جـــامعـــة لونيسي علي البليدة2
كلية العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية وعلوم التسيير
الشهيد طالب عبد الرحمان

قسم العلوم الاقتصادية

السداسي الأول

محاضرات في مقياس

إحصاء 03

موجهة لفائدة طلبة السنة الثانية ليسانس فرع: علوم اقتصادية

د. توات نصرالدين nasreddine.touat@gmail.com

الموسم الجامعي: 2022/2021

البرنامج:

المحور الاول: المتغيرات العشوائية المنقطعة وتوزيعاتها الاحتمالية

أولا: المتغيرات العشوائية المنقطعة

ثانيا: أهم التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات العشوائية المنقطعة

المحور الثاني: المتغيرات العشوائية المستمرة وتوزيعاتها الاحتمالية

أولا: المتغيرات العشوائية المستمرة

ثانيا: أهم التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات العشوائية المستمرة

المحور الثالث: نظرية توزيع المعاينة

أولا: المجتمع والعينة

ثانيا: توزيع المعاينة للمتوسطات

ثالثا: توزيع المعاينة للنسبة

رابعا: توزيع المعاينة للفروق والمجاميع

الملاحق

أولا: السلسة رقم 01

ثانيا: السلسة رقم 02

ثالثا: السلسة رقم 03

المحور الأول: المتغيرات العشوائية المتقطعة وتوزيعاتها الاحتمالية

عند التطرق لكلمة متغير يجب التفريق بين نوعين من المتغيرات: العادية والعشوائية.

أ/ المتغير العادي: هو ذلك المتغير الذي تتغير قيمته ضمن الحدود المفروضة عليه والمعروفة مسبقاً، حيث يأخذ هذا المتغير قيمة واحدة لا تعود لأخذها مرة أخرى، أي أن قيمته تتغير بشكل حتمي.

مثلا: عمر الانسان، القامة ... الخ

ب/ المتغير العشوائي: هو المتغير الذي تتغير ضمن حدود معروفة ومعينة ولكن بشكل غير منتظم، حيث إذا أخذ قيمة يمكن أن يأخذها مرة أخرى.

مثلا: رمي قطعة نرد أو نقود، سحب كرات مختلفة من كيس ... الخ.

وهي تنقسم الى قسمين:

- متغيرات عشوائية مستمرة. (المتصلة)
- " " متقطعة (المنفصلة)

1/ تعريف المتغيرات العشوائية المتقطعة

تسمى أيضاً بالمتغيرات العشوائية المنفصلة، وهي التي تأخذ عدد منتهيا من القيم الممكنة في مجال مغلق.

كما تعرف بأنها ذلك المتغير الذي يأخذ قيما منفصلة أو مجالات غير متصلة ضمن مجال عام معين، مثل عدد الاهداف المحققة، النتيجة المحصل عليها عند رمي قطعة نرد أو نقود ... الخ

يكون المتغير العشوائي منقطعا اذا كان يحتوي على مجموعة منتهية أو غير منتهية محدودة من النقاط.

2/ الخصائص

ليكن X متغيراً عشوائيا منقطعا يأخذ القيم الممكنة والمرتبة ترتيبا تصاعديا التالية: $x_1, x_2, \dots x_n$ حيث أن $P(X=x_i)$ الاحتمالات المقابلة لكل قيمة من قيمه، بشرط:

$$\begin{cases} 1- & 0 \leq P(X=x_i) \leq 1 \\ 2- & \sum P(X=x_i) = 1 \end{cases}$$

3- قانون التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي منقطع

هو مجموعة القيم الممكنة مع الاحتمالات المرتبطة بقيم المتغيرة، نرمز للمتغيرة بحرف كبير (X) وللقيم التي تأخذها المتغيرة بحرف صغير (x).

ومن أجل الوصول إلى القانون نتبع الخطوات التالية:

* نقوم بإجراء تجربة على المتغير المدروس من خلال تكرارها عدة مرات (n رمي قطعة نرد، x_i هي عدد الأوجه) وهذا لجمع القياسات الإحصائية الممكنة للمتغير.
* وضع ترتيب تصاعدي للقيم الممكنة.
* حساب أو تحديد إمكانية ظهور كل قيمة من هذه القيم وذلك بإيجاد النسبة بين عدد الحالات الملائمة (n_i) وعدد الحالات الممكنة (N) $\quad P_i = \frac{n_i}{N}$
* نضع العرض الجدولي للقيم المتحصل عليها وإمكانيات ظهورها.

X_i	X_1	X_2	-----	X_n
$P(X_i)$	P_1	P_2	----	P_n

مثال 1: في تجربة إلقاء حجر النرد مرة واحدة ونسمي الوجه الذي يستقر عليه الحجر متغيرة عشوائية X.

حيث: n = عدد الأوجه = 6
m = عدد الرميات = 1

$n^m = 6^1 = 6$ (القيم التي يأخذها)

ونكتب:

$$P(X=1) = f(1) = \frac{1}{6} \text{ و } P(X=2) = f(2) = \frac{1}{6} \text{ و } \dots\dots \text{ و } P(X=6) = f(6) = \frac{1}{6}$$

X	1	2	3	4	5	6	Σ
$P(X_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

من الجدول السابق نلاحظ:

$$\begin{cases} 1 \geq P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{6} \geq 0 \\ - \sum P(X = x_i) = 1 \end{cases}$$

* تحقق الشرطين وبالتالي X متغير عشوائي منقطع

مثال 2 : في تجربة رمي قطعة نقود ثلاث مرات

$n^m = 2^3 = 8$

n = عدد الأوجه = 2

m = عدد الرميات = 3

لنبين توضيح عدد الاحتمالات كما يلي :

$$\Omega = \{FFF, FFP, FPF, FPP, PPP, PPF, PFP, PFF\}$$

إمكانية ظهور قيم المتغير العشوائي (الوجه او الرقم) هي $X = 0, 1, 2, 3$.

X	0	1	2	3	Σ
$P(x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

لدينا :

$$\begin{cases} P(0) \geq 1 \ , \ P(1) \geq 1 \ , \ P(2) \geq 1 \ , P(3) \geq 1 \\ \text{و} \\ \sum P(X = x_i) = 1 \end{cases}$$

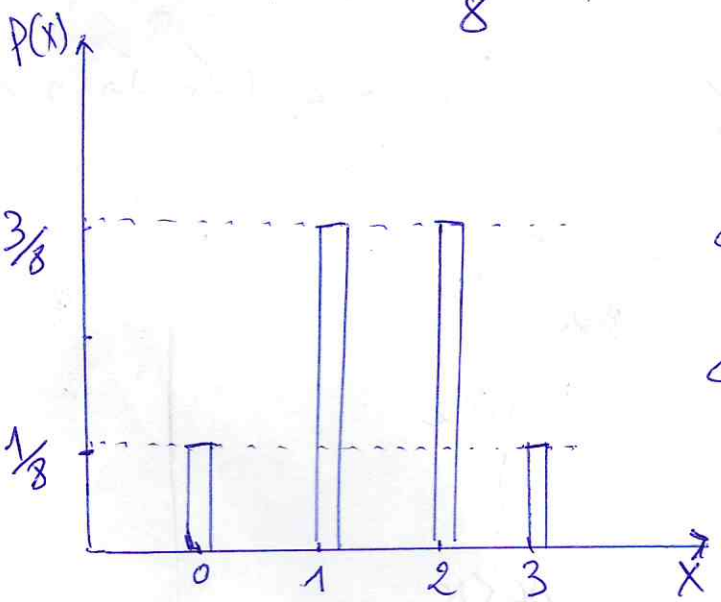
نلاحظ تحقق الشرطين وبالتالي X متغير عشوائي منقطع.

ملاحظة : يمكن كتابة دالة الكثافة الاحتمالية على الشكل :

$$P(x) = \frac{C_m^x}{n^m} \quad / \quad C_m^x = \frac{m!}{x!(m-x)!}$$

في المثال 2 السابق :

$$P(x) = \frac{C_3^x}{8}$$



الرسم البياني

ان المنحنى المرافق لهذه الدالة يسمى منحنى الاحتمالات، ويسمى العلاقة التي تربط قيم المتغير العشوائي بإمكانيات ظهورها بدالة الكثافة الاحتمالية.

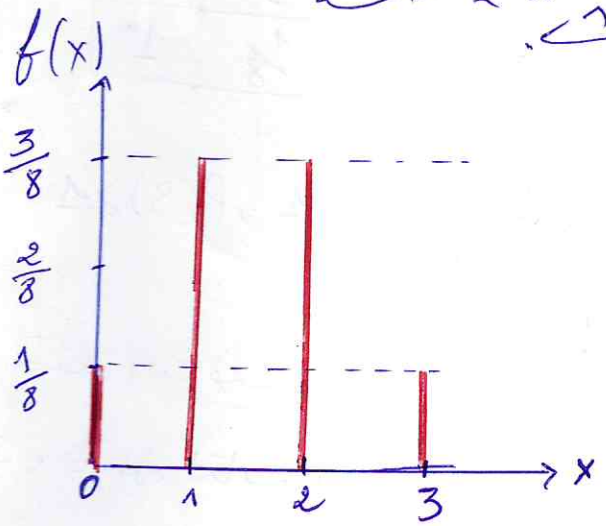
④ دالة الكثافة الاحتمالية $f(x)$ لمتغير عشوائي منقطع

عندما نحدد امكانية ظهور عناصر المجموعة الاساسية، نكون قد حددنا تابع على هذا الفراغ سماه سابقا بقانون التوزيع الاحتمالي، وهو عبارة عن علاقة رياضية أو جدول إحصائي أو خط بياني، يربط كل منهم بين القيم الممكنة للمتغير العشوائي وامكانية الظهور المرافقة لهذه القيم.

* التمثيل البياني لدالة الكثافة الاحتمالية:

يكون التمثيل من خلال أعمدة تتوازى على محور X (وليس على شكل مدرج)

مثال: نأخذ نفس المثال رقم 02 الخاص برمي قطعة النقود ثلاث مرات.



⑤ دالة التوزيع $F(x)$ لمتغير عشوائي منقطع

تسمى كذلك بالدالة التجميعية ونرمز لها بـ: $F(X)$ وتكتب على الشكل التالي:

$$F(x) = P(X < x_i)$$

ويمكن كتابة هذه الدالة على الشكل التالي:

$$F(x)\begin{cases} 0 & -\infty < x < x_1 \\ f(x_1) & x_1 < x < x_1 \\ f(x_1)+f(x_2) & x < x < x_2 \\ \vdots & \vdots \\ f(x_1)+f(x_2)+\cdots f(x_n) & x < x < x_n \end{cases}$$

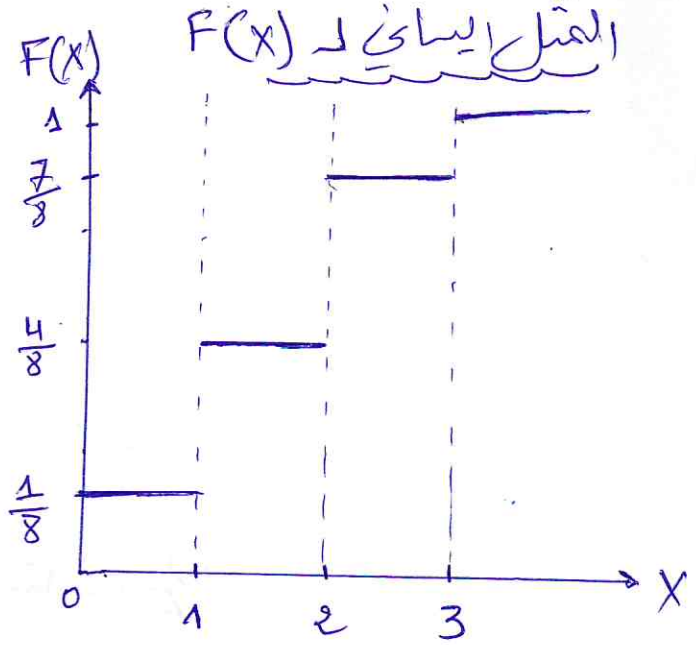
مثال : دالة التوزيع الاحتمالي لرمي قطعة النقود ثلاث مرات

X	0	1	2	3	Σ
P(Xi)	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1
F(x)= P(X≤Xi)	$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{8}{8}$	/
	0,125	0,5	0,875	1	

دالة التوزيع الاحتمالي F(x)

$$F(x)=\begin{cases} 0 & -\infty < x < 0 \\ 0,125 & x < 0 \\ 0,5 & x \leq 1 \\ 0,875 & x < 2 \\ 1 & x \leq 3 \end{cases}$$

التمثيل البياني لـ F(x)



⑥ - المميزات العددية لمتغير عشوائي منقطع وخواصها.

يقصد بالمميزات العددية لمتغير عشوائي منقطع تلك التي تدرس النزعة المركزية والتشتت.

- التوقع أو الأمل الرياضي.
- التباين والانحراف المعياري.

