	1	1	1	1	0.9993	0.9936	0.9664	0.8857	0.7249	0.5000
	18	1	1	1	1	0.9998	0.9977	0.9850	0.9385	0.8251	0.6321
	19	1	1	1	1	0.9999	0.9992	0.9939	0.9700	0.8984	0.7502
	20	1	1	1	1	1	0.9998	0.9978	0.9867	0.9464	0.8447
	21	1	1	1	1	1	0.9999	0.9993	0.9947	0.9745	0.9123
	22	1	1	1	1	1	1	0.9998	0.9981	0.9891	0.9552
	23	1	1	1	1	1	1	0.9999	0.9994	0.9958	0.9795
	24	1	1	1	1	1	1	1	0.9998	0.9986	0.9917
	25	1	1	1	1	1	1	1	1	0.9996	0.9970
	26	1	1	1	1	1	1	1	1	0.9999	0.9991
	27	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0.9997
	28	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0.9999
	29	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	à	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	34	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
40	0	0.1285	0.0148	0.0015	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.3991	0.0805	0.0121	0.0015	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.6767	0.2228	0.0486	0.0079	0.0010	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	3	0.8619	0.4231	0.1302	0.0285	0.0047	0.0006	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
	4	0.9520	0.6290	0.2633	0.0759	0.0160	0.0026	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000
	5	0.9861	0.7937	0.4325	0.1613	0.0433	0.0086	0.0013	0.0001	0.0000	0.0000
	6	0.9966	0.9005	0.6067	0.2859	0.0962	0.0238	0.0044	0.0006	0.0001	0.0000
	7	0.9993	0.9581	0.7559	0.4371	0.1820	0.0553	0.0124	0.0021	0.0002	0.0000
	8	0.9999	0.9845	0.8646	0.5931	0.2998	0.1110	0.0303	0.0061	0.0009	0.0001
	9	1	0.9949	0.9328	0.7318	0.4395	0.1959	0.0644	0.0156	0.0027	0.0003
	10	1	0.9985	0.9701	0.8392	0.5839	0.3087	0.1215	0.0352	0.0074	0.0011
	11	1	0.9996	0.9880	0.9125	0.7151	0.4406	0.2053	0.0709	0.0179	0.0032
	12	1	0.9999	0.9957	0.9568	0.8209	0.5772	0.3143	0.1285	0.0386	0.0083
	13	1	1	0.9986	0.9806	0.8968	0.7032	0.4408	0.2112	0.0751	0.0192
	14	1	1	0.9996	0.9921	0.9456	0.8074	0.5721	0.3174	0.1326	0.0403
	15	1	1	0.9999	0.9971	0.9738	0.8849	0.6946	0.4402	0.2142	0.0769
	16	1	1	1	0.9990	0.9884	0.9367	0.7978	0.5681	0.3185	0.1341
	17	1	1	1	0.9997	0.9953	0.9680	0.8761	0.6885	0.4391	0.2148
	18	1	1	1	0.9999	0.9983	0.9852	0.9301	0.7911	0.5651	0.3179
	19	1	1	1	1	0.9994	0.9937	0.9637	0.8702	0.6844	0.4373
	20	1	1	1	1	0.9998	0.9976	0.9827	0.9256	0.7870	0.5627
	21	1	1	1	1	1	0.9991	0.9925	0.9608	0.8669	0.6821
	22	1	1	1	1	1	0.9997	0.9970	0.9811	0.9233	0.7852
	23	1	1	1	1	1	0.9999	0.9989	0.9917	0.9595	0.8659
	24	1	1	1	1	1	1	0.9996	0.9966	0.9804	0.9231
	25	1	1	1	1	1	1	0.9999	0.9988	0.9914	0.9597
	26	1	1	1	1	1	1	1	0.9996	0.9966	0.9808
	27	1	1	1	1	1	1	1	0.9999	0.9988	0.9917
	28	1	1	1	1	1	1	1	1	0.9996	0.9968
	29	1	1	1	1	1	1	1	1	0.9999	0.9989
	30	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0.9997
	31	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0.9999
	32	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	à	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

