



وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة لونيبي علي - البليدة 02 -

كلية العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية وعلوم التسيير

- الشهيد طالب عبد الرحمان -



قسم: علوم التسيير

الإحصاء4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

موجهة لطلبة السنة الثانية ميدان العلوم الاقتصادية، العلوم التجارية
وعلوم التسيير

من إعداد: د. لموتي محمد

السنة الجامعية: 2023-2024

الصفحة	العنوان
2	الفهرس
5	مقدمة
6	الفصل الأول: نظرية توزيع المعاينة
7	1. بعض المفاهيم حول المجتمع والعينة
7	1.1. المجتمع وطرق جمع البيانات
8	2.1. العينة وأنواعها
10	3.1. توزيع المعاينة
11	2. توزيع المعاينة للوسط الحسابي للعينة
15	1.2. توزيع المعاينة للوسط الحسابي من مجتمع يتبع التوزيع الطبيعي
15	1.1.2. عندما يكون تباين المجتمع σ^2 معلوم
17	2.1.2. عندما يكون تباين المجتمع σ^2 مجهول وحجم العينة ($n \geq 30$)
18	3.1.2. عندما يكون تباين المجتمع σ^2 مجهول وحجم العينة ($n < 30$)
19	2.2. توزيع المعاينة للوسط الحسابي من مجتمع لا يتبع التوزيع الطبيعي
20	3. توزيع المعاينة للفرق بين متوسطين حسابيين لعينتين
21	1.3. توزيع المعاينة للفرق بين متوسطي حسابيين لعينتين مستقلتين
21	1.1.3. توزيع المعاينة لفرق متوسطين لمجتمعين يتوزعان توزيعا طبيعيا أو غير طبيعي، تباينهما معلومين
24	2.1.3. توزيع المعاينة لفرق متوسطين لمجتمعين يتوزعان توزيعا طبيعيا، تباينهما مجهولين وحجم العينتين كبير
25	3.1.3. توزيع المعاينة للفرق لمجتمعين يتوزعان توزيعا طبيعيا، تباينهما مجهولين وحجم العينتين صغير
30	2.3. توزيع المعاينة للفرق بين متوسطي حسابيين لعينتين مرتبطتين
32	4. توزيع المعاينة لنسبة العينة
35	5. توزيع المعاينة للفرق بين نسبتين عينتين
38	6. توزيع المعاينة لتباين العينة

40	7. توزيع المعاينة للنسبة بين تبايني عينتين
42	8. تمارين مقترحة حول الفصل الأول
45	الفصل الثاني: نظرية التقدير
46	1. التقدير النقطي
47	2. خصائص المقدر الجيد
47	3. التقدير بمجال الثقة
48	1.3 مجال الثقة لمتوسط المجتمع (μ)
48	1.1.3 عندما يكون تباين المجتمع σ^2 معلوم
52	2.1.3 عندما يكون تباين المجتمع σ^2 مجهول وحجم العينة ($n \geq 30$)
54	3.1.3 عندما يكون تباين المجتمع σ^2 مجهول وحجم العينة ($n < 30$)
56	4.1.3 تحديد حجم العينة المناسب لمجال ثقة متوسط المجتمع
57	2.3 مجال الثقة للفرق بين متوسطي مجتمعين مستقلين
57	1.2.3 في حالة تباين المجتمعين معلومين
60	2.2.3 في حالة تباين المجتمعين مجهولين وحجم العينتين كبير
63	3.2.3 في حالة تباين المجتمعين مجهولين وحجم العينتين صغير
68	3.3 مجال الثقة للفرق بين متوسطي مجتمعين غير مستقلين
70	4.3 مجال الثقة لنسبة المجتمع
71	5.3 مجال الثقة لفرق نسبتي مجتمعين
73	6.3 مجال الثقة لتباين المجتمع
75	7.3 مجال الثقة لنسبة تبايني مجتمعين
78	4. تمارين مقترحة حول الفصل الثاني
80	الفصل الثالث: اختبار الفرضيات الإحصائية
81	1. مفاهيم أساسية حول اختبار الفرضيات
86	2. اختبار الفرضيات حول الوسط الحسابي لمجتمع (μ) يتبع التوزيع الطبيعي
86	1.2 عندما يكون تباين المجتمع σ^2 معلوم
91	2.2 عندما يكون تباين المجتمع σ^2 مجهول
91	1.2.2 حجم العينة كبير ($n \geq 30$)
92	2.2.2 حجم العينة صغير ($n < 30$)
97	3. اختبار الفرضيات حول الفرق بين متوسطي مجتمعين مستقلين يتبعان التوزيع الطبيعي
97	1.3 عندما يكون تباين المجتمعين معلومين

102	2.3. عندما يكون تباين المجتمعين مجهولين
102	1.2.3. حجم العينتين كبير ($n_1 \geq 30$) و ($n_2 \geq 30$)
103	2.2.3. حجم العينتين صغير ($n_1 < 30$ و n_2)
107	4. اختبار الفرضية للفرق بين متوسطي مجتمعين مرتبطتين
109	5. اختبار فرضية نسبة مجتمع
113	6. اختبار فرضية الفرق بين نسبتين مجتمعين مستقلين
116	7. اختبار فرضية تباين المجتمع
120	8. اختبار فرضية النسبة بين تباينين مجتمعين مستقلين
126	9. تمارين مقترحة حول الفصل الثالث
129	قائمة المراجع
131	الملاحق

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

مقدمة:

لدراسة أي ظاهرة ينبغي اختيار المجتمع الإحصائي المناسب لها، وتتم عادة عملية جمع البيانات بواسطة طريقة الحصر الشامل إذا أراد الباحث المسؤول عن هذه الدراسة الموثوقية والدقة في نتائج بحثه، حيث تتطلب هذه الطريقة الحصول على كل العناصر والمفردات المشكلة للمجتمع محل الدراسة، لكن من بين العراقيل التي تواجه هذا الباحث طبيعة مجتمع الدراسة، فكونه غير محدود يعني المزيد من التكاليف والجهد والوقت للحصول على كل العناصر، لذلك يعتمد الباحث في مثل هذه الحالات وبنسبة كبيرة معظم الباحثين في دراساتهم لاستخدام طريقة المعاينة عن طريق اختيار عينة من هذا المجتمع، يأمل أن تكون ممثلة له وتكون نتائج الدراسة عن طريقها متطابقة أو على الأقل مقتربة من الخصائص الحقيقية للمجتمع الذي اختيرت منه، وبما أن اختيار العينة للبحث المتعلق بالمجتمع هو سبيل جل الباحثين فإنه عادة معالم هذا النموذج تكون مجهولة، فيستعين الباحث بتقنيات معينة لاستنتاجها.

يعد علم الإحصاء الاستدلالي من أهم العلوم التي نستعملها في استنتاج معالم المجتمع المجهولة، إما عن طريق تقديرها نقطيا أو بمجال ثقة معين اعتمادا على تقنيات نظرية التقدير، وإما بإثبات صحة ادعاء معين حولها اعتمادا على تقنيات نظرية اختبار الفرضيات.

تمثل هذه المطبوعة (في مقياس الإحصاء 4) أهم الأمور التي ينبغي على طلبة السنة الثانية علوم اقتصادية علوم تجارية وعلوم التسيير خاصة (بحكم أنها موجهة لهم)، وكل ما له علاقة بالدراسات الإحصائية عامة الإحاطة بها دراسة وفهما، حيث حاولنا في إنجازها احترام المقرر الوزاري للمادة العلمية للمقياس، وأيضا تسهيل وتبسيط المعلومة للطلاب بتدعيم كل معلومة بمثال تطبيقي، وفي نهاية كل فصل اقترحنا مجموعة من التمارين ذات الصلة للتمرن، وبناء على ما جاء في التقديم سنقسم معلومات هذه المطبوعة إلى ثلاثة فصول:

- الفصل الأول: نظرية توزيع المعاينة.
- الفصل الثاني: نظرية التقدير.
- الفصل الثالث: اختبار الفرضيات.

الفصل الأول: نظرية توزيع المعينة

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

تمهيد:

تمثل البيانات المادة الأساسية في أي دراسة إحصائية مهما كان نوعها وموضوعها، وتعتبر مرحلة جمعها المرحلة الأولى والأساسية من مراحل البحث العلمي بالأسلوب الإحصائي، حيث ترتبط دقة وجودة نتائج الدراسة على جودة وفعالية هذه المرحلة، والتي تنعكس على بقية المراحل، يتم جمع البيانات الإحصائية بأسلوبين أساسيين هما: أسلوب الحصر الشامل، الذي يجعل نتائج الدراسة بواسطته أكثر موثوقية لاشتماله كل مفردات المجتمع محل الدراسة، وأسلوب المعاينة الإحصائية، المستعمل في جل الدراسات نظرا لاستحالة تطبيق الأسلوب الأول بسبب العدد اللانهائي من العناصر التي يحويها مجتمع الدراسة، والتي يصعب في كثير من الأحيان حصرها، وارتفاع تكلفة ذلك والوقت المستغرق للإنجاز والجهد المبذول، وعليه تعتبر المعاينة الأسلوب الأمثل لتعويض أسلوب الحصر الشامل في جمع بيانات معظم الدراسات، وفي هذا الفصل سنحاول التطرق لأهم المفاهيم التي تخص موضوع المعاينة وأبرز توزيعاتها.

1. بعض المفاهيم حول المجتمع والعينة:

1.1. المجتمع وطرق جمع البيانات: يعرف المجتمع الإحصائي بأنه مجموعة من المفردات تشترك في صفة أو صفات تكون موضوع دراسة أو بحث معين، والمجتمع قد يكون محدوداً إذا كان يمكن حصر عدد أفراد مثل سكان مدينة ما أو طلاب مرحلة تعليمية معينة، وقد يكون المجتمع غير محدود (لانهائي) إذا كان لا يمكن حصر عدد أفراد مثل النجوم والكواكب أو الكائنات الحية بمياه المحيطات والأنهار، وعند دراسة صفة ما أو لمجتمع ما، فإن البيانات الإحصائية عن تلك الصفة أو الصفات تجمع بأحد أسلوبين¹:

أ. أسلوب الحصر الشامل: وفيه تجمع البيانات عن كل مفردة من مفردات المجتمع، وهذا الأسلوب يتطلب وفرة في الوقت والمال والمجهود الفني، وتزداد هذه المتطلبات وتتضاعف كلما ازداد حجم المجتمع (عدد أفراد المجتمع)، وهذا الأسلوب لا يتبع عادة إلا في حالة التعدادات التي تجريها الدول وتدعمها بإمكانيات ضخمة مثل تعدادات السكان والتعدادات الصناعية والتعدادات الزراعية.

ب. الثاني: أسلوب المعاينة: وفيه يتم جمع البيانات عن جزء من مفردات المجتمع يختار بطريقة أو بأخرى ويطلق عليه عينة، ثم بعد ذلك يتم تعميم نتائج الدراسة على المجتمع بأكمله، أي أن أسلوب المعاينة يقصد به دراسة خصائص المجتمع من خلال دراسة عينة مسحوبة منه، ونجاح هذا الأسلوب يعتمد على أن تحمل العينة أقصى درجة من دقة التمثيل للمجتمع المسحوبة منه.