6-1 التوقع أو الأمل الرياضي : L'Espérance Mathématique

يعرف بأنه القيمة المتوسطة وهو عبارة عن جداء قيم المتغير العشوائي واحتمالات ظهورها، ونكتب بالشكل التالي:

$$E(x) = \sum_{i=1}^{n} P(x_i) \cdot x_i$$

مثال: التوقع الرياضي لرمي قطعة نقود ثلاث مرات

$$E(x) = (0 \cdot \frac{1}{8}) + (1 \cdot \frac{3}{8}) + (2 \cdot \frac{3}{8}) + (3 \cdot \frac{1}{8}) = 1,5 \qquad \boxed{E(x) = 1,5}$$

* الخصائص

1- $E(c) = c$

2- $E(c.X) = c.E(X)$

3- $E(c+X) = c + E(X)$

4- $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

5- $E(X.Y) = E(X).E(Y)$

حيث أن:

c قيمة ثابتة، و X, Y متغيران عشوائيان

ملاحظة: عندما تكون الاحتمالات متساوية لقيم المتغير العشوائي، فإن التوقع الرياضي هو عبارة عن مجموع قيم المتغير العشوائي على عددها.

$$P(x_1) = P(x_2) = \dots = P(x_n) \Rightarrow E(X) = \frac{x_1 + x_2 + \dots x_n}{n}$$

مثال: رمي قطعة النرد (الاحتمالات متساوية $\frac{1}{6}$)

$$E(X) = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3,5 \qquad \boxed{E(X) = 3,5}$$

ولو طبقنا القانون العادي نحصل على نفس النتيجة.

$$E(X) = \sum_{i=1}^{6} x_i P(x_i) = (1.\tfrac{1}{6}) + (2.\tfrac{1}{6}) + (3.\tfrac{1}{6}) + (4.\tfrac{1}{6}) + (5.\tfrac{1}{6}) + (6.\tfrac{1}{6})$$

$$= \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3,5 \Rightarrow \boxed{E(X) = 3,5}$$

6- التباين La Variance

هو عبارة عن مربع البعد المتوسط للقيمة المركزية أو القيمة المتوقعة، يقيس التباين تشتت قيم المتغير العشوائي حول القيمة المتوقعة لهذا المتغير.

ويرمز للتباين بالرمز $V(X)$ ويكتب على الشكل التالي:

$$V(X) = \sum P(x) \left[x_i - E(x_i)\right]^2 = E(x^2) - \left[E(x)\right]^2$$

* الخصائص:

1 - $V(c) = 0$

2 - $V(c.x) = c^2 V(x)$

3 - $V(c+x) = V(x)$

4 - $V(x \pm y) = V(x) + V(y) - 2V(x)V(y)$

ملاحظة: اذا كان x و y مستقلين

$$V(x+y) = V(x-y) = V(x) + V(y)$$

مثال: حساب التباين في حالة رمي حجر النرد مرة واحدة

$$V(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$$

لدينا:

$$E(x) = 3,5$$

$$E(x^2) = \sum x_i^2 P(x_i)$$

$$= (1^2 \cdot \frac{1}{6}) + (2^2 \cdot \frac{1}{6}) + (3^2 \cdot \frac{1}{6}) + (4^2 \cdot \frac{1}{6}) + (5^2 \cdot \frac{1}{6}) + (6^2 \cdot \frac{1}{6}) =$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{4}{6} + \frac{9}{6} + \frac{16}{6} + \frac{25}{6} + \frac{36}{6} = \frac{91}{6} = 15,1666$$

$$V(x) = 15,1666 - (3,5)^2 = 2,9166 \rightsquigarrow \boxed{V(x) = 2,9166}$$

* حساب التباين في حالة رمي قطعة النقود ثلاث مرات

لدينا

$$E(x) = 1,5$$

$$E(x^2) = (0^2 \cdot \frac{1}{8}) + (1^2 \cdot \frac{3}{8}) + (2^2 \cdot \frac{3}{8}) + (3^2 \cdot \frac{1}{8}) = \frac{3+12+9}{8} = 3$$

$$V(x) = 3 - (1,5)^2 = 0,75 \rightsquigarrow \boxed{V(x) = 0,75}$$

3.6 الانحراف المعياري L'écart type

يسمى الجذر التربيعي للتباين، وهو عبارة عن البعد المتوسط لقيم المتغير العشوائي بالنسبة للقيمة المتوقعة، وهو مقياس من مقاييس التشتت.

$$\delta(X) = \sqrt{V(X)}$$

مثال :

1- رمي حجر النرد مرة واحدة. لدينا: $V(X) = 2,9166$

$$\delta(X) = \sqrt{2,9166} \rightsquigarrow \delta(X) = 1,7078$$

2- رمي قطعة النقود ثلاث مرات لدينا: $V(X) = 0,75$

$$\delta(X) = \sqrt{0,75} \rightsquigarrow \delta(X) = 0,8660$$

ثانيا: أهم التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات العشوائية المنقطعة.

توجد العديد من التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات العشوائية المنقطعة، لعل من بين أهمها:

* توزيع وحيد الشكل.
* توزيع بارتولي.
* التوزيع الثنائي (ابديوميال).
* التوزيع فوق الهندسي.
* التوزيع الهندسي.
* التوزيع الثنائي السالب (باسكال).
* توزيع بواسون.
* القانون الثلاثي.
* القانون المتعدد.

وتستخدم هذه التوزيعات في حل العديد من المسائل في مجال التسيير الصناعي والتجاري وفي الادارة.

1 - خريطة السحب العشوائي:

يتم التطرق في خريطة السحب الاحتمالي، الى تشكيلة منها مجموعة من التوزيعات الاحتمالية، الى السحب بالاعادة والسحب بدون إعادة.

مثال:

لنفرض أن لدينا وعاء يحتوي على N كرة بألوان مختلفة: N_1 من اللون الأول، N_2 من اللون الثاني، ... N_k من اللون k، حيث أن P_i هو احتمال أو نسبة الكرات من اللون i: $P_i = \frac{n_i}{N}$، علما أن: $P_1 + P_2 + \dots + P_k = 1$، نقوم بسحب عينة من الكرات حجمها n، وأن n_i هو عدد الكرات من اللون i.

ان السحب في هذه الحالة يتم بطريقتين:

* السحب بدون إعادة (بدون إرجاع)
* السحب بالاعادة أو ما يسمى بالسحب البرنولي

*** السحب بدون إعادة:**

ان احتمال ظهور n_i كرة من اللون i عند سحب عينة من الكرات حجمها n هو عبارة عن نسبة بين عدد التوفيقات N_i من n_i وعدد التوفيقات N_2 من n_2 ويكتب الاحتمال بالشكل التالي:

$$P(n_i) = \frac{C_{N_1}^{n_i} \times C_{N_2}^{n_2}}{C_N^n}$$

n : حجم العينة

N : العدد الكلي للكرات

n_h : عدد الكرات من ألوان أخرى مقارنة باللون المدروس.

N_h : العدد الكلي من الكرات بألوان أخرى.

n_i = عدد الكرات من اللون المدروس.

N_i : العدد الكلي للكرات من اللون المدروس.

بشرط تحقق مايلي؛

1- $n_i + n_h = 1$

2- $0 \leq n_i \leq N_i$

3- $0 \leq n - n_i \leq N - N_i$

مثال تطبيقي: يحتوي وعاء على 4 كرات حمراء، 5 بيضاء و3 زرقاء، نسحب كرتين بدون اعادة.

المطلوب = تحديد الاحتمالات المرتبطة بمختلف الحالات الممكنة

الحل:

$$P(n_i) = \frac{C_{N_i}^{n_i} \times C_{N_h}^{n_h} \times C_{N_j}^{n_j}}{C_N^n} = \frac{C_4^{n_i} \times C_5^{n_h} \times C_3^{n_j}}{C_{12}^2}$$

N_i : العدد الكلي من الكرات الحمراء = 4

N_h : " " " البيضاء = 5

N_j : " " " الزرقاء = 3

N : العدد الكلي للكرات = 12

n : حجم العينة = 2

* الحالة الاولى: ظهور كرتين من اللون الاحمر $P(n_i=2, n_h=0, n_j=0) = \frac{C_4^2 \times C_5^0 \times C_3^0}{C_{12}^2} = 0,09$

* الحالة الثانية: ظهور كرة حمراء وكرة بيضاء $P(n_i=1, n_h=1, n_j=0) = \frac{C_4^1 \times C_5^1 \times C_3^0}{C_{12}^2} = 0,3$

* الحالة الثالثة: ظهور كرة حمراء وكرة زرقاء $P(n_i=1, n_h=0, n_j=1) = \frac{C_4^1 \times C_5^0 \times C_3^1}{C_{12}^2} = 0,18$

* الحالة الرابعة: ظهور كرتين بيضاء $P(n_i=0, n_h=2, n_j=0) = \frac{C_4^0 \times C_5^2 \times C_3^0}{C_{12}^2} = 0,15$

* الحالة الخامسة: ظهور كرة بيضاء وكرة زرقاء $P(n_i=0, n_h=1, n_j=1) = \frac{C_4^0 \times C_5^1 \times C_3^1}{C_{12}^2} = 0,227$

* الحالة السادسة: ظهور كرتين زرقاء. $P(n_i=0, n_h=0, n_j=2) = \frac{C_4^0 \times C_5^0 \times C_3^2}{C_{12}^2} = 0,045$

ملاحظة أن مجموع الاحتمالات الممكنة يساوي الواحد.

ملاحظة عدد العينات التي يمكن سحبها يكون بالشكل التالي:

$$C_{n+k-1}^{n} = C_{2+3-1}^{2} = C_4^2 = 6$$

2- توزيع برنولي "Loi" Distribution de Bernoulli

يرتبط هذا القانون بالتجربة الثنائية، وهذا التجربة يكون لها نتيجتين فقط (إما نجاح التجربة أو فشلها)، أي إمكانية ظهور قيمة المتغير العشوائي المدروس أو عدم ظهورها، مثال: رمي قطعة نقود (ظهور الوجه أو الرقم).
نقول عن تجربة أنها برنولية إذا كانت تحتمل نتيجتين (حدثين) متنافيين A و $\bar{A}$، ونرمز عادة بـ p "احتمال النجاح" لاحتمال تحقق الحدث A و q احتمال الحدث العكسي (الفشل) حيث $p+q=1$

يعين توزيع برنولي كما يلي:

$P(X=1)=p$, $P(X=0)=q$, $X=0,1$

ونكتب:

$$X \longrightarrow B(1,p)$$

ملاحظات:

- تكون في حالة قانون برنولي عندما تكرر التجربة الثنائية مرة واحدة، وعندما تكررها تكون في حالة القانون أو التوزيع الثنائي.
- عندما يكون السحب بالإعادة (السحب البرنولي) معنى ذلك أن عملية السحب الثانية مستقلة عن عملية السحب الأولى، والثالثة مستقلة عن الثانية وهكذا....

خصائص توزيع برنولي:

التوقع الرياضي $E(X)$.

$$E(X) = \sum x_i p_i = 1.p + 0.q \Rightarrow \boxed{E(X)=p}$$

التباين $V(X)$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = (1^2.p + 0^2.q) - p^2 = p(1-p) = pq \Rightarrow \boxed{V(X)=q.p}$$

3 - التوزيع الثنائي (بينوميال) Distribution binomiale

يتعلق القانون الثنائي بالتجربة الثنائية (تجربة برنولي) عندما يتم تكرارها n مرة، حيث أن n عدد صحيح موجب.

لدينا X متغير عشوائي منفصل (منقطع) يمثل عدد مرات الحصول على نجاح خلال تكرار تجربة n مرة، مستقلة عن بعضها البعض مع السحب بالإرجاع.

* شروط التجربة:

- احتمال النجاح + احتمال الفشل = 1 أي أن $p+q=1$
- تكرار التجربة الثنائية n مرة
- احتمال وقوع حدث معين في كل محاولة ثابت.

شروط مهمة:
$\begin{cases} n \geq 30 \\ p \geq 0,1 \end{cases}$

* طبيعة القانون

يكتب قانون التوزيع الاحتمالي:

$$P(X=x_i) = C_n^{x} \cdot p^{x} (1-p)^{n-x}$$

$x = 0, 1, 2, \dots\dots n$

$n = 1, 2, 3, \dots\dots$

$q = 1-p$

مجموعة التعريف: $\Omega_X = \{0, 1, 2, \dots\dots n\}$

$$X \longrightarrow B(n,p)$$

أو يكتب اختصارا:

* المميزات العددية للتوزيع الثنائي:

* التوقع الرياضي $E(X)$

$$E(X) = E(X_1 + X_2 + \dots + X_i + \dots + X_n) = \sum x\, p(x) = \sum x\, C_n^x\, p^x\, q^{n-x} = n.p$$

$$\boxed{E(X) = n.p}$$

* التباين $V(X)$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \sum x^2 C_n^x p^x q^{n-x} - \left[\sum x C_n^x p^x q^{n-x}\right]^2 = npq$$

$$\boxed{V(X) = npq}$$

* إذا كان X_1 و X_2 متغيرين عشوائيين مستقلين لكل منهما يتبع التوزيع الثنائي فإن مجموعهما يتبع التوزيع الثنائي

$$\left.\begin{array}{l} X_1 \longrightarrow B(n_1, p) \\ X_2 \longrightarrow B(n_2, p) \end{array}\right\} \Rightarrow (X_1 + X_2) \longrightarrow B(n_1 + n_2, p)$$

مثال تطبيقي

يصيب رامي هدفه باحتمال 0,7 عندما يطلق 6 طلقات على هدف معين.