$P(X \leq x)$ où $X \sim B(n,p)$

		p									
n	x	.05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45	.50
45	0	0.0994	0.0087	0.0007	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.3350	0.0524	0.0060	0.0005	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.6077	0.1590	0.0265	0.0032	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	3	0.8134	0.3289	0.0785	0.0129	0.0016	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	4	0.9271	0.5271	0.1748	0.0382	0.0059	0.0007	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
	5	0.9761	0.7077	0.3142	0.0902	0.0179	0.0026	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000
	6	0.9934	0.8415	0.4782	0.1768	0.0446	0.0080	0.0010	0.0001	0.0000	0.0000
	7	0.9984	0.9243	0.6394	0.2975	0.0941	0.0209	0.0033	0.0004	0.0000	0.0000
	8	0.9997	0.9680	0.7745	0.4407	0.1725	0.0471	0.0091	0.0012	0.0001	0.0000
	9	0.9999	0.9880	0.8726	0.5880	0.2800	0.0934	0.0220	0.0036	0.0004	0.0000
	10	1	0.9960	0.9349	0.7205	0.4089	0.1647	0.0469	0.0094	0.0013	0.0001
	11	1	0.9988	0.9698	0.8259	0.5457	0.2620	0.0896	0.0216	0.0036	0.0004
	12	1	0.9997	0.9873	0.9005	0.6748	0.3802	0.1547	0.0446	0.0090	0.0012
	13	1	0.9999	0.9952	0.9479	0.7841	0.5088	0.2437	0.0836	0.0201	0.0033
	14	1	1	0.9983	0.9750	0.8673	0.6347	0.3533	0.1430	0.0409	0.0080
	15	1	1	0.9995	0.9890	0.9247	0.7462	0.4752	0.2249	0.0762	0.0178
	16	1	1	0.9998	0.9956	0.9605	0.8358	0.5983	0.3272	0.1302	0.0362
	17	1	1	1	0.9983	0.9809	0.9014	0.7113	0.4436	0.2056	0.0676
	18	1	1	1	0.9994	0.9915	0.9451	0.8060	0.5643	0.3015	0.1163
	19	1	1	1	0.9998	0.9965	0.9717	0.8785	0.6786	0.4131	0.1856
	20	1	1	1	0.9999	0.9987	0.9865	0.9292	0.7777	0.5318	0.2757
	21	1	1	1	1	0.9995	0.9940	0.9618	0.8564	0.6474	0.3830
	22	1	1	1	1	0.9999	0.9976	0.9809	0.9135	0.7506	0.5000
	23	1	1	1	1	1	0.9991	0.9911	0.9517	0.8350	0.6170
	24	1	1	1	1	1	0.9997	0.9962	0.9750	0.8983	0.7243
	25	1	1	1	1	1	0.9999	0.9985	0.9880	0.9418	0.8144
	26	1	1	1	1	1	1	0.9995	0.9947	0.9692	0.8837
	27	1	1	1	1	1	1	0.9998	0.9979	0.9850	0.9324
	28	1	1	1	1	1	1	0.9999	0.9992	0.9932	0.9638
	29	1	1	1	1	1	1	1	0.9997	0.9972	0.9822
	30	1	1	1	1	1	1	1	0.9999	0.9990	0.9920
	31	1	1	1	1	1	1	1	1	0.9996	0.9967
	32	1	1	1	1	1	1	1	1	0.9999	0.9988
	33	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0.9996
	34	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0.9999
	35	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	à	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	44	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

6- جدول توزيع القيم الحرجة الدنيا Wl لويلكوكسن لاشارة الرتب

Test de Wilcoxon signé

Soit M la médiane de $Y - X$, et W_+ la somme des rangs des différences positives. On rejette $H_0 : M = 0$ par rapport à :

- $H_1 : M < 0$ si $W_+ \leq B$;
- $H_1 : M > 0$ si $W_+ \geq n(n+1)/2 - B$;
- $H_1 : M \neq 0$ si $W_+ \leq B$ ou $W_+ \geq n(n+1)/2 - B$,

B étant la valeur lue dans l'une des tables ci-dessous (test unilatéral ou bilatéral).