¹ القوسي محمد مفيد ، الإحصاء الوصفي والاستدلالي، مركز الكتاب الأكاديمي، عمان ، الطبعة الأولى ، 2013، ص

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

2.1 العينة وأنواعها : العينة هي جزء من المجتمع، بحيث تكون ممثلة له تمثيلاً جيداً²، مثل طلاب كلية العلوم الاقتصادية عينة، فهي جزء من جامعة البليدة التي تمثل المجتمع، يمكن تقسيم العينات إلى قسمين رئيسيين هما :

أ. **عينات احتمالية**³ : وهي العينات التي يتم سحبها من المجتمع على أساس قوانين الاحتمالات، بحيث يمكن ربط سحب المفردات باحتمالات معينة، وهذا يعني أن تكون عملية المعاينة-أي سحب العينة- مرتبطة ارتباطاً قوياً بالنماذج الاحتمالية، وفي هذه الطريقة نحصل على العينة بواسطة سحب المفردات بالتتابع، وكل منها لها احتمال معروف في الظهور في السحبة الأولى وفي أي سحبة تالية، ويكون ظهور أي مفردة من المفردات في السحبة التالية إما مستقلاً عن ظهور مفردة السحبة الأولى أو غير مستقل عنه، فعمليات السحب المتتالية في العينات الاحتمالية، قد تكون بإرجاع المفردة المختارة قبل سحب المفردة التالية لها، وتسمى هذه الطريقة المعاينة مع الإرجاع، وفي هذه الحالة يكون ظهور المفردات مستقلاً، وقد تكون مع عدم إرجاع المفردة المختارة قبل سحب التي تليها، وتسمى هذه الطريقة المعاينة مع عدم الإرجاع، وفي هذه الحالة يكون ظهور المفردات غير مستقل، ويجب أن تسحب العينات الاحتمالية بطريقة عشوائية حيث لا يتدخل العامل البشري فيها، ومن أهم مميزات العينات الاحتمالية هو أنه عند استخدامها نستطيع تحديد حجم الأخطاء الناجمة بسبب المعاينة أي حجم خطأ الصدفة، وكذلك قيمة خطأ التحيز في التقدير إن وجد، ومن أهم أنواع العينات الاحتمالية (العينة العشوائية البسيطة (عينة غير مقيدة) وهي التي نعتمدها في هذا المقرر، أما باقي العينات، فهي عينات مقيدة، وهي⁴:

أ. **1. العينة المنتظمة:** اختيار هذه العينة يتطلب وجود إطار للمجتمع كما في حالة العينة العشوائية البسيطة، بحيث يعطى لكل مفردة من مفردات المجتمع رقماً متسلسلاً داخل الإطار، ثم نختار مفردات العينة من الإطار بحيث يكون الرقم المتسلسل لكل مفردة يبعد بعداً ثابتاً منتظماً عن رقم المفردة السابقة لها وكذلك رقم المفردة اللاحقة لها.

أ. **2. العينة العشوائية الطبقية:** ويلجأ إليها الباحث في حالة ما إذا كان مجتمع الدراسة واضحاً به فئات (طبقات) بحيث أن التجانس أو التقارب داخل كل طبقة من طبقات مجتمع الدراسة أكبر من التجانس داخل المجتمع ككل، في هذه الحالة يجب على الباحث مراعاة

² السقاف أحمد علي، الإحصاء الوصفي والاستدلالي، المركز الديمقراطي العربي، برلين، الطبعة الأولى، 2020، ص 12

³ عابد علي، الإحصاء 3 مطبوعة (الإحصاء الاستنتاجي أو الاستدلالي) ، كلية العلوم الاقتصادية التجارية وعلوم التسيير، جامعة ابن خلدون، تيارت، الجزائر، 2017/2018، ص ص 3-4

⁴ بني هاني عبد الرزاق، الاقتصاد القياسي المبادئ الرياضية والإحصائية، دار وائل للنشر، الأردن، الطبعة الأولى، 2014، ص ص 237-239

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

أن الطبقة داخل العينة بنفس نسبة وجودها داخل المجتمع بعد أن يتم تحديد عدد المفردات التي يجب سحبها من كل طبقة للدخول في العينة، فإن هذه المفردات يتم سحبها عشوائياً من داخل الطبقة ومجموع هذه المفردات تكون العينة الطبقيّة العشوائية.

أ.3. العينة متعددة المراحل أو العنقودية: يتم تحديد المجتمع الإحصائي عادة في مستويين: زماني ومكاني، رغم أن الباحثين لا يذكرون ذلك في أبحاثهم، وتتم هذه المعاينة على مرحلتين أو عدة مراحل، في إحداها مثلاً تتم معاينة المناطق الجغرافية، وفي الثانية تتم معاينة الأشخاص في تلك المناطق، وفي هذا النوع من المعاينة لا يضطر الباحث إلى تصميم إطاراً للعينة.

أ.4. العينة العشوائية البسيطة: وهي أكثر الأصناف شيوعاً تكون عينة عشوائية بسيطة إذا كانت كل العينات ذات نفس الحجم n الممكن سحبها من هذا المجتمع لها نفس فرصة الاختيار، والعينة يمكن سحبها بالإرجاع أو بدون إرجاع.

أ.1.4. السحب مع الإرجاع (معاينة غير نفاذية): عندما يكون السحب بالإرجاع حيث يمكن أن تظهر المفردة أكثر من مرة في العينة تسمى هذه المعاينة غير نفاذية لأن تكرار العملية لا يؤدي إلى تقليص عدد مفردات المجتمع، ويكون عدد العينات الممكن سحبها يساوي القائمة (ترتيبية بتكرار) N^n ، وهي تحقق الشروط التالية: سحب جزء من الكل، الترتيب مهم، التكرار ممكن والسحب على التوالي، فمثلاً إذا كان حجم المجتمع $N = 4$ وحجم العينة $n = 2$ وعملية السحب بالإرجاع، فعندئذ عدد العينات الممكن سحبها من المجتمع في هذه الحالة هو:

$$N^n = 4^2 = 16$$

أ.2.4. السحب بدون إرجاع (معاينة نفاذية): إذا كان سحب العينات من المجتمع بدون إرجاع، أي عدم إرجاع المفردة المسحوبة قبل سحب المفردة التي تليها، في هذه الحالة توجد طريقتان لتحديد عدد العينات الممكن سحبها وهما:

- **الطريقة الأولى (ترتيبية بدون تكرار):** وهي تعطي أهمية لترتيب المفردات داخل العينة، والتي تحقق الشروط التالية: سحب جزء من الكل، الترتيب مهم، التكرار غير ممكن والسحب على التوالي، وتحسب وفق العلاقة التالية:

$$A_N^n = \frac{N!}{(N - n)!}$$

فإذا كان حجم المجتمع $N = 4$ وحجم العينة $n = 2$ وعملية السحب بدون إرجاع، فإن عدد العينات هو:

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

$$A_N^n = A_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = 6$$

- الطريقة الثانية (توفيقية بدون تكرار): لا تعطي أهمية لترتيب المفردات داخل العينة، وهي تحقق الشروط التالية: سحب جزء من الكل، الترتيب غير مهم، التكرار غير ممكن والسحب دفعة واحدة، وتحسب وفق العلاقة التالية:

$$C_N^n = \frac{N!}{n!(N-n)!}$$

نفس المثال السابق فقط الترتيب غير مهم والسحب دفعة واحدة، فعدد العينات هو:

$$C_N^n = C_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 3$$

ب. عينات غير احتمالية : وهي العينات التي لا يتم سحبها وفق قوانين الاحتمالات، وبالتالي لا نستطيع معرفة احتمال اختيار أي مفردة من مفرداتها، ولهذا لا نستطيع تطبيق نظرية الاحتمالات، وبالتالي هذه العينات لا تسمح بالتعميم من العينة إلى المجتمع، مثل المعاينة الهادفة، حيث تنحصر المعاينة في بعض الأحيان على مجموعة محددة من الأشخاص أو الأشياء كمحاولة معرفة دخل الأستاذ الجامعي في بلد معين بالمقارنة مع أجره في البلدان الأخرى، إضافة إلى المعاينة المتوفرة، الحصصية والمعاينة من طراز كرة الثلج⁵.

3.1. توزيع المعاينة⁶: نفرض أنه لدينا مجتمعا من المفردات (العناصر) يتبع توزيعا احتماليا معيناً (سواء كان هذا المجتمع غير محدود (كبيرا) أو محدودا، وأنا بصدد سحب عينة حجمها n من هذا المجتمع، بالطبع ليس معنى هذا أن هناك عينة واحدة يمكن سحبها، ولكن يكون أمامنا عددا كبيرا من العينات التي يمكن سحبها من هذا المجتمع، والتي حجم كل منها هو n من المفردات، ولنفرض أننا سحبنا من هذا المجتمع عينة عشوائية حجمها n ثم حسبنا لها مقياسا معيناً (وليكن الوسط الحسابي)، ثم سحبنا من نفس المجتمع عينة عشوائية ثانية لها نفس الحجم n وحسبنا منها نفس المقياس (أي وسطها الحسابي) ، وهكذا بالنسبة لجميع العينات التي يمكن سحبها من هذا المجتمع والتي لها نفس الحجم n ، سنجد أمامنا عددا كبيرا من القيم لنفس المقياس ولا نتوقع أن تكون جميع القيم التي حصلنا عليها من العينات لهذا المقياس متساوية وإنما ستكون مختلفة عن بعضها وتشكل مجتمعا آخر، عدد مفرداته أكبر بكثير من عدد مفردات المجتمع الأصلي، وعلى ذلك يمكن النظر إلى هذا المقياس على أنه متغيرا عشوائيا يأخذ

⁵ للاطلاع: بني هاني عبد الرزاق، الاقتصاد القياسي المبادئ الرياضية والإحصائية، مرجع سابق، ص ص 239-240

⁶ عابد علي، الإحصاء 3 مطبوعة (الإحصاء الاستنتاجي أو الاستدلالي) ، مرجع سابق، ص ص 6-7

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

قيما مختلفة (هي التي حصلنا عليها من هذه العينات) ويتبع توزيعا معيناً ربما يختلف أو لا يختلف عن توزيع المجتمع الأصلي، ويسمى بتوزيع المعاينة لهذا المقياس سواء كان هذا المقياس هو الوسط الحسابي أو التباين أو نسبة المفردات أو غيرها من المقاييس الإحصائية التي لها صفة معينة

2. توزيع المعاينة للوسط الحسابي للعينات العشوائية المسحوبة تشكل

قيما أوساطها الحسابية مختلفة، أي أن الوسط الحسابي للعينات لأي إحصائية يتغير من عينة إلى أخرى، ولا نستطيع معرفة الوسط الحسابي لأي عينة عشوائية قبل سحبها، أي أن الوسط الحسابي للعينات هو متغيراً عشوائياً وبالتالي له توزيعاً احتمالياً، ويطلق على أي إحصائية بتوزيع المعاينة، وبالتالي يسمى التوزيع الاحتمالي للوسط الحسابي للعينات بتوزيع المعاينة للوسط الحسابي للعينات، والذي يمكن تعريفه كما يلي: إذا كان لدينا مجتمع محدود حجمه N وسطه الحسابي μ وتباينه σ^2 ، وسحبنا منه كل العينات العشوائية البسيطة الممكنة والمتساوية في الحجم (وليكن حجمها n)، وحسبنا الوسط الحسابي لكل عينة، فالتوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي يسمى توزيع المعاينة للوسط الحسابي للعينات.