المطلوب:

- احتمال اصابة الهدف بثلاث طلقات؟
- احتمال اصابة الهدف بطلقتين على الأقل؟
- احتمال إصابة الهدف بـ 4 طلقات على الاكثر؟
- احسب الانحراف المعياري؟

الحل:

نلاحظ أن التجربة الاحتمالية هي تناسبية بثبات احتمال اصابة الهدف، تكرار التجربة

احتمال اصابة الهدف p (النجاح)

احتمال عدم اصابة الهدف q (الفشل)

وبالتالي المتغير العشوائي يتبع التوزيع الثنائي "بينوميال"

لدينا:

حيث $p=0,7$

$n=6$

$$X \longrightarrow B(n,p)$$

$$X \longrightarrow B(6, 0,7)$$

مجال التعريف:

$$n=6 \Rightarrow X \in \Omega = \{0,1,2,3,4,5,6\}$$

حساب الاحتمالات:

$$P(x) = C_n^x p^x (1-p)^{n-x}$$

- $P(x=3) = C_6^3 (0,7)^3 \cdot (0,3)^{6-3} = 0,185$ $\boxed{P(x=3)=0,185} \simeq 18,5\%$

*

- $P(x \geq 2) = \sum_{k=2}^{6} C_6^k (0,7)^k (0,3)^{6-k} = P(x=2)+P(x=3)+P(x=4)+P(x=5)+P(x=6)$

ولكن حسابه كذلك على النحو التالي:

$$P(x \geq 2) = 1 - P(x<2)$$

$$= 1 - [P(x=0)+P(x=1)]$$

$$= 1 - [C_6^0 0,7^0 \cdot 0,3^6 + C_6^1 0,7^1 0,3^5] = 0,989$$

$\boxed{P(x \geq 2) = 0,989}$

$\simeq 98,9\%$

*

- $P(X \leq 4) = \sum_{K=0}^{4} C_6^K (0,7)^K (0,3)^{6-K} = P(0) + P(1) + P(2) + P(3) + P(4)$

ويمكن حسابها على الشكل التالي كذلك :

$P(X \leq 4) = 1 - P(X > 4)$

$= 1 - (P(5) + P(6)) = 1 - C_6^5 0,7^5 . 0,3^1 + C_6^6 0,7^6 . 0,3^0$

$= 1 - 0,4202$

$\boxed{P(X \leq 4) = 0,5798}$ $\simeq 57,98\%$

* حساب التوقع الرياضي $E(X)$

$E(X) = n . p = 6 \times 0,7 = 4,2$ $\boxed{E(X) = 4,2}$

* حساب التباين $V(X)$

$V(X) = npq = 6 \times 0,7 \times 0,3 = 1,26$ $\boxed{V(X) = 1,26}$

* حساب الانحراف المعياري $\sigma(X)$

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{1,26} = 1,1224$ $\boxed{\sigma(X) = 1,1224}$

4/ توزيع بواسون Distribution de Poisson

يسمى بقانون الظواهر النادرة والتي لها علاقة بالزمن، حيث تكون لدينا تجربة برنولية مكررة مرة كبيرة جدا او نهائي من المرات، سنرمز بالمتغيرة X التي تمثل عدد النجاحات تتبع التوزيع الثنائي، لكن قد يصعب حساب الاحتمال باستعمال صيغة هذا التوزيع عندما تكون n كبيرة.

مثلا احتمال ظهور زجاج اذا كانت $n = 1000$ هو: $P(20) = C_{1000}^{20} p^{20} \times q^{980}$

عندما تتكرر التجربة باستمرار يصبح عدد مرات تكرار التجربة مقاسا بالزمن، ويكون احتمال تحقق الحدث في لحظة زمن صغيرا جدا، لذلك نحتاج في هذه الحالة الى صيغة عامة تعادل صيغة التوزيع الثنائي عما n تؤول الى ∞

أمثلة

- عدد السيارات التي تصل الى محطة توزيع البنزين في الساعة
- عدد الطائرات التي تصل الى مطار معين في الساعة ... الخ

صياغة القانون الاحتمالي لتوزيع بواسون :

يعتبر قانون بواسون حالة خاصة للقانون الثنائي وهذا عند توفر الشرطان التاليان :

- احتمال النجاح يؤول الى 0 $\quad p \to 0$
- حجم العينة أو المجتمع كبير جدا $\quad n \to \infty$

أي ان قانون بواسون هو نهاية حدية للقانون الثنائي :

$$P(X=x) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ p\to 0}} C_n^x \, p^x \, q^{n-x}$$

نفرض أن $np = \lambda$

نصيغ العلاقة السابقة للشكل :

$$P(X=x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{x!(n-x)!} \cdot \frac{\lambda^x}{n^x} \cdot \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-x)!}{x!\,(n-x)!} \cdot \frac{\lambda^x}{n^x} \cdot \frac{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^x} \quad \cdots (1)$$

علما أن :

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^x = 1 \;,\; \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

وبالتالي فإن العلاقة (1) تصبح على الشكل التالي :

$$P(X=x) = \frac{\lambda^x}{x!} \cdot e^{-\lambda}$$

وهذا ما يسمى قانون بواسون

$\lambda > 0$,

$x = 0, 1, 2, \cdots\cdots$

$\Omega_x = \{0, 1, 2, \cdots, \infty\}$

$e = 2{,}71828$

λ : متوسط عدد مرات النجاح في الفترة الزمنية .

ونكتب اختصارا

$$X \longrightarrow P(\lambda)$$

* اذا كان X_1 و X_2 متغيرين عشوائيين مستقلين كل منهما يتبع توزيع بواسون فإن مجموعهما يتبع نفس التوزيع

$$\left.\begin{array}{l} X_1 \rightsquigarrow P(\lambda_1) \\ X_2 \rightsquigarrow P(\lambda_2) \end{array}\right\} \Rightarrow (X_1 + X_2) \rightsquigarrow P(\lambda_1 + \lambda_2)$$

خصائص التوزيع

- عدد مرات النجاح مستقلة في فترتين متتاليتين.
- احتمال النجاح في فترة قصيرة يتناسب مع طول هذه الفئة.
- احتمال النجاح في فترة زمنية صغيرة يكون صغيراً ويمكن إهماله

$n.p = \lambda$ مع

$p \sim 0$

$n \sim +\infty$

- التوقع الرياضي $E(X)$ والتباين $V(X)$

$$E(X) = V(X) = \lambda$$

مثال تطبيقي:

نبين أن متوسط الزبائن الذين يصلون الى محل تجاري في 15 دقيقة يساوي 10.

المطلوب:

- كتابة القانون الاحتمالي للظاهرة
- احتمال وصول 5 زبائن في 15 دقيقة
- احتمال وصول 4 زبائن في 10 دقائق.

الحل:

- X متغير عشوائي منقطع يتبع توزيع بواسون لأنه يمثل عدد مرات تحقق حدث معين خلال فترة زمنية، كما أن $\lambda > 0$، كما أن تحقق الظاهرة في فترة زمنية مستقل عن تحققها في الفترة التي قبلها وبعدها، وهكذا...

$$X \longrightarrow P(\lambda)$$

$$X \longrightarrow P(10)$$

$$P(X = x_i) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} = \frac{10^x}{x!} e^{-10}$$

X = عدد الزبائن الذين يصلون في 15 دقيقة.

* احتمال وصول 5 زبائن في 15 دقيقة:

$$P(X=5) = \frac{10^5}{5!}(2{,}718)^{-10} = 0{,}0378$$

* احتمال وصول 4 زبائن في 10 دقائق

$$P(X=4) = \frac{\left(\frac{20}{3}\right)^4}{4!}(2{,}718)^{-\frac{20}{3}} = 0{,}1048$$

$10 \longrightarrow 15$ ، $\alpha \longrightarrow 10$ ، $\alpha = \frac{10 \times 10}{15}$ ، $\alpha = \frac{20}{3}$

ملاحظة: في هذا المثال انتقلنا من فترة زمنية الى أخرى، انتقلنا من 10 زبائن في 15 دقيقة الى $\frac{20}{3}$ زبون في 10 دقائق، نقوم بحساب المتوسط او العمل الجديد بناءً على الفترة الجديدة.

الحد: (الانتاج) — الزبائن

$\alpha = \frac{10 \times 10}{15} = \frac{20}{3}$; $10 \longrightarrow 15$; $? \longrightarrow 10$

ملاحظة:

$$P(X=0) = \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda}$$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X<1) = 1 - P(X=0) = 1 - e^{-\lambda}$$

ملخص القوانين التوزيعات الاحتمالية لمتغير عشوائي منقطع

التوزيع	الاستخدام	القيم الممكنة	الاحتمال	التوقع والتباين
برنولي $X \rightsquigarrow B(1,p)$ p: احتمال النجاح q: احتمال الفشل	تجربة واحدة (غير مكررة) تقبل نتيجتين (نجاح أو فشل) $p+q=1$	$X=\{0,1\}$	$P(X=1)=p$ $P(X=0)=1-p=q$	$E(X)=p$ $V(X)=pq$
التوزيع الثنائي (بينوميال) $X \rightsquigarrow B(1,p)$ $n \geq 30$ $p \geq 0,1$	تجارب ثنائية النتيجة مكررة ومستقلة. p ثابت	$X=\{0,1,2,\dots n\}$	$P(X=x)=C_n^x p^x q^{n-x}$	$E(X)=n.p$ $V(X)=n.p.q$
توزيع بواسون $X \rightsquigarrow P(\lambda)$ $\lambda > 0$ $p \rightsquigarrow 0$ $n \rightsquigarrow \infty$	عدد التجارب في عدد كبير من التجارب البرنولية (عدد الوحدات التالفة في مصنع مثلا). أيضا عدد من الاحداث في فترة زمنية	$X=\{0,1,2,\dots \infty\}$	$P(X=x)=\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}$	$E(X)=V(X)=\lambda$

المحور الثاني: المتغيرات العشوائية المستمرة وتوزيعاتها الاحتمالية

أولا: المتغيرات العشوائية المستمرة

1/ التعريف:

* يكون المتغير العشوائي مستمرا اذا كانت قيمه عبارة عن مجموعة غير منتهية وغير محدودة من النقاط، أي أن فراغ المجموعة الأساسية الذي يولده هذا المتغير يكون مستمرا.

* المتغير العشوائي المستمر هو الذي يأخذ قيما متصلة، ويأخذ عدد لانهائي من القيم الممكنة له داخل مجال تعريفه، فإذا كان X متغير عشوائي مستمر، يقع ضمن المدى (a,b) أي أن:

$$\{X=x: a<x<b\}$$

فإن المتغير X عدد لانهائي من القيم تقع بين الحدين الادنى والاعلى (a,b)

مثال:

* كمية الألبان التي تنتجها البقرة في اليوم باللتر

$$\{X=x: 10<x<40\}$$

* فترة صلاحية حفظ الدجاج المبرد بالايام

$$\{X=x: 1<x<5\}$$

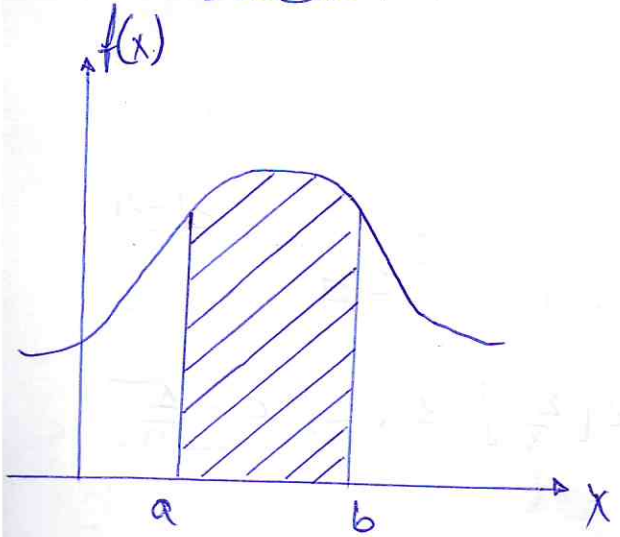
2/ التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي مستمر:

هي مجموعة القيم التي يمكن أن تأخذها المتغيرة العشوائية المستمرة والاحتمالات الملحقة بها، تسمى توزيعا كهذا دالة الكثافة الاحتمالية، أو دالة الاحتمال وهي ممثلة بمنحنى متصل.

بما أن X تأخذ عددا لا منتهيا من القيم داخل المجال فإن احتمال قيمة بعينها هو احتمال يؤول إلى الصفر $P(X=x)=0$ لذلك فإن دالة الكثافة تشمل لحساب احتمال مجال، ويكون بحساب المساحة تحت المنحنى $f(x)$ بين حدود المجال.

$$P(a<x<b)=\int_a^b f(x)\,dx$$

التمثيل البياني



ملاحظة: مما سبق نلاحظ أن إشارة التكامل هنا تقابل إشارة المجموع في حالة المتغيرة العشوائية المنقطعة.

* خصائص دالة الكثافة الاحتمالية $f(x)$:

- إذا كان X متغير عشوائي مستمر فإن احتمال أن يأخذ قيمة معينة (q_1) يساوي الصفر

$$P(X=0) \int_{q_1}^{q_1} f(x)\,dx = 0$$

- الاحتمال بين نقطتين مختلفتين q_1, q_2 يكون دائما محصورا بين الصفر والواحد.

$$P(q_1 \leq X \leq q_2) = \int_{q_1}^{q_2} f(x)\,dx \qquad 0 \leq f(x) \leq 1$$

- مجموع احتمال المجالات الجزئية يكون دائما مساويا الواحد

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$

- إذا كان X متغير عشوائي مستمر فإن عدد قيم الممكنة تكون غير منتهية، وبالتالي فإن القانون الاحتمال لا يمكن أن يكون على شكل جدول مثل المتغير المنقطع ولكنه يعطى على شكل تابع رياضي بالشكل التالي:

$$f(x) \begin{cases} P(x) & x \in [a,b] \\ 0 & x \notin [a,b] \end{cases}$$

حيث $f(x)$ هي معادلة دالة الكثافة الاحتمالية

واختصارا يمكن كتابة الشروط على النحو التالي:

1) $f(x) \geq 0$

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

مثال تطبيقي:

أوجد قيمة الثابت c التي تحقق الشرطين الأول والثاني لدالة الكثافة الاحتمالية، واحسب احتمال أن تكون X تنتمي للمجال من 1 الى 2. $P(1<X<2)$

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 & 0<x<3 \\ 0 & \text{Si non} \end{cases}$$

الحل:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{3} cx^2\,dx + \int_{3}^{+\infty} 0\,dx = 1$$

$$\Rightarrow c\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = 1 \Rightarrow c\left[\frac{27}{3}\right] = 1 \Rightarrow \boxed{c = \frac{1}{9}}$$

لكي تكون X دالة كثافة احتمالية يجب أن يكون $k = \frac{1}{9}$.