Test bilatéral			Tests unilatéraux		
n	risque 5%	risque 1%	n	risque 5%	risque 1%
6	0		6	2	
7	2		7	2	
8	3	0	8	5	
9	5	1	9	8	2
10	8	3	10	10	4
11	10	5	11	13	7
12	13	9	12	17	9
13	17	9	13	21	12
14	21	12	14	25	15
15	25	15	15	30	19
16	29	19	16	35	23
17	34	23	17	41	27
18	40	27	18	47	32
19	46	32	19	53	37
20	52	37	20	60	43
21	59	43	21	68	48
22	66	49	22	75	53
23	73	55	23	83	61
24	81	61	24	92	68
25	89	68	25	101	76

7- جدول توزيع U لمان-وتني

TABLE DE MANN-WHITNEY

Valeurs critiques (U_{crit}) à comparer avec la valeur observée (U_{obs}) à partir de vos 2 échantillons pour un test **bilatéral** au seuil α = **0.05** ou **0.01**.

NB : n_1 et n_2 représentent le nombre d'observations dans chaque échantillon.

n_2	α	n_1																	
		3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
3	.05	--	0	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8
	.01	--	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	2	2	2	2	3	3
4	.05	--	0	1	2	3	4	4	5	6	7	8	9	10	11	11	12	13	14
	.01	--	--	0	0	0	1	1	2	2	3	3	4	5	5	6	6	7	8
5	.05	0	1	2	3	5	6	7	8	9	11	12	13	14	15	17	18	19	20
	.01	--	--	0	1	1	2	3	4	5	6	7	7	8	9	10	11	12	13
6	.05	1	2	3	5	6	8	10	11	13	14	16	17	19	21	22	24	25	27
	.01	--	0	1	2	3	4	5	6	7	9	10	11	12	13	15	16	17	18
7	.05	1	3	5	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34
	.01	--	0	1	3	4	6	7	9	10	12	13	15	16	18	19	21	22	24
8	.05	2	4	6	8	10	13	15	17	19	22	24	26	29	31	34	36	38	41
	.01	--	1	2	4	6	7	9	11	13	15	17	18	20	22	24	26	28	30
9	.05	2	4	7	10	12	15	17	20	23	26	28	31	34	37	39	42	45	48
	.01	0	1	3	5	7	9	11	13	16	18	20	22	24	27	29	31	33	36
10	.05	3	5	8	11	14	17	20	23	26	29	33	36	39	42	45	48	52	55
	.01	0	2	4	6	9	11	13	16	18	21	24	26	29	31	34	37	39	42
11	.05	3	6	9	13	16	19	23	26	30	33	37	40	44	47	51	55	58	62
	.01	0	2	5	7	10	13	16	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48
12	.05	4	7	11	14	18	22	26	29	33	37	41	45	49	53	57	61	65	69
	.01	1	3	6	9	12	15	18	21	24	27	31	34	37	41	44	47	51	54
13	.05	4	8	12	16	20	24	28	33	37	41	45	50	54	59	63	67	72	76
	.01	1	3	7	10	13	17	20	24	27	31	34	38	42	45	49	53	56	60
14	.05	5	9	13	17	22	26	31	36	40	45	50	55	59	64	67	74	78	83
	.01	1	4	7	11	15	18	22	26	30	34	38	42	46	50	54	58	63	67
15	.05	5	10	14	19	24	29	34	39	44	49	54	59	64	70	75	80	85	90
	.01	2	5	8	12	16	20	24	29	33	37	42	46	51	55	60	64	69	73
16	.05	6	11	15	21	26	31	37	42	47	53	59	64	70	75	81	86	92	98
	.01	2	5	9	13	18	22	27	31	36	41	45	50	55	60	65	70	74	79
17	.05	6	11	17	22	28	34	39	45	51	57	63	67	75	81	87	93	99	105
	.01	2	6	10	15	19	24	29	34	39	44	49	54	60	65	70	75	81	86
18	.05	7	12	18	24	30	36	42	48	55	61	67	74	80	86	93	99	106	112
	.01	2	6	11	16	21	26	31	37	42	47	53	58	64	70	75	81	87	92
19	.05	7	13	19	25	32	38	45	52	58	65	72	78	85	92	99	106	113	119
	.01	3	7	12	17	22	28	33	39	45	51	56	63	69	74	81	87	93	99
20	.05	8	14	20	27	34	41	48	55	62	69	76	83	90	98	105	112	119	127
	.01	3	8	13	18	24	30	36	42	48	54	60	67	73	79	86	92	99	105