إذا كان لدينا X متغيراً عشوائياً يمثل مجتمعاً ما متوسطه μ ، وهو يخضع للتوزيع الطبيعي، و $\bar{X}_i$ متغيرة عشوائية تمثل متوسط عينة مسحوبة من نفس المجتمع، فإن القيمة المتوقعة لمتوسط العينة $E(\bar{X})$ سواء كان السحب بالإرجاع أو بدونه هي متوسط المجتمع المسحوبة منه μ ونكتب⁷: $E(\bar{X}) = \mu_{\bar{X}} = \mu$

البرهان: لنرمز بـ X_i لقيم المتغيرة الأصلية X .

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n} \sum_i X_i\right) = \frac{1}{n} \sum_i E(X_i) = \frac{1}{n} \sum_i \mu = \frac{1}{n} n\mu = \mu.$$

إذا كان لدينا X متغيراً عشوائياً يمثل مجتمعاً ما تباينه σ^2 ، وهو يخضع للتوزيع الطبيعي، و $\bar{X}_i$ متغيرة عشوائية حجمها n وهي تمثل متوسط عينة مسحوبة بالإرجاع من نفس المجتمع، فإن تباين توزيع المعاينة للمتوسطات يكتب كما يلي:

$$V(\bar{X}) = \sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

⁷ سبيغل موراي، ترجمة عبد القادر حمدو، الإحصاء والاحتمال (شوم)، أكاديمية أنترناشيونال، بيروت، 2001، ص

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

البرهان: لنرمز ب X_i لقيم المتغيرة الأصلية X

$$V(\bar{X}) = V\left(\frac{1}{n} \sum_i X_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_i V(X_i) = \frac{1}{n^2} \sum_i \sigma^2 = \frac{1}{n^2} n \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}.$$

إذا كان لدينا X متغيرا عشوائيا يمثل مجتمعا ما حجمه N وتباينه σ^2 ، وهو يخضع للتوزيع الطبيعي، و $\bar{X}_i$ متغيرة عشوائية حجمها n تمثل متوسط عينة مسحوبة بدون إرجاع من نفس المجتمع، فإن تباين توزيع المعاينة للمتوسطات يكتب كما يلي:

$$V(\bar{X}) = \sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} \left(\frac{N - n}{N - 1} \right)$$

وتسمى النسبة $\left(\frac{N-n}{N-1} \right)$ معامل الإرجاع أو معامل التصحيح ، تستخدم فقط في حالة السحب بدون إرجاع.

ملاحظة: يعتبر الإحصائيون السحب بالإرجاع إذا تحقق: $\frac{n}{N}$ أقل أو يساوي 0,05 وبدون إرجاع إذا كانت: $\frac{n}{N}$ أكبر تماما من 0,05

مثال 1: ليكن لدينا المجتمع المتكون من العناصر التالية: 1، 3، 5، 6، 8 أي: حجم المجتمع ($N=5$)

أ. أحسب متوسط المجتمع μ

ب. أحسب تباين المجتمع σ

ت. نسحب عشوائيا عينات من هذا المجتمع حجمها 2

ت. 1 ما هو عدد العينات المسحوبة في حالة السحب بالإرجاع؟

ت. 2 ما هو عدد العينات المسحوبة في حالة السحب بدون إرجاع إذا كان الترتيب مهما؟

ت. 3 ما هو عدد العينات المسحوبة في حالة السحب بدون إرجاع إذا كان الترتيب غير مهما؟

ت. 4 ما هي القيمة المتوقعة لمتوسط العينة $\mu_{\bar{X}}$ إذا كان السحب بالإرجاع ثم إذا كان السحب بدون إرجاع؟

ت. 5 قارن بين متوسط المجتمع μ والقيمة المتوقعة لمتوسط عينة $\mu_{\bar{X}}$ في كلا السحبين

ت. 6 أحسب تباين المتوسطات الممكنة للعينة $\sigma_{\bar{X}}^2$

ت. 7 قارن بين تباين المجتمع σ^2 وتباين المتوسطات الممكنة للعينة $\sigma_{\bar{X}}^2$ في كلا السحبين

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

الحل:

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^N X_i}{N} = \frac{1+3+5+6+8}{5} = 4,6$$

أ. حساب متوسط المجتمع:

ب. حساب تباين المجتمع:

$$\sigma^2 = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{1^2+3^2+5^2+6^2+8^2}{5} - (4,6)^2 = 5,84$$

ت. 1 عدد العينات المسحوبة في حالة السحب بالإرجاع:

$$25 = 5^2 = N^n$$

ت. 2 عدد العينات المسحوبة في حالة السحب بدون إرجاع والترتيب مهم :

$$20 = A_N^n = A_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!}$$

ت. 3 عدد العينات المسحوبة في حالة السحب بدون إرجاع والترتيب غير مهم :

$$10 = C_N^n = C_5^2 = \frac{5!}{2!(5-2)!}$$

ت. 4 القيمة المتوقعة لمتوسط العينة $\mu_{\bar{X}}$ إذا كان السحب بالإرجاع ثم بدون إرجاع
- العينات الممكنة ذات الحجم $n = 2$ في حالة السحب بالإرجاع (معاينة غير نفاذية)

العينات الممكنة				
(1, 1)	(3, 1)	(5, 1)	(6, 1)	(8, 1)
(1, 3)	(3, 3)	(5, 3)	(6, 3)	(8, 3)
(1, 5)	(3, 5)	(5, 5)	(6, 5)	(8, 5)
(1, 6)	(3, 6)	(5, 6)	(6, 6)	(8, 6)
(1, 8)	(3, 8)	(5, 8)	(6, 8)	(8, 8)

المتوسطات الممكنة للعينة $\bar{X}_1$				
1	2	3	3,5	4,5
2	3	4	4,5	5,5
3	4	5	5,5	6,5
3,5	4,5	5,5	6	7
4,5	5,5	6,5	7	8

- القيمة المتوقعة لمتوسط العينة $\mu_{\bar{X}}$ إذا كان السحب بالإرجاع هي:

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

$$\mu_{\bar{X}} = \frac{\sum \bar{X}_i}{Nn} = \frac{1 + 2 + 3 + 3,5 + 4,5 + \dots + 8}{25} = 4,6$$

- العينات الممكنة ذات الحجم $n = 2$ في حالة السحب بدون إرجاع والترتيب غير مهم (معاينة نفاذية)

العينات الممكنة	المتوسطات الممكنة للعينات (معاينة نفاذية) $\bar{X}_1$
(1, 3)	2
(1, 5) (3, 5)	3 4
(1, 6) (3, 6) (5, 6)	3,5 4,5 5,5
(1, 8) (3, 5) (5, 8) (6, 8)	4,5 5,5 6,5 7

- القيمة المتوقعة لمتوسط العينة $\mu_{\bar{X}}$ إذا كان السحب بدون إرجاع هي:

$$\mu_{\bar{X}} = \frac{\sum \bar{X}_i}{C_N^n} = \frac{2+3+4+3,5+\dots+7}{10} = 4,6$$

ت.5 المقارنة بين متوسط المجتمع μ والقيمة المتوقعة لمتوسط عينة $\mu_{\bar{X}}$ في كلا السحبين:

نلاحظ أن متوسط المجتمع μ يساوي القيمة المتوقعة لمتوسط عينة $\mu_{\bar{X}}$ مهما كان السحب ويساوي 4,6

ت.6 تباين المتوسطات الممكنة للعينات $\sigma^2_{\bar{X}}$

- حالة السحب بالإرجاع: $\sigma^2_{\bar{X}} = [\sum_i (X_i - \mu_{\bar{X}})^2] / 25 = 2.92$

- حالة السحب بدون إرجاع: $\sigma^2_{\bar{X}} = [\sum_i (X_i - \mu_{\bar{X}})^2] / 10 = 2.19$

ت.7 المقارنة بين تباين المجتمع σ^2 وتباين المتوسطات الممكنة للعينات $\sigma^2_{\bar{X}}$ في كلا السحبين:

- حالة السحب بالإرجاع: نلاحظ أن: $2.92 = 5.84 / 2$ أي أن: $\sigma^2_{\bar{X}} = \frac{\sigma^2}{n}$

- حالة السحب بدون إرجاع: نلاحظ أن: $2.19 = \frac{5.84}{2} \left(\frac{5-2}{5-1} \right)$ أي أن:

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

$$\sigma^2_{\bar{X}} = \frac{\sigma^2}{n} \left(\frac{N-n}{N-1} \right)$$

1.2. توزيع المعاينة للوسط الحسابي من مجتمع يتبع التوزيع الطبيعي:

1.1.2 عندما يكون تباين المجتمع σ^2 معلوم:

إذا كان لدينا مجتمعا يخضع للتوزيع الطبيعي بمتوسط μ وتباين σ^2 معلوم، وسحبنا منه العينات العشوائية البسيطة التي لها نفس الحجم n ، فإن توزيع المعاينة للوسط الحسابي $\bar{X}$ يكون أيضا توزيعا طبيعيا مهما كان حجم العينة n ، بمتوسط $\mu_{\bar{X}} = \mu$ مهما كان نوع سحب العينة بالإرجاع أو بدونه، وتباين $\sigma^2_{\bar{X}} = \frac{\sigma^2}{n}$ إذا كان السحب بالإرجاع أي حجم المجتمع غير محدود و $\sigma^2_{\bar{X}} = \frac{\sigma^2}{n} \left(\frac{N-n}{N-1} \right)$ إذا كان السحب بدون إرجاع أي حجم المجتمع محدود، وعليه إحصائية التوزيع الطبيعي المعياري $Z \sim N(0,1)$ تكون كما يلي:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \quad - \quad \text{إذا كان السحب بالإرجاع:}$$

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n} \frac{N-n}{N-1}}} = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}} \quad - \quad \text{إذا كان السحب بدون إرجاع:}$$

مثال 2: إذا كانت أطوال طلاب تتبع توزيعا طبيعيا وسطه 170 سم وانحرافه المعياري 5 سم $\sigma = 5$ ، اخترنا عينة عشوائية مكونة من 25 طالب

أ. أوجد توزيع المعاينة لمتوسط أطوال الطلبة

ب. أحسب احتمال أن يكون متوسط الطول لهذه العينة أكبر من 172

ت. ما هو حجم العينة المناسب لكي يكون احتمال متوسط الطول أقل من 174 يساوي 0,9993؟

الحل:

أ. توزيع المعاينة لمتوسط أطوال الطلبة :

نضع X متغير عشوائي مستمر يمثل طول الطلبة، وهو يخضع للتوزيع الطبيعي بمتوسط حسابي: $\mu = 170$ وانحراف معياري: $\sigma = 5$ أي: $X \sim N(170 ; 5^2)$

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

بما أن توزيع المجتمع طبيعي فإن توزيع المعاينة لمتوسط أطوال الطلبة هو التوزيع الطبيعي بمتوسط: 170 سم $\mu_{\bar{X}} = \mu = 170$ ، وانحراف معياري: $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{5}{\sqrt{25}} = 1$ لأن المجتمع غير محدود أي أن سحب العينة بالإرجاع، ونكتب: $\bar{X} \sim N(\mu_{\bar{X}} ; \sigma_{\bar{X}}^2) \Leftrightarrow \bar{X} \sim N(170 ; 1)$

ب. حساب احتمال أن يكون متوسط الطول لهذه العينة أكبر من 172، أي $P(\bar{X} > 172)$

$$P(\bar{X} > 172) = P\left(Z > \frac{172 - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}}\right) = P\left(Z > \frac{172 - 170}{1}\right) \\ = P(Z > 2) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - F(2) = 1 - 0,9772 = 0,0228$$