تصبح الدالة على الشكل:

$$f(x) \begin{cases} \frac{1}{9}x^2 & 0 < x < 3 \\ 0 & \text{Si non} \end{cases}$$

• حساب الاحتمال:

$$P(1 < x < 2) = P(X \leq 2) - P(X \leq 1) = F(2) - F(1).$$

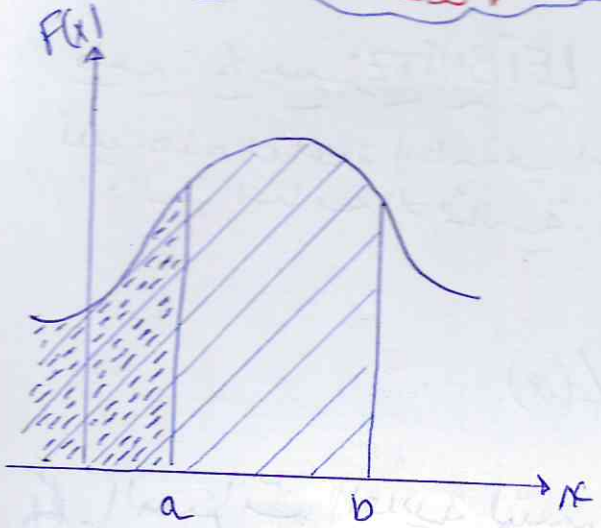
$$P(1 < x < 2) = \int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 \frac{1}{9}x^2\,dx = \frac{1}{9}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{7}{27}$$

3/ دالة التوزيع $F(x)$ للمتغير العشوائي المستمر

هي عبارة عن الدالة التجميعية لتابع الكثافة الاحتمالية $f(x)$ ويرمز لها بالرمز $F(x)$ وتكتب بالشكل التالي:

$$F(x) = f(X \leq x) = P(-\infty < X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$$

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$$



لحساب أن تكون X تنتمي إلى المجال $]a,b]$ حيث: $b > a$

$$P(a < x \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a)$$

مثال تطبيقي:

• أوجد دالة التوزيع $F(x)$ للمتغيرة المذكورة في المثال السابق

- استخدم دالة التوزيع $F(x)$ لحساب الاحتمال $P(1 < X < 2)$

لدينا:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx.$$

* $x < 0$; $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{x} 0\,dx = 0$

* $0 \leq x < 3$; $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{x} \frac{1}{9}x^2\,dx = \frac{1}{9}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^x = \frac{x^3}{27}$

* $x \geq 3$ $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{3} \frac{1}{9}x^2\,dx + \int_{3}^{+\infty} 0\,dx = 0 + \frac{1}{9}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 + 0$

$= \frac{27}{27} = 1$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x^3}{27} & 0 \leq x < 3 \\ 1 & x \geq 3 \end{cases}$$

* حساب الاحتمال:

$$P(1 < X \leq 2) = F(2) - F(1) = \frac{2^3}{27} - \frac{1^3}{27} = \frac{7}{27}$$

قاعدة لايبنيز LEIBNITZ

تفيد هذه القاعدة العامة في استنتاج أن مشتقة دالة التوزيع (الدالة التكاملية) هي دالة الكثافة الاحتمالية.

$$F(x)' = f(x)$$

$$\frac{d\int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx}{dx} = f(x) \Rightarrow \frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

4- المميزات العددية لمتغير عشوائي مستمر

* التوقع الرياضي $E(X)$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx.$$

* التباين $V(X)$

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-M)^2 f(x)\,dx = E\left[(X-M)^2\right] = E(X^2) - [E(X)]^2$$

* الانحراف المعياري δx

$$\delta(X) = \sqrt{V(X)}.$$

* تذكير:

دالة الكثافة الاحتمالية $f(x)$	دالة التوزيع $F(x)$
a	$ax + c$
$x^n \quad (n \in N)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
$\frac{1}{x}$	$\ln\|x\| + c$
$(ax+b)^n$	$\frac{1}{a} \cdot \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + c$

5- المتغير العشوائي المعياري:

ليكن X متغير عشوائي بتوقع أو متوسط M وانحراف معياري δ حيث $(\delta \neq 0)$، يسمى Z متغيرا عشوائيا معياريا ويكتب بالشكل التالي:

$$Z = \frac{X - M}{\delta}$$

* خصائص المتغير العشوائي المعياري:

- التوقع يساوي الصفر $\quad E(Z) = 0$
- التباين يساوي الواحد $\quad V(Z) = 1$
- المتغير العشوائي المعياري بدون وحدة قياس مهما كانت وحدة قياس المتغير العشوائي X.
- يستعمل المتغير العشوائي المعياري في عملية المقارنة بين التوزيعات الاحتمالية لمتغيرات عشوائية بوحدات قياس مختلفة.
- يستعمل المتغير العشوائي المعياري كذلك لإيجاد قيمة احتمالات نظرية معينة (التوزيع الطبيعي مثلا) عن طريق جداول احصائية معدة خصيصا لذلك.

ثانيا: أهم التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات العشوائية المستمرة

- التوزيع الطبيعي ***Distribution Normale***
- توزيع كاي ^{2} ***Distribution en Khi-carré (ou Khi-deux)***
- توزيع ستيودنت ***Distribution de Student***
- توزيع فيشر ***(Distribution F de Fisher-Snédecor)***

ملاحظة (تابع للمحاضرة السابقة): اذا كان X مستمرا فإن :

$$p(a \leq X \leq b) = p(a < X \leq b) = p(a \leq X < b) = p(a < X < b)$$

بمعنى الاشارتان أصغر أو أكبر مع اصغر أو يساوي أو أكبر يساوي متكافئتان في حالة التوزيعات المستمرة.

1) التوزيع الطبيعي *Distribution Normale*

يعتبر التوزيع الطبيعي احد اهم التوزيعات و اكثرها شيوعا حيث يستعمل في تفسير أغلب الظواهر الاحصائية.

أ- شكل منحى التوزيع الطبيعي و صيغته الرياضية :

يتخذ المنحنى الطبيعي شكل الجرس وهو متماثل حول النقطة الوسط اي ان العمود النازل من أعلى نقطة في المنحى على المحور الافقي يقسم المنحى الى منطقتين متساويتين كما هو موضح في الشكل في الاسفل و هو يمثل التوزيع الطبيعي و يعتبر من أهم التوزيعات الاحتمالية ومعادلته ، و في كثير الحالات تتوزع خصائص مجموعة من الافراد أو أشياء وفق منحنى يعرف بالتوزيع الطبيعي ويتميز بالخصائص التالية:

- المنوال يساوي الوسيط يساوي المتوسط : $\mu = M_d = M_o$
- التوزيع متناظر حول المتوسط الحسابي .
- المساحة الكلية تحت المنحنى الطبيعى تساوى الواحد الصحيح
- التوقع الرياضي يساوي المتوسط $\mu = E(x)$ ، التباين $V(x) = \sigma^2$

يأخذ الصيغة التالية :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-u}{\sigma}\right)^2}$$

حيث :

π : عدد ثابت يساوى تقريبا 3.1416

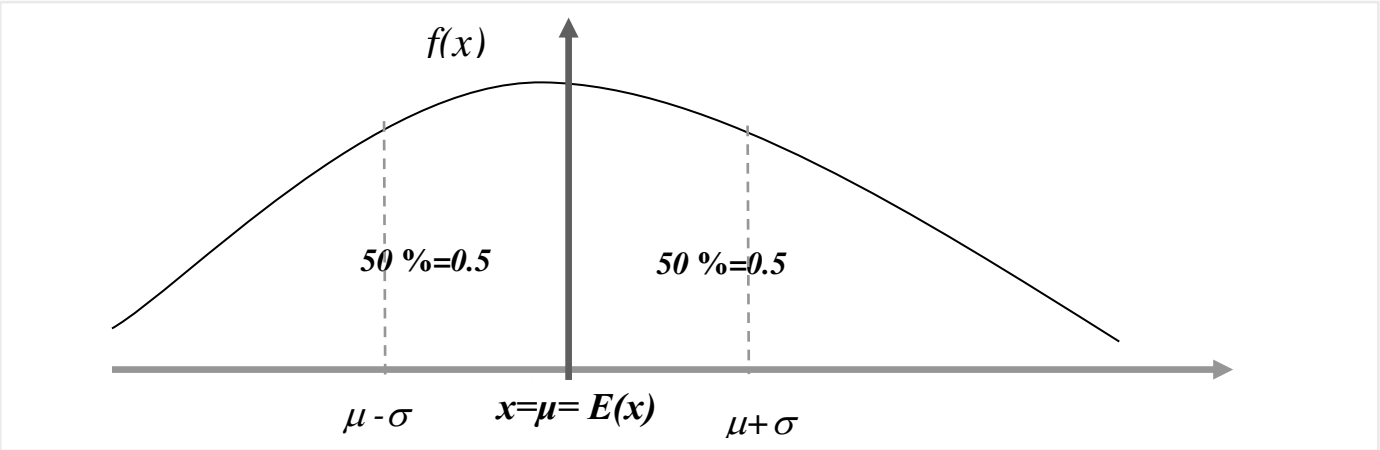
e : عدد ثابت يساوى تقريبا 2.7183

μ : هى القيمة المتوقعة لـ X يمكن أن يكون أى عدد حقيقى $E(X) = \mu$

σ^2 : هو التباين لـ X ويمكن أن يكون أى عدد حقيقى موجب $Var(X) = \sigma^2$ و تكتب

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

الشكل: **منحى دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع الطبيعي**



ب- *التوزيع الطبيعى المعياري* *Standard Normal Distribution* :

هو توزيع طبيعي وسطه الحسابي **0** وانحرافه المعياري 1 أي **(σ=1، μ=0)** و يمكن تحويل أي توزيع طبيعي الى توزيع طبيعي معياري ، اذا كان المتغير العشوائى المتصل X له توقع $\mu = E(x)$ و التباين $V(x)=\sigma^2$ فان المتغير العشوائي المعياري يصبح وفق العلاقة التالية :

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

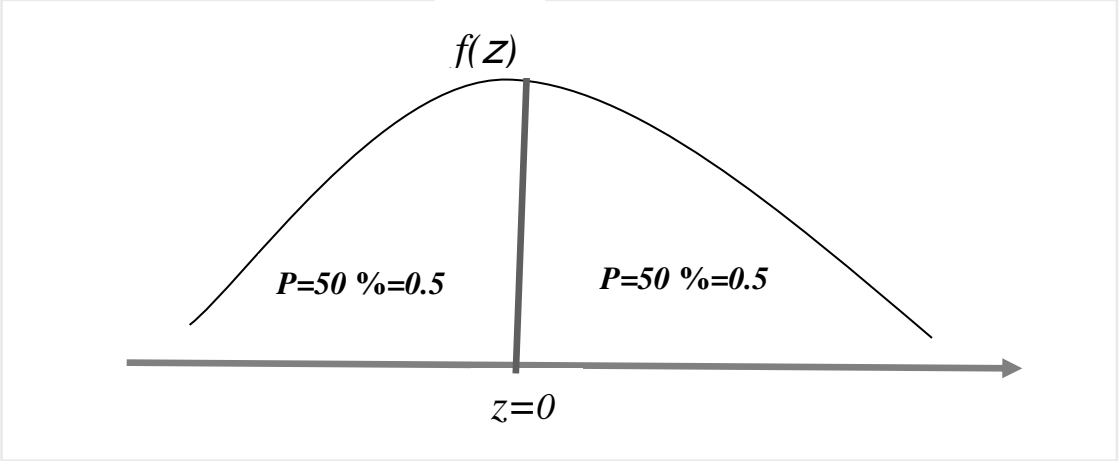
يكون له : *توقع* $\mu = 0$ و *التباين* $V(z) = 1$

يقال أن المتغير العشوائى Z له توزيع طبيعى إذا كانت دالة كثافته هي :

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\, e^{-\frac{z^2}{2}} \qquad -\infty < z < +\infty$$

أما التمثيل البياني:

الشكل: منحنى دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الطبيعي المعياري



خاصية حساب الاحتمالات :

1) $P(Z < 0) = P(Z > 0)$

2) $P(Z > z) = 1 - P(Z < z)$

3) $P(Z < -z) = P(Z > z)$

4) $P(a < Z < z) = P(Z < z) - P(Z < a)$

5) $P(-\boldsymbol{z} < Z < z) = P(Z < z) - P(Z < -z)$

$= P(Z < z) - \big(1 - P(Z < z)\big)$

$= 2P(Z < z) - 1$

مثال 01 :

اختير طالب عشوائياً من مجتمع نسبة ذكاء أفراده تتبع توزيع طبيعي وبمتوسط حسابي **80** وانحراف معياري 10 .

ما نوع المتغير العشوائي ؟ حدد توزيعه الاحتمالي .

1) احتمال أن تقل نسبة ذكاء الطالب المختار عن 85 .

2) احتمال أن تزيد نسبة ذكاء الطالب المختار عن 100 .

3) احتمال أن تتراوح نسبة ذكائه بين 95 ، 105 .

4) وضح ذلك بيانياً (المساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعي).

الحل :

المتغير العشوائي مستمر يتبع التوزيع الطبيعي :

و تكتب $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$\boldsymbol{X \sim N(80, 10^2)}$

1) احتمال أن تقل نسبة ذكاء الطالب المختار عن 85 :

نحسب العلامة المعيارية (Z) التي تقابل القيمة 85 .

$$P(x < 85) = P\left(Z < \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z < \frac{85-80}{10}\right) = P(Z < 0.5)$$

بالاستعانة بجدول التوزيع الطبيعي المعياري :

$$P(Z < 0.5) = 0.6915$$

أي أن المساحة المقابلة 0.6915 و هو الاحتمال المطلوب .