الملحق 3: معطيات المثال التطبيقي 37

معامل الاصابة	قبضة اليد	الكتف	البطن	الظهر	الاطراف	الافراد	معامل الاصابة	قبضة اليد	الكتف	البطن	الظهر	الاطراف	الافراد
172	15	38	24	29	44	42	159	0	11	30	27	35	1
110	11	29	45	39	56	43	238	5	36	28	26	40	2
88	17	36	32	33	43	44	195	12	28	28	27	46	3
176	5	24	35	31	46	45	212	10	24	12	27	36	4
67	10	28	38	37	46	46	199	18	25	37	34	61	5
147	15	46	37	34	51	47	171	9	20	44	30	52	6
173	12	33	40	39	48	48	154	5	5	15	29	45	7
147	17	39	26	30	45	49	279	10	12	18	29	47	8
94	5	23	12	29	38	50	189	6	24	38	21	51	9
89	17	41	29	38	49	51	155	2	33	13	26	45	10
187	14	35	30	34	52	52	163	7	22	33	29	40	11
124	14	35	27	33	56	53	68	15	36	27	47	53	12
106	8	37	28	36	47	54	137	8	25	21	25	55	13
194	6	20	30	23	52	55	155	0	33	29	26	55	14
186	7	34	15	23	30	56	215	3	34	29	31	49	15
113	9	31	23	24	35	57	217	14	36	29	36	50	16
242	1	28	8	15	34	58	95	15	32	44	30	55	17
158	14	45	25	42	58	59	99	6	28	21	30	52	18
197	3	23	23	23	43	60	201	15	44	33	32	61	19
155	8	39	34	32	47	61	84	13	41	24	25	48	20
118	9	44	40	30	64	62	116	7	29	27	34	49	21
134	5	23	29	32	48	63	144	15	40	16	24	39	22
187	18	30	21	28	36	64	69	11	28	30	27	46	23
114	7	37	31	33	61	65	178	11	23	19	21	29	24
186	6	25	28	26	33	66	108	2	42	42	35	51	25
131	7	35	32	41	51	67	124	8	25	13	32	56	26
144	5	35	33	35	61	68	175	0	26	39	31	57	27
138	13	30	35	26	40	69	119	7	20	36	31	30	28
159	9	21	25	31	37	70	137	1	27	29	31	62	29
66	12	38	24	33	43	71	124	9	29	32	34	27	30
69	16	43	28	36	57	72	165	7	42	22	34	55	31
155	12	31	39	31	52	73	170	11	23	32	42	51	32
149	12	38	18	32	51	74	102	2	18	16	28	36	33
196	2	26	22	21	28	75	205	13	37	6	24	32	34
6	2	23	27	38	37	76	132	20	39	44	39	59	35

36	63	43	47	30	10	69	77	63	30	33	45	10	110
37	43	23	28	20	7	140	78	33	34	22	29	8	146
38	47	29	35	32	17	81	79	26	34	19	30	12	75
39	50	35	34	25	6	141	80	49	41	29	36	4	223
40	42	29	21	36	10	125	81	38	30	22	19	5	160
41	46	36	37	33	10	13	82	45	33	35	13	1	193
83	31	25	27	22	7	165	92	52	41	43	38	13	170
84	62	36	42	48	18	78	93	62	34	34	33	5	59
85	40	29	42	21	0	201	94	42	24	26	24	2	179
86	57	38	33	32	10	158	95	51	36	27	39	1	64
87	34	26	18	32	6	117	96	46	31	31	30	13	161
88	42	34	23	34	13	244	97	67	33	40	28	11	184
89	59	36	43	29	16	82	98	45	28	35	38	16	131
90	52	31	24	26	2	117	99	45	25	14	9	0	207
91	40	17	18	27	18	266	100	60	36	35	42	15	191