ت. حساب حجم العينة n المناسب لكي يكون احتمال متوسط الطول أقل من 174 يساوي 0,9993:

$$= P\left(Z < \frac{174 - 170}{\frac{5}{\sqrt{n}}}\right) = P(Z < 0,8\sqrt{n})P(\bar{X} < 174) \\ (0,8\sqrt{n}) = 0,9993 = F$$

حسب جدول التوزيع الطبيعي نجد أن: $F(3,2) = 0,9993$ ومنه بالمطابقة نجد أن:

$$0,8\sqrt{n} = 3,2 \Rightarrow n = \left(\frac{3,2}{0,8}\right)^2 = 16$$

مثال 3: إذا كان لدينا 450 شخص ضغط دمهم يخضع للتوزيع الطبيعي بمتوسط 12,2 وبتباين 1,44، اخترنا عينة عشوائية من 36 شخص

أ. أوجد توزيع المعاينة لمتوسط ضغط الدم
ب. أحسب احتمال أن يكون متوسط ضغط الدم لهذه العينة محصور بين 11,8 و 12,4

الحل:

أ. توزيع المعاينة لمتوسط ضغط الدم :

نضع X متغير عشوائي مستمر يمثل ضغط الدم، وهو يخضع للتوزيع الطبيعي بمتوسط حسابي: $\mu = 12,2$ وبتباين: $\sigma^2 = 1,44$ أي: $X \sim N(12,2 ; 1,44)$

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

بما أن توزيع المجتمع طبيعي والسحب بدون إرجاع (العينة نفاذية) لأن: $\frac{n}{N} = \frac{36}{450} = 0,08 > 0,05$ فإن توزيع المعاينة لمتوسط ضغط الدم هو التوزيع الطبيعي بمتوسط:

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \frac{\sqrt{1,44}}{\sqrt{36}} \sqrt{\frac{450-36}{450-1}} = \mu_{\bar{X}} = \mu = 12,2$$

وانحراف معياري: $0,19$ لأن المجتمع غير محدود أي أن سحب العينة بالإرجاع، ونكتب: $\bar{X} \sim N(\mu_{\bar{X}}; \sigma_{\bar{X}}^2) \Leftrightarrow \bar{X} \sim N(12,2; 0,19^2)$

ب. حساب احتمال أن يكون متوسط ضغط الدم لهذه العينة محصور بين 11,8 و 12,4:

$$\begin{aligned} P(11,8 \leq \bar{X} \leq 12,4) &= P\left(\frac{11,8 - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}} \leq Z \leq \frac{12,4 - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}}\right) \\ &= P\left(\frac{11,8 - 12,2}{0,19} \leq Z \leq \frac{12,4 - 12,2}{0,19}\right) \\ &= P(-2,11 \leq Z \leq 1,05) = F(1,05) - F(-2,11) \\ &= F(1,05) - (1 - F(2,11)) = F(1,05) - 1 + F(2,11) \\ &= 0,8531 - 1 + 0,9826 = 0,8357 \end{aligned}$$

2.1.2 عندما يكون تباين المجتمع σ^2 مجهول وحجم العينة $(n \geq 30)$:

إذا كان لدينا مجتمع يتوزع توزيعاً طبيعياً بمتوسط μ وتباين σ^2 مجهول، وكانت لدينا عينة عشوائية مسحوبة منه حجمها $(n \geq 30)$ وتباينها S^2 ، فإن توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي $\bar{X}$ يقرب إلى التوزيع الطبيعي بمتوسط $\mu_{\bar{X}} = \mu$ مهما كان نوع سحب العينة بالإرجاع أو بدونه، وتباين $\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{S^2}{n}$ إذا كان السحب بالإرجاع و $\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{S^2}{n} \left(\frac{N-n}{N-1}\right)$ إذا كان السحب بدون إرجاع، وعليه إحصائية التوزيع الطبيعي المعياري $Z \sim N(0,1)$ تكون كما يلي:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \quad - \text{ إذا كان السحب بالإرجاع:}$$

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\frac{S}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}} \quad - \text{ إذا كان السحب بدون إرجاع:}$$

مثال 4: إذا كان لدينا مجتمعا متوسطه يساوي 9 ، أخذت عينة منه حجمها 50 فكان الانحراف المعياري فيها يساوي 4، فما هو احتمال أن يكون متوسط العينة على الأقل 10

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

الحل:

بما أن المجتمع غير محدود وتوزيعه ليس طبيعياً بمتوسط حسابي: $\mu = 9$ وتباين σ^2 مجهول وحجم العينة $n = 50 \geq 30$ ، فإن توزيع المعاينة هو التوزيع الطبيعي بمتوسط: $\mu_{\bar{X}} = \mu = 9$ ، وانحراف معياري: $\sigma_{\bar{X}} = \frac{S}{\sqrt{n}} = \frac{4}{\sqrt{50}} = 0,57$ ومنه:

$$P(\bar{X} \geq 10) = P\left(Z \geq \frac{10 - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}}\right) = P\left(Z \geq \frac{10 - 9}{0,57}\right) = P(Z \geq 1,75)$$

$$(Z < 1,75) = 1 - P$$

$$= 1 - F(1,75) = 1 - 0,9599 = 0,0401$$

3.1.2 عندما يكون تباين المجتمع σ^2 مجهول وحجم العينة $(n < 30)$:

إذا كان لدينا مجتمع يتوزع توزيعاً طبيعياً بمتوسط μ وتباين σ^2 مجهول، وكانت لدينا عينة عشوائية مسحوبة منه حجمها $(n < 30)$ وتباينها S^2 ، فإن توزيع المعاينة للوسط الحسابي $\bar{X}$ يخضع لتوزيع ستيودنت (T) بمتوسط $\mu_{\bar{X}} = \mu$ مهما كان نوع سحب العينة، وتباين $\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{S^2}{n}$ إذا كان السحب بالإرجاع و $\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{S^2}{n} \left(\frac{N-n}{N-1}\right)$ إذا كان السحب بدون إرجاع، وبدرجة حرية $(v = n - 1)$ ، وعليه إحصائية توزيع ستيودنت (T) تكون كما يلي:

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \quad - \quad \text{إذا كان السحب بالإرجاع:}$$

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\frac{S}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}} \quad - \quad \text{إذا كان السحب بدون إرجاع:}$$

مثال 5: إذا كانت أجور الموظفين بمؤسسة ما تتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط 28500 دج، سحبنا عينة مكونة من 16 موظف ما هو احتمال أن يزيد متوسط أجورهم عن 29500 دج؟ علماً أن الانحراف المعياري للعينة يساوي 1940 دج

الحل:

X متغير عشوائي يمثل أجور الموظفين يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط $\mu = 28500$ وتباين مجهول، وعندما يكون تباين المجتمع غير معلوم نأخذ كتقدير له تباين العينة S^2 ، أي أن:

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

$$\mu_{\bar{X}} = \frac{S}{\sqrt{n}} = \frac{1940}{\sqrt{16}} = 485:$$

بما أن تباين المجتمع مجهول وحجم العينة 16 أقل من 30 ، فإن توزيع معاينة متوسط الأجر يتبع توزيع T ستودنت بدرجة حرية $(n - 1 = 16 - 1 = 15)$

$$P(\bar{X} > 29500) = P\left(T_{15} > \frac{29500 - 28500}{485}\right) = P(T_{15} > 2,06)$$

$$= 1 - P(T_{15} \leq 2,06) \simeq 1 - 0,975 = 0,025$$

في جدول ستودنت لا توجد القيمة 2,06 عند درجة الحرية 15 وإنما 2,06 محصورة بين 1,753 و 2,131

1,753	2,06	2,131
0,95	α	0,975

باستخدام نظرية الحصر نجد:

$$(2,131 - 1,753) \rightarrow (0,975 - 0,95) \Leftrightarrow (0,378) \rightarrow (0,025)$$

$$(2,06 - 1,753) \rightarrow (\alpha - 0,95) \Leftrightarrow (0,307) \rightarrow (\alpha - 0,95)$$

$$\alpha = \frac{(0,307) (0,025)}{(0,378)} + 0,95 = 0,97 \text{ ومنه:}$$

أي أن:

$$P(\bar{X} > 29500) = P\left(T_{15} > \frac{29500 - 28500}{485}\right) = P(T_{15} > 2,06)$$

$$= 1 - P(T_{15} \leq 2,06) = 1 - 0,97 = 0,03$$

2.2 توزيع المعاينة للوسط الحسابي من مجتمع لا يتبع التوزيع الطبيعي:

تعتبر نظرية النهاية المركزية ذات أهمية كبيرة في الاستدلال الإحصائي، فبتطبيقها يكون توزيع المعاينة للوسط الحسابي من مجتمع لا يتبع التوزيع الطبيعي قريباً من التوزيع الطبيعي بشرط أن يكون حجم العينة $(n \geq 30)$ أو العينات ذات الحجم الكبير بمتوسط

$\mu_{\bar{X}} = \mu$ مهما كان نوع سحب العينة ، وتباين $\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$ إذا كان السحب بالإرجاع و

$\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} \left(\frac{N-n}{N-1}\right)$ إذا كان السحب بدون إرجاع، وعليه إحصائية التوزيع الطبيعي

المعياري $Z \sim N(0,1)$ تكون كما يلي:

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \quad - \text{ إذا كان السحب بالإرجاع:}$$
$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}} = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}} \quad - \text{ إذا كان السحب بدون إرجاع:}$$

مثال 6: إذا علمت أن الوسط الحسابي لعلامات امتحان الإحصاء يساوي 14,5 بتباين 16 ، اخترنا عينة عشوائية قوامها (حجمها) 100 طالب، ما هو احتمال أن يكون متوسط علامات الطلبة في العينة على الأكثر 13؟

الحل:

نضع X متغير عشوائي يمثل علامة الطلبة، وهو لا يخضع بالضرورة للتوزيع الطبيعي بمتوسط حسابي: $\mu = 14,5$ وتباين: $\sigma^2 = 16$ أي: $X \sim N(14,5 ; 16)$

بما أن توزيع المجتمع ليس طبيعياً وحجم العينة ($n = 100 \geq 30$) ، ومنه حسب نظرية النهاية المركزية، فإن توزيع المعاينة لمتوسط علامات الطلبة في الإحصاء هو التوزيع الطبيعي بمتوسط: $\mu_{\bar{X}} = \mu = 14,5$ ، وانحراف معياري: $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{100}} = 0,4$ لأن المجتمع غير محدود أي أن سحب العينة بالإرجاع، ونكتب: $\bar{X} \sim N(\mu_{\bar{X}} ; \sigma_{\bar{X}}^2) \Leftrightarrow \bar{X} \sim N(14,5 ; 0,4^2)$ ، ومنه:

$$P(\bar{X} \leq 13) = P\left(Z \leq \frac{13 - 14,5}{0,4}\right) = P(Z \leq -3,75) = F(-3,75) \\ = (1 - F(3,75)) = 1 - 0,9999 = 0,0001$$

3. توزيع المعاينة للفرق بين متوسطين حسابيين لعينتين $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$:

في معظم الدراسات يرغب الباحث في المجال الإحصائي في المقارنة بين مجتمعين لمعرفة الاختلاف بينهما، وذلك بمقارنة متوسطهما، سواء كان مجموع المتوسطين $(\mu_1 + \mu_2)$ أو الفرق بينهما $(\mu_1 - \mu_2)$ ، لكن هذا الأخير هو الأكثر استعمالاً، حيث μ_1 متوسط المجتمع الأول و μ_2 هو متوسط المجتمع الثاني، لذلك سوف نتطرق لإجراء الفرق بين المتوسطين الحسابيين للعينتين المسحوبتين من هذين المجتمعين $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$ قصد استنتاج الفرق الحقيقي بين متوسطي المجتمعين $(\mu_1 - \mu_2)$ ، علماً أن $\bar{X}_1$ هو المتوسط الحسابي للعينة الأولى المسحوبة من المجتمع الأول والتي حجمها n_1 وتباينها S_1^2 ، و $\bar{X}_2$ هو المتوسط الحسابي للعينة الثانية المسحوبة من المجتمع الثاني والتي حجمها

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

n_2 وتباينها S_2^2 ، وبما أن الإحصائية $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$ هي متغير عشوائي فينبغي علينا معرفة توزيع المعاينة لها.