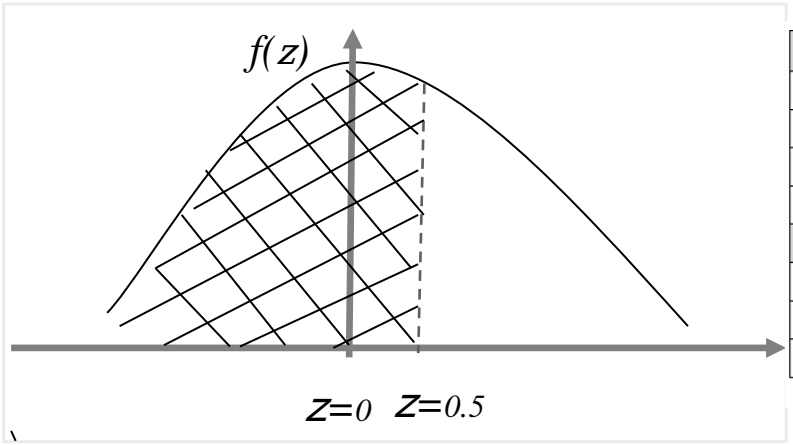
كيفية القراءة من الجدول :

يتم أول اخد اول رقم بعد فاصلة المقابل للقيمته في الجانب العمودي ثم ننتقل للرقم الثاني بعد الفاصلة و القيمة التي تقابله في الجانب الافقي و التقاطع بينهما يعطينا قيمة الاحتمال في الجدول .

كيفية القراءة من الجدول الاحصائي :

Z	**0.00**	0.01	0.02	.	.	0.09
0.0						
0.1						
.						
.						
0.5	**0.6915**					
.						
4						

التمثيل البياني



– احتمال أن تزيد نسبة ذكاء الطالب المختار عن 100 :

نحسب العلامة المعيارية (Z) التي تقابل القيمة 100

$$P(x > 100) = P\left(Z > \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z > \frac{100-80}{10}\right) = P(Z > 2)$$
$$= 1 - P(Z < 2)$$
$$= 1 - 0.9772 = 0.0228$$

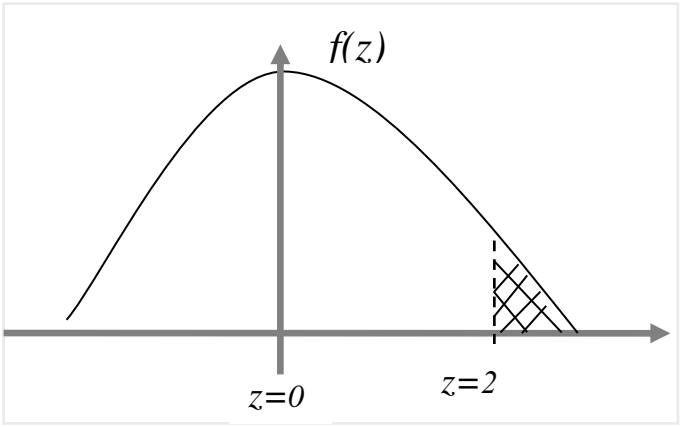
أي أن المساحة المقابلة 0.0228 و هو الاحتمال المطلوب .

كيفية القراءة من الجدول $P(Z < 2)$:

كيفية القراءة من الجدول الاحصائي :

Z	0.00	0.01	0.02	.	.	0.09
0.0						
0.1						
.						
.						
2	0.9772					
.						
4						

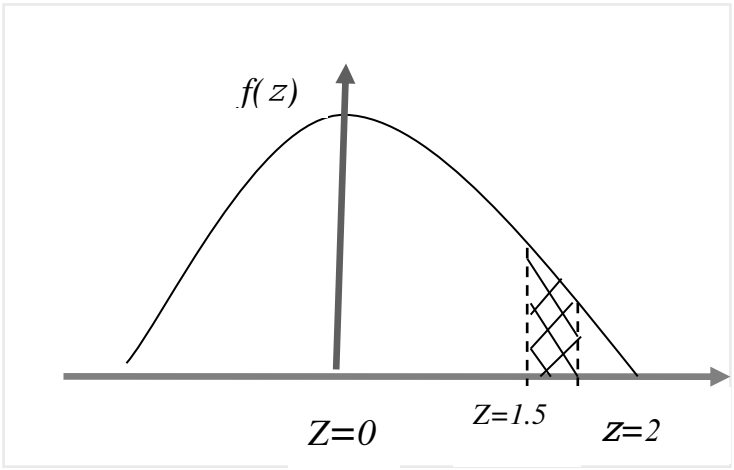
التمثيل البياني



3- احتمال أن تتراوح نسبة ذكائه بين 95 ، 105 :

$$P(95 < x < 105) = P\left(\frac{95-80}{10} < Z < \frac{105-80}{10}\right) = P(1.5 < Z < 2.5)$$
$$= P(Z < 2.5) - P(Z < 1.5)$$
$$= 0.9938 - 0.9332$$
$$= 0.0606$$

التمثيل البياني :



Z	0.00	0.01	0.02	.	.	0.09
0.0						
0.1						
.						
1.5	0.9332					
2.5	0.9938					
4						

ملاحظة:

يتم اللجوء الى القراءة العكسية عندما تكون قيمة الاحتمال(المساحة) معروفة و قيمة Z مجهولة .

مثال 02 :

المثال التالي يشمل ثلاث حالات خاصة للقراءة العكسية :

الحالة الاولى : a تقع بين 0.5 و 1.

اوجد قيمة a في حالة التالية: $P(z < a) = 0.8727$

نبحث في جدول التوزيع الطبيعي المعياري للقيمة الاقرب للاحتمال 0.8727 نجد ان القيمة هي 0.8729 و التي تقابل القيمة $a = 1.14$

الحالة الثانية : الاحتمال المقابل لـ a يقع وسط احتمالين قيمة دنيا و اخرى سفلى .

اوجد قيمة a في حالة التالية:

$$P(z < a) = 0.88$$

نبحث في جدول التوزيع الطبيعي المعياري عن القيمة الاقرب للاحتمال 0.88 من الجدول و نقرأ :

$$P(z < 1.17) = 0.8790$$
$$P(z < 1.18) = 0.8810$$

نلاحظ ان الاحتمال 0.88 يقع بالضبط في الوسط الاحتمالي وفي هذه الحالة نأخذ قيمة متوسط العددين:

$$\frac{1.17 + 1.18}{2} = 1.175$$

أي : $a = 1.175$

$$P(z < 1.175) = 0.88$$

الحالة الثالثة :

اوجد قيمة a في حالة التالية:

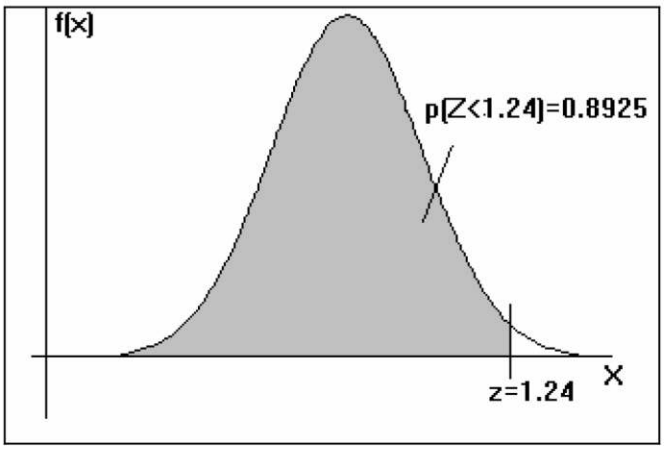
$$P(z < a) = 0.0274$$

في هذه الحالة نستعمل التناظر او التماثل

$$P(z < a) = 0.0274$$
$$P(Z < -a) = 1 - 0.0274$$
$$P(Z < -a) = 0.9726$$

أي $a = -1.92$

TABLE DE LA LOI NORMALE CENTREE REDUITE



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7	0,99989	0,99990	0,99990	0,99990	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997
4,0	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99998	0,99998	0,99998	0,99998

أولا: المجتمع والعينة

تمهيد

يعتبر أسلوب المعاينة من بين أهم الأساليب الاحصائية التي نستخدمها لدراسة مجموعة كبيرة من المتغيرات (**تسمى مجتمع**)، بقصد التعرف على خواصها عن طريق دراسة مجموعة صغيرة من هذه المفردات (**تسمى عينة**)، حيث يتم دراسة هذه الأخيرة بدقة للتعرف على خواصها ومعرفة معالمها مثل المتوسط الحسابي، وبعدها نقوم بتعميم هذه النتائج على المجتمع الأصلي للتعرف على خواصه ومعالمه وهذا هو الهدف الأساسي من الدراسة.(يجب أن يكون هذا الاختيار للمفردات بطريقة نضمن بها أن تكون العينة ممثلة للمجتمع تمثيلا صادقا)

من خلال ماسبق نطرح الاسئلة التالية:

ماهي الاسس النظرية والرياضية التي تستند عليها الاستقصاءات المختلفة؟ وكيف يمكن الاستدلال من خلال بيانات عينة على خصائص المجتمع الذي أخذت منه؟

1-المجتمع : عبارة عن جميع القيم او المفردات التي يمكن ان يأخذها المتغير ، فلو كانت دراستنا حول اطوال طلبة جامعة ما فان المجتمع في هذه الحالة هو اطوال جميع الطلبة في تلك الجامعة. والمجتمع اما ان يكون مجتمعا محدودا اي ممكن حصر عدد مفرداته . او يكون مجتمعا غير محدودا وهو المجتمع الذي من الصعب حصر عدد مفرداته مثل مجتمع نوع سمك معين في نهر.

2-العينة : فهي جزء من المجتمع فالعينة عبارة عن مجموعة من المشاهدات اختيرت بطريقة ما من المجتمع ففي بعض الاحيان دراسة المجتمع ككل قد يكون صعبا او يحتاج الى وقت وجهد ومال فيعوض ذلك دراسة العينة وصفاتها ومنها يستنتج خواص المجتمع الاصلي الذي اخذت منه العينة ونرمز للمجتمع ب N و العينة ب n ومن أمثلة ذلك :

- ترغب هيأة معينة بالبحوث السياسية في تقدير نسبة الناخبين المساندين لمرشح معين في 10 الولايات، فتقوم باستجواب 100 ناخب من كل ولاية. الناخبون في الولايات العشر يمثلون المجتمع بينما ال 1000 ناخب المستجوبون يمثلون العينة.

و تنقسم الى العينة النفادية والعينة غير النفادية حيث :

أ- **العينة النفاذية** : تكون في حالة السحب **بدون ارجاع** وتعطى علاقة عدد الحالات كالتالي :

❖ **الترتيب غير مهم**:

$$C_N^n = \frac{N!}{n!\,(N-n)!}$$

❖ **الترتيب مهم**:

$$A_n = \frac{N!}{(N-n)!}$$

ملاحظة: اذا لم يتم ذكر نوعية الترتيب في التمرين نعتبره غير مهم

ب- **العينة غير النفاذية** : تكون في حالة **السحب بالإرجاع**، و هنا يمكن ظهور المفردة في العينة أكثر من مرة وتعطى علاقة عدد الحالات كالتالي :

$$N^n$$

3-العينة العشوائية

من أجل ان تكون العينة ممثلة للمجتمع أحد الطرق المستخدمة هي العينة العشوائية من الناحية النظرية (قد يصعب تحقيق ذلك في الواقع)

ا–العينة العشوائية البسيطة :

وهذا النوع من العينات من أبسط أنواعها و يقصد بالعشوائية بأنه يكون لكل فرد من المجتمع نفس فرصة الاختيار ضمن العينة و تتم عملية الاختيار بأن توضع لكل مفردة رقم معين وتخلط الارقام مع بعضها خلطا جيدا ثم يتم سحب عدد مفردات العينة بطريقة عشوائية وهذا بطريقة السلة او بطريقة الجداول العشوائية او باستخدام الحاسب الالي .

ب–العينة العشوائية المنتظمة

يمكن تلخيص خطوات سحب العينة العشوائية المنتظمة في تقسييم المجتمع الى عدد من الفئات المتساوية الطول ثم يتم اختيار مفردة عشوائية من المجموعة الاولى ونحدد ترتيبها في المجموعة ثم نحصل على بقية المفردات باضافة طول الفئة على التوالي .

4–معالم المجتمع

نقصد بمعالم المجتمع مجموعة من خصائصه مثل المتوسط ، التباين ، معامل التماثل ، .... ومن خصائص المجتمع أيضا طبيعة توزيع الاحتمالي $f(x)$ كأن يكون طبيعيا أو غيره من التوزيعات الاخرى سواء كانت متقطعة أو مستمرة .

و سنرمز للمتوسط المجتمع بالرمز μ :

$$\mu = \frac{\sum x_i}{N}$$

أما تباين المجتمع سنرمز له σ^2:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \mu)^2}{N}$$

5–المعاينة :

يطلق على عملية اختيار العينة بالمعاينة وليست الفكرة في مجرد اختيار جزء من المجتمع فقط أيا كان و لكن من الضروري أن تتوفر لدينا بعض المعلومات عن المجتمع و التي تسمح لنا بالاختيار بعض مفرداته على اسس معينة تستطيع من خلال دراستها معرفة كثير عن هذا المجتمع .

ثانيا: توزيع المعاينة للمتوسطات

1. توزيع المعاينة للمتوسطات

اذا اخذنا عينات متكررة من مجتمع ما و قمنا بقياس متوسط لكل عينة ، فإننا نجد أن هذه المتوسطات تختلف عن بعضها البعض ، و يسمى التوزيع الاحتمال لمتوسطات العينات هذه (توزيع المعاينة للمتوسطات) ، ولكن توزيع المعاينة للمتوسطات له أيضا متوسط يعبر عنه بالرمز $\mu_{\bar{x}}$ وانحراف معياري أو خطأ معياري $\sigma_{\bar{x}}$.

نفترض:

- سحبنا عينة حجمها $\mathbf{n_1}$ متوسطها الحسابي $\bar{X}_1$
- سحبنا عينة حجمها $\mathbf{n_2}$ متوسطها الحسابي $\bar{X}_2$
- سحبنا عينة حجمها $\mathbf{n_3}$ متوسطها الحسابي $\bar{X}_3$

في الاخير نتحصل على مجموعة جديدة من المفردات تمثل المتوسطات الحسابية للعينات.

$$\Omega = \{\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3, \ldots\ldots\ldots\ldots \bar{X}_n\}$$

أ- متوسط توزيع المعاينة للمتوسطات :

النظرية 01: اذا كان μ يمثل متوسط مجتمع ما حجمه N و $\mu_{\bar{x}}$ يمثل متوسط عينة حجمها n مسحوبة من ذات المجتمع ، فإن القسمة المتوقعة لمتوسط العينة $E(\mu_{\bar{x}})$ ويعبر عنها كما يأتي : $E(\mu_{\bar{x}})=\mu_{\bar{x}}$ ولاثبات ذلك :

$$E(\mu_{\bar{x}})=E\left(\frac{1}{n}\sum x_i\right)=\frac{1}{n}\sum E(x_i)=\frac{1}{n}\sum \mu=\frac{1}{n}\mu n=\mu$$

❖ **حالة السحب بالإرجاع:**

$$\mu_{\bar{x}}=\frac{\sum \bar{x}_i}{N^n}=\mu$$

❖ **حالة السحب بدون إرجاع:**

$$\mu_{\bar{x}}=\frac{\sum \bar{x}_i}{C_N^n}=\mu$$

ب- تباين توزيع المعاينة للمتوسطات :

❖ **حالة السحب بالإرجاع:**

النظرية 02: اذا كان μ يمثل متوسط مجتمع ما و $\mu_{\bar{x}}$ يمثل متوسط عينة مسحوبة من ذات المجتمع بالارجاع ، فأن التباين$\sigma_{\bar{x}}$ (تباين توزيع المعاينة للمتوسطات) و يكتب كالتالي :

$$\sigma_{\bar{x}}^2=\frac{\sum\left(x_j-\mu_{\bar{x}}\right)^2}{N^n}=\frac{\sigma^2}{n} \qquad \sigma_{\bar{x}}^2=\frac{\sigma^2}{n}$$

حيث n يمثل حجم العينة .

أما الانحراف المعياري :

$$\sigma_{\bar{x}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

❖ **حالة السحب بدون إرجاع:**

النظرية 03: في حالة السحب بدون ارجاع فان تبيان توزيع المعاينة للمتوسطات يكون كالاتي :

$$\sigma_{\bar{x}}^2=\frac{\sum\left(x_j-\mu_{\bar{x}}\right)^2}{C_N^n}=\frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right) \qquad \sigma_{\bar{x}}^2=\frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

و يمكن اعطاء صيغة الانحراف المعياري كالتالي :

$$\sigma_{\bar{x}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}$$

و تسمى النسبة$\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$ بمعامل الارجاع .

☒ **مثال 01** :

ليكن لدينا المجتمع المتكون من المفردات التالية : 1 ، 3 ، 5.

-أحسب متوسط المجتمع μ.

-ما هي القيمة المتوقعة لمتوسط عينة مسحوبة من المجتمع في حالة السحب بالارجاع وفي حالة السحب بدون ارجاع مكونة من مفردتين $n=2$.

-قارن بين μ و $\mu_{\bar{x}}$.؟

☒ **الحل** :

من المعطيات لدينا : $N=3$, $n=2$

***حساب معالم المجتمع** :

*حساب متوسط المجتمع μ :

$$\mu = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{1+3+5}{3} = 3 .$$

*حساب تباين المجتمع σ^2:

$$\sigma^2 = \frac{\sum \left(x_i - \mu\right)^2}{N} = \frac{(1-3)^2 + (3-3)^2 + (5-3)^2}{3}$$

$$\sigma^2 = 2.66$$

*الانحراف المعياري للمجتمع :

$$\sigma = 1.6309$$

***حالة السحب بالارجاع** :

عدد العينات الممكنة: $N^n = 3^2 = 9$

*تحديد عدد الحالات الممكنة والمتوسطات:

عدد الحالات الممكنة	(1,1)	(3,1)	(5,1)	(1,3)	(3,3)	(5,3)	(1,5)	(3,5)	(5,5)
متوسطات كل عينة	1	2	3	2	3	4	3	4	5

*متوسط المعاينة للمتوسطات $\mu_{\bar{x}}$ من خلال العلاقة التالية كمايلي :

$$\mu_{\bar{x}} = \frac{\sum \bar{x}_i}{N^n} = \frac{1+2+3+2+3+4+3+4+5}{9} = \frac{27}{9}$$

$$\mu_{\bar{x}} = 3$$

*حساب تبيان توزيع المعاينة للمتوسطات $\sigma_{\bar{x}}^2$ من خلال العلاقة التالية كمايلي :

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sum \left(x_j - \mu_{\bar{x}}\right)^2}{N^n}$$

انطلاقا من جدول متوسط العينة :

$$= \frac{(1-3)^2 + (2-3)^2 + (3-3)^2 + (2-3)^2 + (3-3)^2 + (4-3) + (3-3)^2 + (4-3)^2 + +(5-3)^2}{9}$$

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{12}{9} = 1.33$$

*اختبار العلاقتين :

-في حالة السحب بالارجاع فان التوقع الرياضي لتوزيع معاينة متوسطات يساوي توقع المجتمع .

$$\mu_{\bar{x}} = \mu = 3$$

في حالة السحب بالارجاع فان تباين توزيع معاينة متوسطات تجمعه العلاقة التالية مع تباين المجتمع:

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{12}{9} = 1.33$$

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{2.66}{2} = 1.33$$

*حالة السحب بدون ارجاع :

عدد العينات الممكنة: $N^n = 3^2 = 9$

$$C_N^n = C_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!2!} = 3$$

المتوسطات الممكنة للعينة :

عدد الحالات الممكنة	(3,1)	(5,1)	(5,3)
متوسطات كل عينة	2	3	4

-متوسط المعاينة للمتوسطات $\mu_{\bar{x}}$ من خلال العلاقة التالية كمايلي :

$$\mu_{\bar{x}} = \frac{\sum \bar{x}_i}{C_N^n} = \frac{2+3+4}{3} = \frac{9}{3}$$

$$\mu_{\bar{x}} = 3$$

*حساب تبيان توزيع المعاينة للمتوسطات $\sigma_{\bar{x}}^2$ من خلال العلاقة التالية كمايلي :

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sum \left(x_j - \mu_{\bar{x}}\right)^2}{C_N^n}$$

انطلاقا من جدول متوسط العينة :

$$= \frac{(2-3)^2 + (3-3)^2 + (4-3)^2}{3}$$

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{2}{3} = 0.666$$

اختبار العلاقتين :

-في حالة السحب بدون ارجاع فان التوقع الرياضي لتوزيع معاينة متوسطات يساوي توقع المجتمع .

$$\mu_{\bar{x}} = \mu = 3$$

في حالة السحب بدون ارجاع فان تباين توزيع معاينة متوسطات تجمعه العلاقة التالية مع تباين المجتمع:

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{2}{3} = 0.66$$

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right) = \frac{2.66}{2}\left(\frac{3-2}{3-1}\right) = 0.66$$

الجدول: يوضح المعالم الاحصائية لتوزيع المعاينة للمتوسطات في حالة السحب بالارجاع و بدون ارجاع

المعالم الاحصائية	حالة السحب بالارجاع	حالة السحب بدون ارجاع
عدد العينات المسحوبة و الممكنة	N^n	C_N^n
متوسط المعاينة للمتوسطات	$\mu_{\bar{x}} = \frac{\sum \bar{x}_i}{N^n}$	$\mu_{\bar{x}} = \frac{\sum \bar{x}_i}{C_N^n}$
التباين لتوزيع المعاينة للمتوسطات	$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$	$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$
الانحراف المعياري لتوزيع المعاينة للمتوسطات	$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}$
متوسط المجتمع و متوسط توزيع المعاينة للمتوسطات في حالتي السحب بالارجاع وبدون ارجاع	$\mu_{\bar{x}} = \mu$	

2. طبيعة توزيع المعاينة للمتوسطات :

ندرس طبيعة توزيع متوسط توزيع المعاينة للمتوسطات من خلال الحالة التالية:

نظرية 04: اذا كان المجتمع ما يتبع توزيع طبيعي بمتوسط μ و تباين σ^2 فان متوسط العينة مسحوبة منه يتبع ايضا التوزيع الطبيعي بمتوسط μ و تباين $\frac{\sigma^2}{n}$ و نكتب :

$$\bar{X} \longrightarrow N(\mu_{\bar{x}}, \sigma_{\bar{x}}^2)$$

في حالة السحب بالإرجاع :

$$\bar{X} \longrightarrow N(\mu_{\bar{x}}, \frac{\sigma^2}{n})$$

في حالة السحب بدون ارجاع

$$\bar{X} \longrightarrow N(\mu_{\bar{x}}, \frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right))$$

هذه تمثل حالة السحب بالإرجاع ويمكن حساب الانحراف المعياري كما ذكرنا سابقا :

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

كما أن المتغيرة المعيارية ل $\bar{X}$ يمكن حسابها كما هو مبين في معادلة ادناه وهي تؤول الى التوزيع الطبيعي المعياري .

$$Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

$$Z \longrightarrow N(0, 1)$$

ملاحظة :

للتفريق بين حالة السحب بالإرجاع وبدون ارجاع يتم استعمال معامل ارجاع الانحراف المعياري $\frac{n}{N}$ (يسمى ايضا معامل الاستقصاء) كالتالي :

$\frac{n}{N} \geq 0.05$ ← معناه السحب بدون ارجاع

$\frac{n}{N} < 0.05$ ← معناه السحب بالإرجاع

-كما تجدر الاشارة انه في حالة المجتمع غير محدود يكون السحب بالإرجاع (في هذه الحالة لا يتم ذكر حجم المجتمع في التمرين).

النظرية 05: نظرية النهاية المركزية اذا كان المجتمع ما يتبع توزيع طبيعي بمتوسط μ و تباين σ^2 و أخذنا عينات عشوائية حجم كل منها n و كانت n كبيرة ($n \geq 30$) فان الوسط الحسابي $\bar{X}$ لهذه العينات يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط μ و تباين $\frac{\sigma^2}{n}$.

☒ مثال 01 :

اذا كان مجتمع ما يتبع التوزيع الطبيعي حجمه 1000 بمتوسط μ=20 و انحراف معياري $\sigma = 8$.

المطلوب :

-أحسب المتوسط و الانحراف المعياري لتوزيع المعاينة للمتوسطات في حالات التالية :

1- n=28

2- n=56

3- احسب في الحالتين $n=28$ ، $n=56$ الاحتمال $\bar{X}$ يكون محصور بين 20 و 22.

☒ الحل :

من المعطيات لدينا :

$$\sigma = 8 \quad , \quad \mu_{\bar{x}} = \mu = 20 \quad , \quad N=1000 \quad , n=28$$

***الحالة الاولى** : لما n=28

-بما ان المجتمع يتبع التوزيع الطبيعي فان توزيع المعاينة لمتوسطات العينة المسحوبة يتبع التوزيع الطبيعي .

لدينا :

$$\frac{n}{N} = \frac{28}{1000} = 0.028 < 0.05$$

مما يعني السحب بالارجاع و يمكن حساب الانحراف المعياري من العلاقة التالية :

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{8}{\sqrt{28}} = 1.51$$

و نكتب :

$$\bar{X} \longrightarrow N(\mu_{\bar{x}} , \sigma_{\bar{x}}^2)$$

$$\bar{X} \longrightarrow N(20 , \frac{64}{28})$$

حساب الاحتمال $\bar{X}$ في الحالة $n=28$، يكون محصور بين 20 و22 .

$$P(20 < \bar{X} < 22) = P\left(\frac{20-20}{1.51} < Z < \frac{22-20}{1.51}\right) = P(0 < Z < 1.32)$$

$$= P(Z < 1.32) - P(Z < 0)$$

$$= 0.9066 - 0.5$$
$$=0.4066$$

***الحالة الثانية** : لما n=56

بما ان حجم العينة n كبيرة $(n=58 \geq 30)$ فانه حسب نظرية النهاية المركزية فان الوسط الحسابي $\bar{X}$ للعينة المسحوبة يتبع التوزيع الطبيعي(يمكن الاستعانة بنظرية 01 التي اشرنا اليها سابقا في هذه الحالة)

لدينا :

$$\frac{n}{N} = \frac{58}{1000} = 0.058 > 0.05$$

مما يعني السحب بدون ارجاع و يمكن حساب الانحراف المعياري من العلاقة التالية :

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\left(\frac{N-n}{N-1}\right)} = \frac{8}{\sqrt{56}} \cdot \sqrt{\left(\frac{1000-56}{1000-1}\right)} = 1.039$$

و نكتب :

$$\bar{X} \longrightarrow N(\mu_{\bar{x}}, {\sigma_{\bar{x}}}^2)$$

$$\bar{X} \longrightarrow N(20, 1.08)$$

*حساب الاحتمال $\bar{X}$ في الحالة $n=28$، يكون محصور بين 20 و22 .

$$P(20 < \bar{X} < 22) = P\left(\frac{20-20}{1.039} < Z < \frac{22-20}{1.039}\right) = P(0 < Z < 1.92)$$
$$= P(Z < 1.32) - P(Z < 0)$$
$$= 0.9726 - 0.5$$
$$=0.4726$$

ثالثا: توزيع المعاينة للنسبة

لنفترض ان لدينا مجتمعا غير محدود موزعا توزيع ذي الحدين باحتمال وجود صفة معينة $q=1-p$ و احتمال عدم وجود هذه الصفة $1-p$ و كمثال على ذلك يكون المجتمع هو كل رميات قطعة عملة متكاملة التوازن و يكوون احتمال الحصول على الصورة $p=1/2$.

اعتبر ان كل العينات الممكنة ذات الحجم n المسحوبة من هذا المجتمع و في كل عينة نحدد احصاء نسبة النجاح p و في هذا المثال تكون النسبة تمثل نسبة عدد الصور التي نحصل عليها الى حجم العينة n و بالتالي نحصل على توزيع المعيانة الذي متوسطه μ_p و انحراف معياري σ_p في الصورة .