1.3 توزيع المعاينة للفرق بين متوسطي حسابيين لعينتين مستقلتين $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$:

هنا يكون المجتمعين مستقلين، حيث توزيع المعاينة للفرق بين المتوسطي الحسابيين للعينتين يتوقف على طبيعة توزيعي المجتمعين، معلومية تبايني المجتمعين من عدمها وأيضا حجمي العينتين المسحوبتين.

1.1.3 توزيع المعاينة للفرق $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$ لمجتمعين يتوزعان توزيعا طبيعيا أو غير طبيعي، تباينهما معلومين:

نسحب كل العينات العشوائية ذات الحجم n_1 من المجتمع الأول اللامحدود الذي يتوزع توزيعا طبيعيا، حجمه N_1 بمتوسط μ_1 وتباين σ_1^2 ، من جهة أخرى نختار كل العينات العشوائية ذات الحجم n_2 من المجتمع الثاني اللامحدود الذي يتوزع توزيعا طبيعيا، حجمه N_2 بمتوسط μ_2 وتباين σ_2^2 بحيث تكون العينات من المجتمع الأول مستقلة عنها في المجتمع الثاني، وعليه يكون توزيع المعاينة للفرق بين المتوسطات $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$ قريبا من التوزيع الطبيعي مهما يكون حجم العينتين، وأيضا حسب نظرية النهاية المركزية في حالة ما إذا كان توزيع المجتمعين ليس طبيعيا مع أن حجم العينتين كبير $(n_1 \geq n_2)$ (30)، بمتوسط حسابي: $\mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \mu_1 - \mu_2$ وانحراف معياري:

$$\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \quad \left(\frac{n_1}{N_1} \text{ و } \frac{n_2}{N_2} \leq 0,05 \right)$$

$$\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} \left(\frac{N_1 - n_1}{N_1 - 1} \right) + \frac{\sigma_2^2}{n_2} \left(\frac{N_2 - n_2}{N_2 - 1} \right)}$$

$$\left(\frac{n_1}{N_1} \text{ و } \frac{n_2}{N_2} > 0,05 \right)$$

ومنه إحصائية التوزيع تعطى بالعلاقة التالية:

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2})}{\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}}$$

$$= \begin{cases} \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2})}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} & \text{si } \left(\frac{n_1}{N_1} \text{ و } \frac{n_2}{N_2} \leq 0,05 \right) \\ \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2})}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} \left(\frac{N_1 - n_1}{N_1 - 1} \right) + \frac{\sigma_2^2}{n_2} \left(\frac{N_2 - n_2}{N_2 - 1} \right)}} & \text{si } \left(\frac{n_1}{N_1} \text{ و } \frac{n_2}{N_2} > 0,05 \right) \end{cases}$$

مثال 7: إذا كان المتغير العشوائي X_1 يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط 100 وانحراف معياري 10 ، سحبت من مجتمعه عينة عشوائيا حجمها 40 مشاهدة، ولدينا من جهة أخرى المتغير العشوائي X_2 الذي يتبع أيضا التوزيع الطبيعي بمتوسط 90 وانحراف معياري 8 ، سحبت من مجتمعه عينة عشوائيا حجمها 36 مشاهدة، (العينتين مستقلتين).

أ. أوجد توزيع المعاينة للفرق بين متوسطي العينتين، ثم احسب احتمال أن يكون المتوسط الحسابي للعينة الأولى أكبر منه للعينة الثانية بمقدار 13.

ب. أعد الإجابة على نفس السؤال في حالة $N_1 = 400$ و $N_1 = 540$

الحل:

بما أن كل من المجتمعين يتبعان التوزيع الطبيعي وتباينا المجتمعين معلومين حيث أن المتوسط: $\mu_1 = 100$ والانحراف المعياري $\sigma_1 = 10$ للمجتمع الأول، والمتوسط: $\mu_2 = 90$ والانحراف المعياري $\sigma_2 = 8$ للمجتمع الثاني، ومن أجل عينة من $n_1 = 40$ من المجتمع الأول، و $n_2 = 36$ من المجتمع الثاني، والسحب بالإرجاع، فإن توزيع المعاينة للفرق بين متوسطي العينتين يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط:

$$\mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \mu_1 - \mu_2 = 100 - 90 = 10$$

وانحراف معياري:

$$\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{(100)^2}{40} + \frac{(90)^2}{36}} = \sqrt{475} = 21,79$$

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

- حساب احتمال أن يكون المتوسط الحسابي للعينة الأولى أكبر منه للعينة الثانية بمقدار 13:

$$P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 > 13) = P\left(Z > \frac{13 - \mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}}{\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}}\right)$$

$$= P\left(Z > \frac{13 - 10}{21,79}\right)$$

$$(Z \leq 0,14) = 1 - F(0,14) = 1 - 0,5557 = P(Z > 0,14) = 1 - P$$

$$= 0,4443$$

ب. بما أن $\frac{n_1}{N_1} = \frac{40}{400} = 0,1$ و $\frac{n_2}{N_2} = \frac{36}{540} = 0,07 > 0,05$ فإن السحب بدون إرجاع فإن توزيع المعاينة للفرق بين متوسطي العينتين يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط:

$$\mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \mu_1 - \mu_2 = 100 - 90 = 10$$

وانحراف معياري:

$$\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} \left(\frac{N_1 - n_1}{N_1 - 1} \right) + \frac{\sigma_2^2}{n_2} \left(\frac{N_2 - n_2}{N_2 - 1} \right)}$$

$$= \sqrt{\frac{10^2}{40} \left(\frac{400 - 40}{400 - 1} \right) + \frac{8^2}{36} \left(\frac{540 - 36}{540 - 1} \right)} = 1,98$$

- حساب احتمال أن يكون المتوسط الحسابي للعينة الأولى أكبر منه للعينة الثانية بمقدار 13:

$$P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 > 13) = P\left(Z > \frac{13 - \mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}}{\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}}\right)$$

$$= P\left(Z > \frac{13 - 10}{1,98}\right)$$

$$(Z \leq 1,52) = P(Z > 1,52) = 1 - P$$

$$= 1 - F(1,52) = 1 - 0,9357 = 0,0643$$

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

2.1.3 توزيع المعاينة للفرق ($\bar{X}_1 - \bar{X}_2$) لمجتمعين يتوزعان توزيعا طبيعيا ، تباينهما مجهولين وحجم العينتين كبير ($n_1 \geq 30$ و n_2) :

نسحب كل العينات العشوائية ذات الحجم ($n_1 \geq 30$) وتباين العينة S_1^2 من المجتمع الأول اللامحدود الذي يتوزع توزيعا طبيعيا، حجمه N_1 بمتوسط μ_1 وتباينه مجهول σ_1^2 ، ونختار كل العينات العشوائية ذات الحجم ($n_2 \geq 30$) وتباين العينة S_2^2 من المجتمع الثاني اللامحدود الذي يتوزع توزيعا طبيعيا أيضا، حجمه N_2 بمتوسط μ_2 وتباينه مجهول σ_2^2 بحيث تكون العينات من المجتمع الأول مستقلة عنها في المجتمع الثاني، وعليه يكون توزيع المعاينة للفرق بين المتوسطات ($\bar{X}_1 - \bar{X}_2$) قريبا من التوزيع الطبيعي مهما يكون حجم العينتين، بمتوسط حسابي: $\mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \mu_1 - \mu_2$ وانحراف معياري: (نأخذ مكان σ_1 و σ_2 المجهولين انحرافي العينتين S_1 و S_2)

$$\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} \quad , \quad \text{إذا كان السحب بالإرجاع} \left(\frac{n_1}{N_1} \text{ و } \frac{n_2}{N_2} \leq 0,05 \right)$$

$$\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} \left(\frac{N_1 - n_1}{N_1 - 1} \right) + \frac{S_2^2}{n_2} \left(\frac{N_2 - n_2}{N_2 - 1} \right)} \quad , \quad \text{إذا كان السحب بدون إرجاع} \left(\frac{n_1}{N_1} \text{ و } \frac{n_2}{N_2} > 0,05 \right)$$

ومنه إحصائية التوزيع تعطى بالعلاقة التالية:

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2})}{\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}} = \begin{cases} \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2})}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \quad si \left(\frac{n_1}{N_1} \text{ و } \frac{n_2}{N_2} \leq 0,05 \right) \\ \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2})}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} \left(\frac{N_1 - n_1}{N_1 - 1} \right) + \frac{S_2^2}{n_2} \left(\frac{N_2 - n_2}{N_2 - 1} \right)}} \quad si \left(\frac{n_1}{N_1} \text{ و } \frac{n_2}{N_2} > 0,05 \right) \end{cases}$$

مثال 8: يخضع عمر بطاريات السيارات في المصنع الأول للتوزيع الطبيعي بمتوسط 3,5 سنة، سحبت منه عينة 36 بطارية فكان انحرافها المعياري 0,5 سنة، وفي المصنع الثاني يتبع أيضا عمر نفس البطاريات للتوزيع الطبيعي بمتوسط 3,2 سنة،

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

سنة، سحبت منه عينة 49 بطارية فكان تباينها 0,16 سنة، ماهو احتمال أي يزيد متوسط عمر بطارية من المصنع الأول عنه من المصنع الثاني على الأقل بمقدار 0,2 سنة ؟

الحل:

بما أن المصنعين يتبعان التوزيع الطبيعي وتباينهما مجهولين و $n_1 = 36 \geq 30$ و $n_2 = 49 \geq 30$ حيث أن: $\mu_1 = 3,5$ متوسط عمر البطاريات في المصنع الأول، و $\mu_2 = 90$ متوسط عمر البطاريات في المصنع الثاني، والسحب بالإرجاع لأن المجتمعين (المصنعين) غير محدودين، فإن توزيع المعاينة للفرق بين متوسطي العينتين يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط:

$$\mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \mu_1 - \mu_2 = 3,5 - 3,2 = 0,3$$

وانحراف معياري:

$$\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{(0,5)^2}{36} + \frac{0,16}{49}} = \sqrt{0,01} = 0,1$$

- حساب احتمال أن يكون الوسط الحسابي للعينة الأولى أكبر منه للعينة الثانية بمقدار على الأقل 0,25:

$$\begin{aligned} P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 > 0,2) &= P\left(Z > \frac{0,2 - \mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}}{\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}}\right) \\ &= P\left(Z > \frac{0,2 - 0,3}{0,1}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (Z \leq -1) &= 1 - F(-1) = 1 - (1 - F(1)) = P(Z > -1) = 1 - P \\ &= 1 - 0,8413 = 0,1587 \end{aligned}$$

3.1.3 توزيع المعاينة للفرق ($\bar{X}_1 - \bar{X}_2$) لمجتمعين يتوزعان توزيعا طبيعيا ، تباينهما مجهولين وحجم العينتين صغير ($n_1 < 30$ و n_2) :