حيث :

$$P = \frac{N_a}{N} \quad ; \quad \bar{P} = \frac{n_a}{n}$$

N_a : عدد المفردات التي تحقق خاصية ما في مجتمع

N : حجم المجتمع

n_a : عدد المفردات التي تحقق نفس الخاصية في حجم العينة

n : حجم العينة

النظرية 06: اذا كانت P تمثل النسبة في المجتمع تحقق خاصية ما و $\bar{P}$ تمثل النسبة في العينة التي تحقق نفس الخاصية فان توزيع المعاينة يقترب من التوزيع الطبيعي حسب نظرية النهاية المركزية لما ($n \geq 30$) مع $n(1-P) > 5$.

❖ **في حالة السحب بالإرجاع**: تكون المعلمات الاحصائية كالتالي :

للنسبة المعاينة لتوزيع الحسابي المتوسط $\mu_p = P$

التباين : $$\sigma_{\bar{p}}{}^2 = \frac{P(1-p)}{n}$$

الانحراف المعياري : $$\sigma_{\bar{p}} = \sqrt{\frac{P(1-p)}{n}}$$

وتكون الكتابة الاحصائية :

$$\bar{P} \longrightarrow N\left(P, \frac{P(1-P)}{n}\right)$$

❖ **في حالة السحب بدون ارجاع** تكون المعلمات الاحصائية كالتالي:

* التباين : $$\sigma_{\bar{p}}{}^2 = \frac{P(1-p)}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

* الانحراف المعياري : $$\sigma_{\bar{p}} = \sqrt{\frac{P(1-p)}{n}}\sqrt{\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}$$

* التوقع الرياضي:

$$E(\bar{P}) = \mu_p = P$$

وتكون الكتابة الاحصائية :

$$\bar{P} \longrightarrow N\left(P, \frac{P(1-P)}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)\right)$$

☒ **مثال** :

يحتوي احدى المستشفيات على 800 مريض من بينهم 320 مريض يعاني من مرض مزمن ، اذا سحبنا عينة من 40 مريض بدون ارجاع .

-ماهي طبيعة توزيع المرضى المصابين بمرض مزمن في العينة

-ماهو احتمال ان تكون نسبة المصابين بمرض مزمن في العينة أقل من 50 %

☒ **الحل** :

$$n=40 \quad , \quad N=800 \quad , \quad Na=320 \quad , \quad P = \frac{N_a}{N} = \frac{320}{800} = 0.4$$

يوجد 40% من المرضى مصابين بمرض مزمن من اجمالي عدد المرضى في المستشفى.

-نلاحظ ان حجم العينة($n = 40 \geq 30$) وعليه فان توزيع المعاينة النسبة $\bar{P}$ يقترب من التوزيع الطبيعي حسب نظرية النهاية المركزية مع

$$n(1-P) = 40(1-0.4) = 24 > 5$$

-بما اننا في حالة السحب بدون ارجاع تكون الكتبة الاحصائية كالتالي :

$$\bar{P} \longrightarrow N\left(P, \frac{P(1-P)}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)\right)$$

مع :

$$\mu_p = P = 0.4$$

$$\sigma_{\bar{p}} = \sqrt{\frac{P(1-p)}{n}}\sqrt{\left(\frac{N-n}{N-1}\right)} = \sqrt{\frac{0.4(1-0.4)}{40}}\sqrt{\left(\frac{800-40}{800-1}\right)} = 0.75$$

$$\bar{P} \longrightarrow N(0.4\ ,0.0057)$$

*نسبة المصابين بمرض مزمن في العينة أقل من50 %

$$\mathrm{P}(\bar{\mathrm{P}} < 0.5) = P\left(\mathrm{Z} < \frac{0.5-0.4}{0.75}\right)$$
$$= \mathrm{P}(\mathrm{Z} < 0.13)$$
$$= 0.5517$$

رابعا: توزيع المعاينة للفروق والمجاميع

1. توزيع المعاينة للفرق بين متوسطي عينتين :

اذا كان $X_1 \longrightarrow N(\mu_1\ ,\sigma_1^2)$ و سحبت من مجتمعه عينة حجمها n_1 و $X_2 \longrightarrow N(\mu_2\ ,\sigma_2^2)$ و سحبت من مجتمعه عينة حجمها n_2 و كان المجتمعين مستقلين و عرفنا المتغيرين العشوائيين ($\overline{X_1}$ و $\overline{X_2}$) فان ($\overline{X_1}-\overline{X_2}$) يمثل متغيرا عشوائيا للفرق بين متوسطي العينتين وعليه فان التوقع الرياضي :

$$E(\overline{X_1}-\overline{X_2}) = E(\overline{X_1}) - E(\overline{X_2})$$
$$= \mu_1 - \mu_2$$

أما التباين :

$$V(\overline{X_1}-\overline{X_2}) = V(\overline{X_1}) + V(\overline{X_2})$$
$$= \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$$

ويصبح الانحراف المعياري :

$$\sigma_{\dot{x}_1-x_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

النظرية 07: اذا كان المجتمعين يتبعان التوزيع الطبيعي فان توزيع المعاينة للفرق بين متوسطي عينيتن يتبع ايضا التوزيع الطبيعي نكتب :

$$(\overline{X_1} - \overline{X_2}) \longrightarrow N(\mu_1-\mu_2\ ;\ \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2})$$

و بالتالي :

$$Z = \frac{(\bar{X}1-\bar{X}2)-(\mu 1-\mu 2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \longrightarrow N(0;1)$$

النظرية 08 :اذا سحبت من مجتمعه ما عينة حجمها n_1 متوسطه μ_1و تباينه σ_1^2 مع سحب عينة اخرى مستقلة عن العينة الاولى و مسحوبة من مجتمع اخر متوسطه μ_2 و تباينه σ_2^2 فان توزيع المعاينة للفرق بين متوسطي العينتين $(\bar{X_1}-\bar{X_2})$ يقترب من التوزيع الطبيعي لما تكون حجم العينة كبير أي $(n_1 ; n_2) \geq 30$ وهذا استنادا الى نظرية النهاية المركزية .

☒ **مثال** :

اذا كان $X_1 \longrightarrow N(30 , 25)$ و سحبت من مجتمعه عينة حجمها 30 مشاهدة و $X_2 \longrightarrow N(20 , 16)$ و سحبت من مجتمعه عينة حجمها 35 مشاهدة أوجد توزيع الفرق بين متوسطي العينتين. ثم احسب الاحتمال :

$$P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 < 12)$$

☒ **الحل** :

لدينا :

$$(\bar{X_1} - \bar{X_2}) \longrightarrow N(\mu_1-\mu_2 ; \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2})$$

من المعطيات :

المعالم	المجتمع الاول	المجتمع الثاني
التباين	σ_1^2=25	σ_2^2=16
المتوسط	$\mu_{1=30}$	$\mu_{2=20}$
حجم العينة	n_1=30	n_2=35

فنحصل على :

$$(\bar{X_1} - \bar{X_2}) \longrightarrow N(30-20 ; \frac{25}{30} + \frac{16}{35})$$
$$(\bar{X_1} - \bar{X_2}) \longrightarrow N(10 ; 1.29)$$

و بالتالي :

$$P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 < 12) = P\left(Z < \frac{(\bar{X}1 - \bar{X}2) - 10}{\sqrt{1.29}}\right) = P\left(Z < \frac{12-10}{\sqrt{1.29}}\right)$$
$$= P(Z < 1.76)$$
$$=0.9608$$

2. **توزيع المعاينة للفرق بين نسبتي** :

النظرية 09 :اذا أخذت عينتان عشوائيتان حجماهما n1 و n2 من مجتمعين مستقلين يخضع الاول لتوزيع بيرنولي (ذو الحدين $B(1 ; P_1)$ و الثاني يخضع لتوزيع ذي الحدين $B(1 ; P_1)$ فان الفرق بين النسبتين من العينتين $(\bar{P_1} - \bar{P_2})$ يخضع تقريبا للتوزيع الطبيعي وسطه P_1-P_2 و تباينه:

$$\sigma_{\bar{p}1}{}^2 + \sigma_{\bar{p}2}{}^2 = \frac{P(1-P_1)}{n_1} + \frac{P_2(1-P_2)}{n_2}$$

وهذا لما تكون حجم العينة كبير أي $(n_1 ; n_2) \geq 30$ و نكتب :

$$(\bar{P_1} - \bar{P_2}) \longrightarrow (P_1-P_2 ; \frac{P(1-P_1)}{n_1} + \frac{P_2(1-P_2)}{n_2})$$

و بالتالي :

$$Z = \frac{(\bar{P}1 - \bar{P}2) - (P1-P2)}{\sqrt{\frac{P(1-P_1)}{n_1} + \frac{P_2(1-P_2)}{n_2}}} \longrightarrow N(0;1)$$

☒ **مثال :**

اذا كانت نسبة النجاح في امتحان توجهي في مدرسة للبنات P هي 0.7 و كانت نسبة النجاح في ذلك الامتحان في مدرسة للذكور(ب) هي 0.65 احذت عينة عشوائية حجمها n_1=70 من المدرسة (ا) و أخذت عينة عشوائية حجمها n_2=35 من المدرسة (ب) فما احتمال ان تزيد نسبة انجاح في المدرسة (ا) على نسبة النجاح في المدرسة (ب) بمقدار 0.10 على الاكثر ؟

المطلوب :

قم بايجاد: $\mathrm{P}(\bar{P}_1 - \bar{P}_2 < 0.10)$

☒ **الحل :**

$$\mathrm{P}(\overline{\mathrm{P}}_1 - \overline{\mathrm{P}}_2 < 0.10) = \mathrm{P}\left(\frac{(\bar{P}1 - \bar{P}2) - (P1 - P2)}{\sqrt{\frac{P(1-P_1)}{n_1} + \frac{P_2(1-P_2)}{n_2}}} < \frac{0.10 - (0.70 - 0.65)}{\sqrt{\frac{0.7(1-0.7)}{70} + \frac{0.(1-0.65)}{35}}}\right)$$

$$= P\left(Z < \frac{0.05}{0.097}\right) = P(Z < 0.51)$$

$$=0.6950$$

3. توزيع المعاينة للتباين و للنسبة بين تباييني عينتين :

أ- توزيع المعاينة لتباين :

النظرية 10 :اذا أخذت عينة عشوائية حجمها n من توزيع طبيعي متوسطه μ و تباينه σ^2 أي $N(\mu\,;\sigma^2)$ و كان $\sigma_{\bar{x}}^2$ هو تباين العينة فان :

$$\frac{(n-1){\sigma_{\bar{x}}}^2}{\sigma^2}$$

يخضع لتوزيع كاي تربيع بدرجات حرية $(n-1)$

و نكتب :

$$\frac{(n-1){\sigma_{\bar{x}}}^2}{\sigma^2} \longrightarrow X_{n-1}^2$$

☒ **مثال :**

أخذت عينة عشوائية حجمها n=15 من توزيع طبيعي $N(\mu\,;49)$ و كان $\sigma_{\bar{x}}^2$ أوجد احتمال التالي:

$$P(\sigma_{\bar{x}}^2 < 82.9)$$

☒ **الحل :**

$$P(\sigma_{\bar{x}}^2 < 82.9) = P\left(\frac{(n-1){\sigma_{\bar{x}}}^2}{\sigma^2} < \frac{(15-1)82.9}{49}\right)$$

$$=P(x^2 < 23.68) = 0.95$$

حيث x^2 يخضع لدرجة حرية $n-1$ أي $15-1=14$ من جدول كان التربيع نجد أن القيمة الاقر ل 23.68 هي 3.70 و بالتالي الاحتمال المقابل لها 0.95.

ب- توزيع المعاينة للنسبة بين تباين عينيتن :

النظرية 11 :ليكن $\sigma^2_{\bar{x}1}$ تباين عينة عشوائية حجمها n_1 , من مجتمع $N(\mu_1 , {\sigma_1}^2)$ حجمها من مجتمع و ليكن $\sigma^2_{\bar{x}2}$ تباين عينة عشوائية حجمها n_2 من مجتمع $N(\mu_2 , {\sigma_2}^2)$ مستقل عن الاول فان :

$$\frac{\sigma^2_{\bar{x}1}/\ \sigma^2_{\bar{x}2}}{{\sigma_1}^2/{\sigma_2}^2} = \frac{\sigma^2_{\bar{x}1}.{\sigma_1}^2}{\sigma^2_{\bar{x}2}.{\sigma_2}^2}$$

يخضع لتوزيع ذي F درجات حرية (n_1-1 , n_2-1) .

☒ **مثال :**

أخذت عينة عشوائية حجمها 11 من توزيع $N(\mu_1 , \sigma^2)$ ، و اخذت عينة عشوائية حجمها 16 من توزيع $N(\mu_2 , \sigma^2)$ مستقل عن الأول

☒ أوجد:

$$P\left(\frac{\sigma^2_{\bar{x}1}}{\sigma^2_{\bar{x}2}} \geq 3.80\right)$$

وذلك قبل معرفة القيمة $\frac{\sigma^2_{\bar{x}1}}{\sigma^2_{\bar{x}2}}$ ، بما أن تباين المجتمعين متساويين σ^2 فان التوزيع $\frac{\sigma^2_{\bar{x}1}}{\sigma^2_{\bar{x}2}}$ هو توزيع F بدرجات حرية $(15; 10)$ نجد :

$$P\left(\frac{\sigma^2_{\bar{x}1}}{\sigma^2_{\bar{x}2}} \geq 3.80\right) = 1-0.99=0.1$$

جامعة لونيسي علي - البليدة 2 -
كلية العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية
وعلوم التسيير

السنة الثانية لسانس
علوم اقتصادية
مقياس: احصاء 3
2022/2021

السلسلة رقم 01

- المتغيرات العشوائية المتقطعة وتوزيعاتها الاحتمالية -

التمرين الأول:

يرمى لاعب قطعة نرد مرة واحدة وفقا للشروط التالية:
- اذا كان الرقم الناتج 1 يحصل على نقطتين، واذا كان الرقم الناتج 4 يخسر نقطتين، أما فيما عدا ذلك فإنه يحصل على نقطة واحدة، وليكن X متغير عشوائي يمثل النقاط المحصلة.

1- ما نوع هذا المتغير العشوائي؟
2- عين التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير؟ وتأكد أنه توزيع احتمالي.