نسحب كل العينات العشوائية ذات الحجم ($n_1 < 30$) وتباين العينة S_1^2 من المجتمع الأول الذي يتوزع توزيعا طبيعيا، حجمه N_1 بمتوسط μ_1 وتباينه مجهول σ_1^2 ، ونختار كل العينات العشوائية ذات الحجم ($n_2 < 30$) وتباين العينة S_2^2 من المجتمع الثاني الذي يتوزع توزيعا طبيعيا أيضا، حجمه N_2 بمتوسط μ_2 وتباينه مجهول σ_2^2 ، بحيث تكون العينات من المجتمع الأول مستقلة عنها من المجتمع الثاني، وعليه يكون توزيع المعاينة

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

للفرق بين متوسطي العينتين $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$ قريبا من توزيع ستيودنت، بمتوسط حسابي:
 $\mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \mu_1 - \mu_2$ أما الانحراف المعياري، فنحن أمام حالتين:

أ. الحالة الأولى: تباين المجتمعين مجهولين ومتساويين $(\sigma_1^2 = \sigma_2^2)$

هنا نقدر التباينين بنفس المقدر، وهو عبارة عن الوسط المرجح لتباين العينتين، ويرمز له بالرمز: S_P^2 ، حيث:

$$S_P^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1)} = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{(n_1 + n_2 - 2)}$$

وعليه يكون:

$$\left(\frac{n_1}{N_1} \text{ و } \frac{n_2}{N_2} \leq \right) \text{ إذا كان السحب بالإرجاع } = S_P \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sqrt{\frac{S_P^2}{n_1} + \frac{S_P^2}{n_2}} \quad (0,05)$$

$$\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sqrt{\frac{S_P^2}{n_1} \left(\frac{N_1 - n_1}{N_1 - 1} \right) + \frac{S_P^2}{n_2} \left(\frac{N_2 - n_2}{N_2 - 1} \right)}$$

$$\left(\frac{n_1}{N_1} \text{ و } \frac{n_2}{N_2} > \right) \text{ إذا كان السحب بدون إرجاع } = S_P \sqrt{\frac{1}{n_1} \left(\frac{N_1 - n_1}{N_1 - 1} \right) + \frac{1}{n_2} \left(\frac{N_2 - n_2}{N_2 - 1} \right)} \quad (0,05)$$

ومنه إحصائية التوزيع تعطى بالعلاقة التالية:

$$T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2})}{\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}} = \begin{cases} \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2})}{S_P \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \text{ si } \left(\frac{n_1}{N_1} \text{ و } \frac{n_2}{N_2} \leq 0,05 \right) \\ \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2})}{S_P \sqrt{\frac{1}{n_1} \left(\frac{N_1 - n_1}{N_1 - 1} \right) + \frac{1}{n_2} \left(\frac{N_2 - n_2}{N_2 - 1} \right)}} \text{ si } \left(\frac{n_1}{N_1} \text{ و } \frac{n_2}{N_2} > 0,05 \right) \end{cases}$$

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

وتكون درجة الحرية لتوزيع ستيودنت في هذه الحالة: $(v = n_1 + n_2 - 2)$

مثال 9: لدينا مجتمع أول يخضع للتوزيع الطبيعي بمتوسط 25، سحبت منه عينة حجمها 25 فكان انحرافها المعياري 3، من جهة أخرى مجتمع ثان يخضع هو الآخر للتوزيع الطبيعي بمتوسط 20، سحبت منه عينة حجمها 17 فكان تباينها 16، مع العلم أن العينتين مستقلتين وتباينا المجتمعين متساويين، ماهو احتمال أن يكون متوسط العينة الأولى أقل منه في العينة الثانية بمقدار 8,05 ؟

الحل:

بما أن المجتمعين يتبعان التوزيع الطبيعي وتباينهما مجهولين و $n_1 = 25 < 30$ و $n_2 = 17 < 30$ حيث أن: $\mu_1 = 25$ متوسط المجتمع الأول، و $\mu_2 = 20$ متوسط المجتمع الثاني، والسحب بالإرجاع لأن المجتمعين غير محدودين، فإن توزيع المعاينة للفرق بين متوسطي العينتين يتبع توزيع ستيودنت بدرجة حرية $v = n_1 + n_2 - 2 = 25 + 17 - 2 = 40$ ومتوسط:

$$\mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \mu_1 - \mu_2 = 25 - 20 = 5$$

وبما أن تباينا المجتمعين متساويين $(\sigma_1^2 = \sigma_2^2)$ ومجهولين، فنأخذ مكانهما الوسط المرجح لتباين العينتين، الذي يحسب كما يلي:

$$S_p^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{(n_1+n_2-2)} = \frac{(25-1)3^2 + (17-1)16}{(25+17-2)} = 11,8$$

وذلك لحساب الانحراف المعياري لتوزيع المعاينة (توزيع ستيودنت)، الذي يحسب كما يلي:

$$\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{11,8}{25} + \frac{11,8}{17}} = \sqrt{1,16} = 1,08$$

ومنه إحصائية التوزيع تعطى بالعلاقة التالية:

- حساب احتمال أن يكون الوسط الحسابي للعينة الأولى أقل منه في العينة الثانية بمقدار 8,05:

$$P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 < 8,05) =$$

$$P\left(T_{40} < \frac{8,05 - \mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}}{\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}}\right)$$

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

$$= P\left(T_{40} < \frac{8,05-5}{1,08}\right) = P(T_{40} < 2,82) = F(2,82) = 0,975$$

ب. الحالة الثانية: تباين المجتمعين مجهولين وغير متساويين ($\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$)

$$\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} \quad \left(\frac{n_1}{N_1} \text{ و } \frac{n_2}{N_2} \leq 0,05\right)$$

$$\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} \left(\frac{N_1 - n_1}{N_1 - 1}\right) + \frac{S_2^2}{n_2} \left(\frac{N_2 - n_2}{N_2 - 1}\right)} \quad \left(\frac{n_1}{N_1} \text{ و } \frac{n_2}{N_2} > 0,05\right)$$

ومنه إحصائية التوزيع تعطى بالعلاقة التالية:

$$T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2})}{\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}} = \begin{cases} \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2})}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} & \text{si } \left(\frac{n_1}{N_1} \text{ و } \frac{n_2}{N_2} \leq 0,05\right) \\ \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2})}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} \left(\frac{N_1 - n_1}{N_1 - 1}\right) + \frac{S_2^2}{n_2} \left(\frac{N_2 - n_2}{N_2 - 1}\right)}} & \text{si } \left(\frac{n_1}{N_1} \text{ و } \frac{n_2}{N_2} > 0,05\right) \end{cases}$$

وتكون درجة الحرية لتوزيع ستيودنت في هذه الحالة:

$$v = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2 - 1}}$$

مثال 10: نفس المثال رقم 8 غير أن ($\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$) نجد:

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

الحل:

نستعمل توزيع ستودنت بمتوسط:

$$\mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \mu_1 - \mu_2 = 25 - 20 = 5$$

وانحراف معياري: $\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{17}} = 1,14$ ، لأن السحب بالإرجاع، ودرجة حرية:

$$v = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2 - 1}} = \frac{\left(\frac{9}{25} + \frac{16}{17}\right)^2}{\frac{\left(\frac{9}{25}\right)^2}{25 - 1} + \frac{\left(\frac{16}{17}\right)^2}{17 - 1}} = 16,9 = 17$$

- حساب احتمال أن يكون الوسط الحسابي للعينة الأولى أقل منه في العينة الثانية بمقدار 8,05:

$$P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 < 8,05) =$$

$$P\left(T_{17} < \frac{8,05 - \mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}}{\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}}\right)$$

$$= P\left(T_{17} < \frac{8,05 - 5}{1,14}\right) = P(T_{17} < 2,68) = F(2,68) \simeq 0,99$$

في جدول ستودنت لا توجد القيمة 2,68 عند درجة الحرية 17 وإنما 2,567 و 2,898 محصورة بين

2,567	2,68	2,898
0,99	α	0,995

باستخدام نظرية الحصر نجد:

$$(2,898 - 2,567) \rightarrow (0,995 - 0,99) \Leftrightarrow (0,331) \rightarrow (0,005)$$

$$(2,68 - 2,567) \rightarrow (\alpha - 0,99) \Leftrightarrow (0,113) \rightarrow (\alpha - 0,99)$$

$$\alpha = \frac{(0,113)(0,005)}{(0,331)} + 0,99 = 0,9917 \text{ ومنه:}$$

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

$$F(2,68) = 0,9917 \text{ أي أن:}$$

2.3. توزيع المعاينة للفرق بين متوسطي حسابيين لعينتين مرتبطتين $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$:

لدينا مجتمع أول يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط μ_1 وتباين σ_1^2 ، وهو مرتبط مع مجتمع ثان يخضع هو الآخر للتوزيع الطبيعي بمتوسط μ_2 وتباين σ_2^2 ، نسحب عينة من المجتمع الأول حجمها n_1 قيمها $\{X_{11}, X_{12}, X_{13}, \dots, X_{1i}\}$ ، ونسحب عينة من المجتمع الثاني حجمها n_2 ، (حيث: $n_1 = n_2 = n$ أي أن حجما العينتين يجب أن يكونا متساويين) قيمها: $\{X_{21}, X_{22}, X_{23}, \dots, X_{2i}\}$ ، حيث أن: X_{1i} و X_{2i} قيم متناظرة (متقابلة) في العينتين المرتبطتين، وأن: $i = 1, 2, 3, 4, \dots, n$

إن الفرق: $d_i = X_{1i} - X_{2i}$ يعطينا سلسلة أخرى $\{d_1, d_2, d_3, \dots, d_i\}$ ، التي تشكل عينة عشوائية متوسطةها: $\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^n d_i}{n}$ وتباينها: $S_d^2 = \frac{\sum_{i=1}^n ((d_i - \bar{d})^2)}{n-1}$ ، المسحوبة من هذا المجتمع الذي وسطه: $\mu_d = \mu_1 - \mu_2$ وتباينه: σ_d^2

- إذا كان حجم العينة $n \geq 30$ وتباين المجتمع σ_d^2 مجهول، فإن توزيع فرق متوسطي العينتين يخضع للتوزيع الطبيعي بمتوسط: $E(\bar{d}) = \mu_{\bar{d}} = \mu_d = \mu_1 - \mu_2$ وتباين: $\frac{S_d^2}{n} = \sigma_{\bar{d}}^2$ ، أما إحصائية التوزيع

$$Z = \frac{\bar{d} - \mu_{\bar{d}}}{\frac{S_d}{\sqrt{n}}} \text{ فهي:}$$

- إذا كان حجم العينة $n < 30$ وتباين المجتمع σ_d^2 مجهول، فإن توزيع فرق متوسطي العينتين يخضع لتوزيع ستيودنت بدرجة حرية: $v = n-1$ ، ومتوسط كما يلي:

$$\frac{S_d^2}{n} = \sigma_{\bar{d}}^2 \text{ ، وتباين: } \mu_d = \mu_1 - \mu_2 = E(\bar{d}) = \mu_{\bar{d}} = \bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^n d_i}{n}$$

$$T = \frac{\bar{d} - \mu_{\bar{d}}}{\frac{S_d}{\sqrt{n}}} \text{ أما إحصائية التوزيع فهي:}$$