التمرين الثاني:

ليكن X متغير عشوائي يتبع التوزيع المبين في الجدول التالي:

X	0	1	2	3	4	5
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{a}$	$\frac{2}{a}$	$\frac{3}{a}$	$\frac{4}{a}$	$\frac{3}{2a}$	$\frac{1}{2a}$

1- ما نوع المتغير العشوائي X ؟ أوجد قيمة a التي تحقق جدول التوزيع الاحتمالي.
2- أحسب التوقع الرياضي والانحراف المعياري لهذا المتغير العشوائي X؟
3- أحسب الاحتمالات التالية: $P(X>1)$ ، $P(X\leq 3)$
4- ليكن Y متغير عشوائي معرف كما يلي: $Y=-X+2$ ، أوجد كل من $E(Y)$ و $V(Y)$.

التمرين الثالث:

يحتوي وعاء أول على 6 كرات سوداء مرقمة من 1 الى 6، ويحتوي وعاء ثاني على 6 كرات بيضاء مرقمة بالشكل التالي: 2، 4، 6، 8، 10، 12، ولنفرض أن المتغير العشوائي X هو سحب كرة سوداء، والمتغير العشوائي Y هو سحب كرة بيضاء.

المطلوب:

1- حدد تابع الكثافة الاحتمالية لـ (X,Y) مع دالة التوزيع الاحتمالي؟
2- ضع التمثيل البياني لها، ماذا تلاحظ؟
3- أحسب الامل الرياضي والتباين لكل منهما، ماذا تلاحظ؟
4- حدد تابع الكثافة الاحتمالية لـ Z حيث أن $Z=X+Y$، ثم حدد دالة التوزيع والتمثيل البياني.

5- أحسب الأمل الرياضي والتباين لـ 2 ؟

6- نضع محتوى الوعاء الأول والثاني في وعاء ثالث، نعرف المتغير العشوائي T المرتبط بالسحب من الوعاء الثالث،

* حدد القانون الاحتمالي والأمل الرياضي والتباين لهذا المتغير.

التمرين الرابع: 12 نقطة

إذا كانت نسبة نجاح طلبة البكالوريا تقدر بـ 60٪، نختار عشوائيا عينة من 10 طلبة من مجموع الطلبة مع الإرجاع، وليكن X عدد الطلبة الناجحين من بين 10 طلبة.

* ما هو القانون الاحتمالي لـ X ؟ حدد التوزيع الاحتمالي؟
* أحسب الاحتمالات التالية: $P(X=0)$, $P(X=10)$, $P(X<2)$, $P(X\geq 8)$.
* أحسب التوقع الرياضي والانحراف المعياري.

التمرين الخامس: وظيفة

- إن نسبة الإنتاج التالف لأحد مصانع المصابيح هي 10٪، إذا أخذنا عينة مكونة من 5 مصابيح بشكل عشوائي من إنتاج هذا المصنع، أوجد الاحتمالات التالية:

* الحصول على مصباح واحد تالف $P(X=1)$
* الحصول على جميع المصابيح تالفة $P(X=5)$
* الحصول على مصباح واحد تالف على الأكثر $P(X\leq 1)$
* أوجد العدد المتوقع للمصابيح التالفة في العينة؟ $E(X)$

التمرين السادس:

يدخل المسافرين عشوائيا الى موقف الحافلات بمدينة البليدة بمعدل 5 مسافرين كل 10 دقائق، وليكن X عدد المسافرين الذين يصلون الى موقف الحافلات بالبليدة كل 10 دقائق

* ما هو القانون الاحتمالي لـ X ؟

أحسب ما يلي:

* احتمال وصول 3 مسافرين فقط خلال 10 دقائق.
* احتمال وصول 3 مسافرين فقط خلال نصف ساعة.
* أحسب التوقع الرياضي والانحراف المعياري.

التمرين السابع: وظيفة

يقدر العدد المتوسط لحوادث المرور في بلدية ما سنويا بـ 6 حوادث.

* عرف المتغير العشوائي في هذه المسألة.
* ما هو القانون الاحتمالي له.
* أحسب التوقع الرياضي والانحراف المعياري.
* أحسب احتمال أن نقع: - 10 حوادث مرور - أكثر من 6 حوادث مرور

$P(X>6) = 1 - P(X\leq 6)$

$P(X=10)$

بالتوفيق

2/2

جامعة لونيسي علي البليدة 2
كليــة العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

السنة الثانية علوم اقتصادية
المقياس: إحصاء 03
الموسم الجامعي: 2022/2021

السلسة رقم: 02
المتغيرات العشوائيــة المستمــرة وأهم توزيعاتهــا الاحتماليــة

التمرين 01:

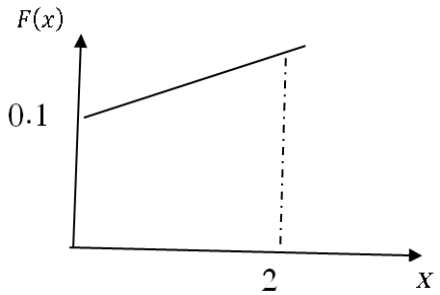
ليكن X متغير عشوائي معرف بدالة كثافة التالية :

$$f(x)\begin{cases} CX & 1 < x < 5 \\ 0 & \text{بخلاف ذلك} \end{cases}$$

1) أوجد قيمة الثابت C التي تجعل الدالة $f(x)$ كثافة احتمالية .
2) بفرض ان X *يمثل الانتاج السنوي للإحدى المؤسسات ، ماذا تمثل القيميتين* $x=1$ *و* $x=5$.
3) احسب الانتاج المتوسط و الانحراف المعياري .
4) احسب احتمال أن تنتج هذه المؤسسة:
   - اقل من ثلاث وحدات
   - أكثر من وحدتين
   - مابين 1 و 3 وحدة .

التمرين 02:

1) ليكن X متغير عشوائي بحيث الدالة $f(x)$ كثافته الاحتمالية ممثلة وفق الشكل المقابل :



   - ما هو نوع هذا المتغير العشوائي ؟
   - أوجد الصيغة الرياضية لدالة الكثافة الاحتمالية $f(x)$.

2) لتكن دالة الكثافة الاحتمالية التالية : $f(x) = \frac{-1}{2}x + 1$ المعرفة على المجال $(0, 2)$
   - أوجد دالة التوزيع الاحتمالية $F(x)$
   - أحسب الاحتمالات التالية: $p(x \leq 1)$ ، $p(0.5 < x < 2)$
   - أوجد التوقع الرياضي و التباين و الانحراف المعياري
   - أحسب : $E(2X+1)$ و $V(2X+1)$

التمرين 03:

إذا كان طول الشخص في مجتمع يتوزع وفق التوزيع الطبيعي بمتوسط 160 سم وانحراف معياري 5 سم

- مثل الاحتمالات التالية بمساحات تحت منحنى التوزيع الطبيعي: (بدون حساب الاحتمال)

$Pr(X > 180)$, $Pr(X > 160)$, $Pr(140 \leq X \leq 180)$, $Pr(X < 100)$

التمرين 04:

إذا كان الدخل الشهري للعائلات في ولاية ما يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط 15000 دج وانحراف معياري 1500 دج

- أحسب ما يلي:

1) نسبة العائلات التي يفوق دخلها المعدل العام.
2) نسبة العائلات التي يتراوح دخلها بين 13500 دج و 16500 دج.
3) نسبة العائلات التي يزيد دخلها عن 18000 دج
4) نسبة العائلات التي يقل دخلها عن 10000 دج.

التمرين 05:

إذا كانت نفقات إحدى الشركات في السنة تتبع التوزيع الطبيعي الذي وسطه 100 مليون دج وانحراف معياري قدره 5 مليون دج

- أحسب ما يلي:

1) ما هو احتمال أن تزيد نفقات الشركة عن 95 مليون دج خلال سنة ما؟
2) ما هو احتمال أن تقل نفقات الشركة عن 104 مليون دج خلال سنة ما؟
3) ما هو احتمال أن نفقات الشركة ستتراوح ما بين 93.5 و 105.5 مليون دج خلال سنة ما؟
4) احسب قيمة $\boldsymbol{\alpha}$ حيث : $Pr(X < \boldsymbol{\alpha}) = 0.75$

التمرين 06:

أحسب كل من المتوسط الحسابي والتباين للمتغير العشوائي **X** يتبع التوزيع الطبيعي حيث لدينا:

$$Pr(X \leq \mathbf{2}) = 0{,}5793$$

و

$$Pr(X > \mathbf{5}) = 0{,}2119$$

التمرين 07:

ليكن المتغير العشوائي **X** يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط $\boldsymbol{\mu = 11}$ وانحراف معياري $\boldsymbol{\sigma}$

أوجد الانحراف المعياري $\boldsymbol{\sigma}$ من أجل: $Pr(10.4125 < X < 11.5875) = 0.76$

بالتوفيـــــــق

جامعة البليدة -2-
كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير
قسم العلوم الاقتصادية

السلسلة رقم : 03
توزيعـــات المعاينـــة

التمرين 01:

ليكن لدينا مجتمع محدود مكون من القيم التالية : $\Omega = \{2;3;4;7\}$

1)- أحسب متوسط المجتمع وإنحرافه المعياري

2)- نسحب عينة حجمها 2 بالإرجاع من هذا المجتمع

- أوجد عدد العينات الممكنة ذات الحجم 2 التي يمكن سحبها من هذا المجتمع
- حدد العينات الممكنة
- أوجد توزيع المعاينة للمتوسطات
- أحسب المتوسط والانحراف المعياري لتوزيع المعاينة للمتوسطات
- أختبر العلاقتين التاليتين:

$$\mu_{\bar{x}} = \mu$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

3)- نسحب عينة حجمها 2 بدون إرجاع من هذا المجتمع

- أعد الإجابة على نفس الأسئلة السابقة

التمرين 02:

إذا كانت نقاط 300 طالب في امتحان الإحصاء تتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط 10,5 وانحراف معياري 3,60 سحبنا عينة عشوائية من 40 طالبا.

1)- ما هي طبيعة توزيع متوسط النقاط في العينة ؛

2)- أحسب إحتمال أن يقع متوسط النقاط في العينة ما بين 10 وَ 11,5

3)- أحسب إحتمال أن يكون متوسط النقاط في العينة أقل من 10

التمرين 03:

يختار مراجع عينة عشوائية حجمها 16 من مجتمع مكون من 1000 حساب مدين، ويفترض أنها تتوزع وفق التوزيع الطبيعي حيث متوسط الحساب المدين للمجتمع يساوي 26000 دج بانحراف معياري 4500 دج.

1)- ما هي طبيعة توزيع متوسط الحسابات المدينة في العينة ؛

2)- ما هو احتمال أن يكون متوسط العينة أقل من 28250 دج ؟

التمرين 04:

تدرس شركة طيران إمكانية السماح بحمولة يدوية للزبون مجانية، وقد وجد أن الوزن المتوسط للحمولة هو 5 كلغ وتباين 0,25

1)- إذا أخذنا عينة من 100 راكب، ما هي طبيعة توزيع متوسط الحمولة اليدوية في العينة ؟

2)- أحسب احتمال أن يكون الوزن الإجمالي للأمتعة :

- ما بين 500 و 515 كلغ
- أقل من 515 كلغ

التمرين05:

مجتمع مكون من 700 شخص من بينهم 420 شخص مدخن، إذا سحبنا عينة عشوائية من 36 شخص بدون إرجاع.

1)- ما هي طبيعة توزيع نسبة المدخنين في العينة ؛

2)- ما هو احتمال أن تكون نسبة المدخنين في العينة أقل من 45%.

التمرين06:

حددت شركة تصنع منتوج معين أن نسبة الوحدات التالفة 3 % ، إذا سحبنا عينة عشوائية حجمها 300 من هذا المنتوج.

- ما هو احتمال أن نسبة الوحدات التالفة في العينة تتراوح بين 2 % و 3.5 % ؛
- أحسب عدد الوحدات التالفة في العينة.

التمرين07:

إن معدل الاجور المدفوعة للعمال من الشركة الأولى لإنتاج الأدوية تساوي 35000 دج بانحراف معياري 4000 دج، أما معدل الأجور المدفوعة من الشركة الثانية لإنتاج الأدوية تساوي 28000 دج بانحراف معياري 6000 دج. سحبنا عينة عشوائية من 16 عاملا من الشركة الأولى وكذلك سحبنا عينة عشوائية من 25 عاملا من الشركة الثانية، مع العلم أن الأجور المدفوعة من قبل الشركتين تتبع التوزيع الطبيعي.

1)- أوجد طبيعة توزيع المعاينة للفرق بين متوسطين.

2)- أحسب احتمال أن يزيد معدل الأجور في الشركة الأولى عن معدل الأجور في الشركة الثانية بمقدار يفوق 8000 دج.

التمرين08:

إذا كان متوسط إستهلاك البنزين للسيارات من النوع (A) يساوي 9,8 لتر في 100 كم بانحراف معياري 1,1 لتر، وكان متوسط إستهلاك البنزين للسيارات من النوع (B) يساوي 9,1 لتر بانحراف معياري 0,9 لتر سحبنا عينة من السيارات من النوع (A) حجمها 100، وكذلك سحبنا عينة من السيارات من النوع (B) حجمها 105

1)- أوجد طبيعة توزيع المعاينة للفرق بين متوسطين.

2)- أحسب إحتمال أن يكون الفرق بين متوسطي العينتين أقل من 0,4 لتر

التمرين09:

إذا علم أن نسبة الذكور في مؤسسة (A) تبلغ 30 % وفي مؤسسة (B) تبلغ 20 %، فإذا سحبت عينة عشوائية من المؤسسة (A) حجمها 100 ومن المؤسسة(B) حجمها 200.

- أوجد طبيعة توزيع المعاينة للفرق بين نسبتين.
- أوجد احتمال أن يكون الفرق بين نسبتي الذكور في العينتين أكبر من 6 %.