مثال 11: إذا كانت كمية السكر في الدم لمرضى السكري المعروفون بارتفاع كمية السكر في دمهم في أحد المستشفيات تخضع للتوزيع الطبيعي، أخذنا عينة عشوائية حجمها 6 مرضى من هؤلاء المرضى ، فكانت كمية السكر في الدم لديهم (غ/ل) قبل تلقي الدواء المعين لتخفيض السكر X_{1i} وبعد التلقي X_{2i} موضحة في الجدول التالي:

1,79	1,94	1,88	1,67	1,49	1,54	X_{1i}
1,42	1,65	1,41	1,22	1,1	1,49	X_{2i}

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

أ. أوجد توزيع المعاينة للفرق بين متوسطي العينتين

ب. أحسب احتمال أن يكون الفرق في كمية السكر في دم مرضى العينة المختارة قبل تلقي الدواء وبعده على الأكثر 0,43

الحل:

أ. إيجاد توزيع المعاينة للفرق بين متوسطي العينتين:

- بما توزيع مجتمع مرضى السكري في هذا المستشفى يخضع للتوزيع الطبيعي وتباينه مجهول، والعينتين قبل وبعد تلقي الدواء المعين مرتبطتين وحجمهما أقل من 30 ، فإن المعاينة لهذا الفرق ستخضع لتوزيع ستودنت، بدرجة حرية: $v = n - 1 = 6 - 1 = 5$ ومتوسط:

$$\mu_{\bar{d}} = \bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^n d_i}{n} = \frac{0,05+0,39+\dots+0,37}{6} = \frac{2,02}{6} = 0,34$$

أما تباين هذه المعاينة فهو: $\sigma_{\bar{d}} = \sqrt{0,01} = 0,1$ $\Rightarrow \sigma_{\bar{d}}^2 = \frac{0,08}{6} = 0,01$

$$S_d^2 = \frac{\sum_{i=1}^n ((d_i - \bar{d})^2)}{n-1} = \frac{0,4756}{6} = 0,08 \text{ حيث:}$$

0,0009	0,0025	0,0169	0,0121	0,0025	0,0841	$(d_i - \bar{d})^2$
0,03	-0,05	0,13	0,11	0,05	-0,29	$(d_i - \bar{d})$
0,37	0,29	0,47	0,45	0,39	0,05	$ d_i = X_{1i} - X_{2i} $
1,79	1,94	1,88	1,67	1,49	1,54	X_{1i}
1,42	1,65	1,41	1,22	1,1	1,49	X_{2i}

ب. حساب احتمال أن يكون الفرق في كمية السكر في دم مرضى العينة المختارة قبل تلقي الدواء وبعده على الأكثر 0,43:

$$\begin{aligned} P(\bar{d} \leq 0,3959) &= P\left(T_5 \leq \frac{0,3959 - \mu_{\bar{d}}}{\sigma_{\bar{d}}}\right) \\ &= P\left(T_5 \leq \frac{0,3959 - 0,34}{0,1}\right) \end{aligned}$$

وحسب جدول ستودنت نجد:

$$= P(T_5 \leq 0,559) = F(0,559) = 0,7$$

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

4. توزيع المعاينة لنسبة العينة $\hat{P}$:

يتكون المجتمع محل الدراسة هنا من جزء تكون الخاصية أو الظاهرة المدروسة محققة والجزء الآخر غير محققة، أي أن المتغير العشوائي X يأخذ قيمتين: $(X = 1)$ في حالة تحقق الظاهرة محل الدراسة في المجتمع، فيكون احتمال تحقق الظاهرة (P) ويسمى احتمال النجاح، و $(X = 0)$ في حالة عدم تحقق الظاهرة محل الدراسة في المجتمع، فيكون احتمال عدم تحقق الظاهرة $(q = 1 - P)$ ويسمى احتمال الفشل، ونظرا لتكرر نفس التجربة n مرة (وهو حجم العينة المسحوبة)، فيكون بذلك توزيع المجتمع هو توزيع ذي الحدين (التوزيع الثنائي) ، واحتمال النجاح (P) هو احتمال المجتمع، الذي يحسب بالعلاقة التالية:

حيث: $\left(P = \frac{X}{N}\right)$ يمثل عدد العناصر (الأفراد) التي تتحقق فيها الظاهرة المدروسة في المجتمع، N عدد العناصر الكلي في المجتمع أو ما يعرف بحجم المجتمع، وبالتالي يكون احتمال فشل الظاهرة المدروسة في المجتمع هو:

$$\left(q = 1 - p = 1 - \frac{X}{N}\right)$$

بما أننا في كثير من الأحيان لا نستطيع الحصول على نسبة المجتمع (التي تعتبر من أهم معالمه) لعدم توفر بيانات كل عناصر المجتمع محل الدراسة اتجاه الظاهرة المعنية، لذلك نلجأ للاستدلال عليها باستخدام نسبة الخاصية المدروسة في العينة العشوائية المسحوبة من هذا المجتمع، التي نرمز لها بالرمز $\hat{p}$ حيث:

حيث: $\left(\hat{p} = \frac{X}{n}\right)$ ، X يمثل عدد العناصر (الأفراد) التي تتحقق فيها الظاهرة المدروسة في العينة، n عدد العناصر الكلي في العينة أو ما يعرف بحجم العينة المسحوبة عشوائية من المجتمع محل الدراسة.

إذا كان لدينا مجتمع حجمه N يخضع لتوزيع ذي الحدين بمتوسط: $\mu = np$ وتباين: $\sigma^2 = npq$ ، حيث أن p هي نسبة العناصر ذات خاصية معينة في هذا المجتمع، ولدينا من جهة أخرى $\hat{p}$ نسبة العينة العشوائية المسحوبة بالإرجاع أو بدونه من هذا المجتمع حول نفس الخاصية محل الدراسة، حجمها n ويكون كبير أي: $(n \geq 30)$ ويكون أيضا $(np \geq 5 \text{ و } nq \geq 5)$:

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

- إذا كان السحب بالإرجاع أو $\left(\frac{n}{N} \leq 0,05\right)$ أي أن المجتمع غير محدود، فإن نسبة العينة تتبع التوزيع الطبيعي حيث: $\mu_{\hat{p}} = p$ وتباين: $\sigma_{\hat{p}}^2 = \frac{pq}{n}$ ونكتب:

$$\hat{p} \sim N(\mu_{\hat{p}} ; \sigma_{\hat{p}}^2) \Leftrightarrow \hat{p} \sim N\left(p ; \frac{pq}{n}\right)$$

$$Z = \frac{\hat{p} - \mu_{\hat{p}}}{\sigma_{\hat{p}}} = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$$
 فتكون بذلك إحصائية التوزيع كما يلي:

- إذا كان السحب بدون إرجاع أو $\left(\frac{n}{N} > 0,05\right)$ أي أن المجتمع محدود، فإن نسبة العينة تتبع التوزيع الطبيعي حيث: $\mu_{\hat{p}} = p$ وتباين: $\sigma_{\hat{p}}^2 = \frac{pq}{n} \left(\frac{N-n}{N-1}\right)$ ونكتب:

$$\hat{p} \sim N(\mu_{\hat{p}} ; \sigma_{\hat{p}}^2) \Leftrightarrow \hat{p} \sim N\left(p ; \frac{pq}{n} \left(\frac{N-n}{N-1}\right)\right)$$

حيث: $\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$ يسمى معامل الإرجاع أو معامل التصحيح

$$Z = \frac{\hat{p} - \mu_{\hat{p}}}{\sigma_{\hat{p}}} = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n} \left(\frac{N-n}{N-1}\right)}}$$
 ومنه إحصائية التوزيع كما يلي:

مثال 12: لدينا منطقة معينة وجد بها أن 2000 شخص من بين 5000 شخص يملكون أطباقا لاقطة، فإذا سحبنا عينة عشوائية حجمها 64 شخص

أ. ماهو احتمال أن تكون نسبة الأشخاص الذين يملكون أطباقا لاقطة في هذه العينة بين 30% و 50% ؟

ب. إذا كان احتمال نسبة الأشخاص الذين يملكون أطباقا لاقطة في هذه العينة أقل من 50% هو 0,9236 ماهو حجم العينة المناسب في حالة السحب بالإرجاع؟

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

الحل:

أ.حساب $P(0,3 \leq \hat{p} \leq 0,5)$: بما أن المتغير العشوائي (نسبة الأشخاص الذين يملكون أطباقا لاقطة) في المجتمع يتبع توزيع ذي الحدين حيث: $p = \frac{2000}{5000}$
 $q = 1 - p = 0,6 \Rightarrow 0,4 = 40\%$ وأن:

$\frac{n}{N} = \frac{64}{5000} = 0,01 \leq 0,05$ ، فإن السحب هنا بالإرجاع ، وبما أن: $n \geq 30$ فإن توزيع المعاينة للنسبة في العينة يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط: $\mu_{\hat{p}} = p = \frac{450}{700} = 0,64$ وتباين: $\sigma^2_{\hat{p}} = \frac{pq}{n} = \frac{(0,4)(1-0,4)}{64} = 0,0038$ أي أن:
الانحراف المعياري:

$$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{(0,4)(0,6)}{64}} = \sqrt{0,0038} = 0,06$$

ومنه:

$$\begin{aligned} P(0,3 \leq \hat{p} \leq 0,5) &= P\left(\frac{0,3-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \leq \hat{p} \leq \frac{0,5-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}\right) \\ &= P\left(\frac{0,3-0,4}{\sqrt{\frac{(0,4)(0,6)}{64}}} \leq Z \leq \frac{0,5-0,4}{\sqrt{\frac{(0,4)(0,6)}{64}}}\right) \\ &= P(-1,67 \leq Z \leq 1,67) = 2F(1,67) - 1 \\ &= 2F(0,9525) - 1 = 0,905 \end{aligned}$$

ب. حساب حجم العينة المناسب إذا كان احتمال نسبة الأشخاص الذين يملكون أطباقا لاقطة في هذه العينة أقل من 50% هو 0,9236 في حالة السحب بالإرجاع:

$$P(\hat{p} \leq 0,5) = P\left(Z \leq \frac{0,5-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}\right) = P\left(Z \leq \frac{0,5-0,4}{\sqrt{\frac{(0,4)(0,6)}{n}}}\right)$$

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

$$= P(Z \leq 0,2\sqrt{n}) \\ = F(0,2\sqrt{n}) = 0,9236$$

حسب جدول التوزيع الطبيعي نجد أن: $F(1,43) = 0,9236$

$$0,2\sqrt{n} = 1,43 \Rightarrow n = \left(\frac{1,43}{0,2}\right)^2 = 51,12 \simeq 51$$
 بالمطابقة نجد:

5. توزيع المعاينة للفرق بين نسبتين عينيتين $(\hat{P}_1 - \hat{P}_2)$:

لدينا مجتمع أول توزيعه ذي الحدين، حجمه N_1 ، هو محل دراسة ظاهرة معينة، احتمال تحقق الظاهرة فيه (P_1) واحتمال عدم تحقق الظاهرة $(q_1 = 1 - P_1)$ ، ولدينا من جهة أخرى مجتمع ثان توزيعه ذي الحدين أيضاً، حجمه N_2 ، هو محل دراسة نفس ظاهرة المجتمع الأول، احتمال تحقق الظاهرة فيه (P_2) واحتمال عدم تحقق الظاهرة $(q_2 = 1 - P_2)$ ، وعند عدم توفر بيانات كل العناصر في المجتمعين محل الدراسة اتجاه الظاهرة المعنية، نلجأ للاستدلال عليها باستخدام نسبة الخاصية المدروسة في العينتين العشوائيتين المسحوبتين من كل مجتمع، التي نرمز لها بالرمز $\hat{P}_1$ لنسبة العينة الأولى المسحوبة من المجتمع الأول، والتي حجمها كبير $(n_1 \geq 30)$ ، و $\hat{P}_2$ لنسبة العينة الثانية المسحوبة من المجتمع الثاني، والتي حجمها كبير أيضاً $(n_2 \geq 30)$ ، فتكون محاولة معرفة الفرق بين النسبتين في المجتمعين باستخدام الإحصائية $(\hat{P}_1 - \hat{P}_2)$ ، وذلك كما يلي:

- إذا كان السحب بالإرجاع أو $\left(\frac{n_1}{N_1} \leq 0,05 \text{ و } \frac{n_2}{N_2} \leq 0,05\right)$ أي أن المجتمعين غير محدودين، فإن نسبة هذا الفرق تتبع التوزيع الطبيعي حيث:

المتوسط هو:

$$\mu_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2} = \mu_{\hat{p}_1} - \mu_{\hat{p}_2} = p_1 - p_2$$

الانحراف المعياري هو:

$$\sigma_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2} = \sqrt{\frac{P_1(1-P_1)}{n_1} + \frac{P_2(1-P_2)}{n_2}}$$

إحصائية التوزيع كما يلي:

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

$$Z = \frac{(\hat{P}_1 - \hat{P}_2) - (\mu_{\hat{p}_1} - \mu_{\hat{p}_2})}{\sigma_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}} = \frac{(\hat{P}_1 - \hat{P}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{P_1(1-P_1)}{n_1} + \frac{P_2(1-P_2)}{n_2}}}$$

- إذا كان السحب بدون إرجاع أو $\left(\frac{n_1}{N_1} > 0,05 \text{ و } \frac{n_2}{N_2} > 0,05\right)$ ، أي أن المجتمعين غير محدودين، فإن نسبة هذا الفرق تتبع التوزيع الطبيعي حيث:

$$\mu_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2} = \mu_{\hat{p}_1} - \mu_{\hat{p}_2} = p_1 - p_2 \quad \text{المتوسط هو:}$$

الانحراف المعياري هو:

$$\sigma_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2} = \sqrt{\frac{P_1(1-P_1)}{n_1} \left(\frac{N_1 - n_1}{N_1 - 1}\right) + \frac{P_2(1-P_2)}{n_2} \left(\frac{N_2 - n_2}{N_2 - 1}\right)}$$

إحصائية التوزيع كما يلي:

$$\begin{aligned} Z &= \frac{(\hat{P}_1 - \hat{P}_2) - (\mu_{\hat{p}_1} - \mu_{\hat{p}_2})}{\sigma_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}} \\ &= \frac{(\hat{P}_1 - \hat{P}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{P_1(1-P_1)}{n_1} \left(\frac{N_1 - n_1}{N_1 - 1}\right) + \frac{P_2(1-P_2)}{n_2} \left(\frac{N_2 - n_2}{N_2 - 1}\right)}} \end{aligned}$$

مثال 13: إذا كان لدينا نسبة الذكور في المدرسة الأولى 0,35 وفي المدرسة الثانية 0,25 وسحبنا عينة عشوائية من المدرسة الأولى حجمها 36 وأخرى من المدرسة الثانية حجمها 49

أ. ما هو احتمال أن يكون الفرق بين نسبة الذكور في المدرسة الأولى عنها في المدرسة الثانية أكبر من 4%؟

ب. إذا كان عدد الطلاب في المدرسة الأولى 120 طالب وفي الثانية 100 طالب، أعد الإجابة على السؤال أ

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

الحل:

أ.حساب $P(\hat{p}_1 - \hat{p}_2 > 0,04)$: بما أن المجتمعين يتبعان توزيع ذي الحدين وحجم العينتين كبيرين ($n_1 = 36 \geq 30$ و $n_2 = 49 \geq 30$)، والمجتمعين غير محدودين (السحب بالإرجاع)، فإن توزيع المعاينة لهذا الفرق يقترب من التوزيع الطبيعي حيث:

المتوسط هو:

$$\mu_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2} = p_1 - p_2 = 0,35 - 0,25 = 0,1$$

الانحراف المعياري هو:

$$\sigma_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2} = \sqrt{\frac{P_1(1-P_1)}{n_1} + \frac{P_2(1-P_2)}{n_2}}$$

$$0,1 = \sqrt{\frac{0,35(1-0,35)}{36} + \frac{0,25(1-0,25)}{49}} =$$

$$P(\hat{p}_1 - \hat{p}_2 > 0,04) = P\left(Z > \frac{0,04 - (\mu_{\hat{p}_1} - \mu_{\hat{p}_2})}{\sigma_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}}\right) \text{ ومنه:}$$

$$= P\left(Z > \frac{0,04 - 0,1}{0,1}\right)$$

$$= P(Z > -0,6) = P(Z \leq 0,6) = F(0,6) = 0,7257$$

ب.حساب $P(\hat{p}_1 - \hat{p}_2 > 0,04)$ في حالة السحب بدون إرجاع لأن:

$$\left(\frac{n_1}{N_1} = \frac{36}{120} > 0,05 \text{ و } \frac{n_2}{N_2} = \frac{49}{100} > 0,05\right)$$

ومنه الانحراف المعياري لتوزيع المعاينة يصبح:

$$\sigma_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2} = \sqrt{\frac{P_1(1 - P_1)}{n_1} \left(\frac{N_1 - n_1}{N_1 - 1}\right) + \frac{P_2(1 - P_2)}{n_2} \left(\frac{N_2 - n_2}{N_2 - 1}\right)}$$

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

$$= \sqrt{\frac{0,35(1 - 0,35)}{36} \left(\frac{120 - 36}{120 - 1} \right) + \frac{0,25(1 - 0,25)}{49} \left(\frac{100 - 49}{100 - 1} \right)}$$

$$= 0,08$$

$$P(\hat{p}_1 - \hat{p}_2 > 0,04) = P\left(Z > \frac{0,04 - (\mu_{\hat{p}_1} - \mu_{\hat{p}_2})}{\sigma_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}}\right) \text{ ومنه:}$$

$$= P\left(Z > \frac{0,04 - 0,1}{0,08}\right)$$

$$= P(Z > -0,75) = P(Z \leq 0,75) = F(0,75) = 0,7734$$

6. توزيع المعاينة لتباين العينة (S^2):

عادة نستخدم توزيع المعاينة للتباين للاستدلال عن تباين المجتمع باستخدام العينة المسحوبة منه في الظاهرة المدروسة، فإذا اخترنا عينة عشوائية حجمها n من مجتمع يخضع للتوزيع الطبيعي بوسط حسابي μ وتباين σ^2 فإن تباين العينة S^2 سيتوزع توزيع مربع كاي (χ^2) بدرجة حرية $(v = n - 1)$ ، وذلك كما يلي:

$$\frac{(n - 1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$$

مثال 14: مصنع لإنتاج الأسمدة الزراعية، يعبئ هذه الأسمدة في أكياس، متوسط وزن الكيس 65 كلف بانحراف معياري 0,9 كلف (علما أن هذا الوزن يخضع للتوزيع الطبيعي)، أخذت عينة عشوائية من هذه الأكياس حجمها 15 كيس

أ. أحسب احتمال أن يبلغ تباين العينة 0,8 كلف على الأكثر

ب. أحسب احتمال أن يبلغ تباين العينة 0,35 كلف على الأقل

ت. إذا كان احتمال أن يكون تباين عينة أكبر من 16,5 هو 0,25 عند درجة حرية 23، ما هو تباين المجتمع المناسب؟

الحل:

أ. حساب احتمال أن يبلغ تباين العينة 0,8 كلف على الأكثر: بما أن وزن أكياس الأسمدة يخضع للتوزيع الطبيعي بتباين $\sigma^2 = 0,9$ فإن تباين العينة المسحوبة منه سيخضع لتوزيع مربع كاي (χ^2) بدرجة حرية $(v = n - 1 \Leftrightarrow v = 15 - 1 = 14)$ ومنه:

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

$$P(S^2 \leq 0,8) = P\left(\chi^2_{(n-1)} \leq \frac{0,8(n-1)}{\sigma^2}\right) = P\left(\chi^2_{14} \leq \frac{0,8(14)}{0,9}\right)$$

$$= P(\chi^2_{14} \leq 12,44)$$

في جدول مربع كاي (χ^2) لا توجد القيمة 12,44 عند درجة الحرية 14 وإنما
محصورة بين 10,2 و 13,3

10,2	12,44	13,3
0,25	α	0,5

باستخدام نظرية الحصر نجد:

$$(13,3 - 10,2) \rightarrow (0,5 - 0,25) \Leftrightarrow (3,1) \rightarrow (0,25)$$

$$(12,44 - 10,2) \rightarrow (\alpha - 0,25) \Leftrightarrow (2,24) \rightarrow (\alpha - 0,25)$$

$$\alpha = \frac{(2,24)(0,25)}{(3,1)} + 0,25 = 0,43 \text{ ومنه:}$$

ب. حساب احتمال أن يبلغ تباين العينة 0,35 كلغ على الأقل:

$$P(S^2 \geq 0,35) = P\left(\chi^2_{(n-1)} \geq \frac{0,35(n-1)}{\sigma^2}\right)$$

$$= P\left(\chi^2_{14} \geq \frac{0,35(14)}{0,9}\right)$$

$$= P(\chi^2_{14} \geq 5,44) = 1 - P(\chi^2_{14} < 5,44)$$

في جدول مربع كاي (χ^2) لا توجد القيمة 5,44 عند درجة الحرية 14 وإنما 5,44
محصورة بين 4,66 و 5,63

4,66	5,44	5,63
0,01	α	0,025

باستخدام نظرية الحصر نجد:

$$(5,63 - 4,66) \rightarrow (0,025 - 0,01) \Leftrightarrow (0,97) \rightarrow (0,015)$$

$$(5,44 - 4,66) \rightarrow (\alpha - 0,01) \Leftrightarrow (0,78) \rightarrow (\alpha - 0,01)$$

$$\alpha = \frac{(0,78)(0,015)}{(0,97)} + 0,01 = 0,022 \text{ ومنه:}$$

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

$$= P(\chi^2_{14} \geq 5,44) = 1 - P(\chi^2_{14} < 5,44) = 1 - 0,022 = 0,978$$

ت. حجم تباين المجتمع المناسب σ^2 إذا كان $P(S^2 > 16,5) = 0,25$ عند درجة حرية 23:

$$\begin{aligned} P(S^2 > 16,5) &= P\left(\chi^2_{(n-1)} > \frac{16,5(n-1)}{\sigma^2}\right) \\ &= P\left(\chi^2_{23} > \frac{16,5(23)}{\sigma^2}\right) \\ &= P\left(\chi^2_{23} \geq \frac{379,5}{\sigma^2}\right) = 1 - P\left(\chi^2_{23} < \frac{379,5}{\sigma^2}\right) = 0,25 \\ \Rightarrow P\left(\chi^2_{23} < \frac{379,5}{\sigma^2}\right) &= 1 - 0,25 = 0,75 \end{aligned}$$

في جدول مربع كاي (χ^2) عند درجة حرية 23 واحتمال 0,75 نجد:

$$\Rightarrow P(\chi^2_{23} < 27,1) = 0,75$$

$$\frac{379,5}{\sigma^2} = 27,1 \Rightarrow \sigma^2 = \frac{379,5}{27,1} = 14 \quad \text{بالمطابقة نجد:}$$

7. توزيع المعاينة للنسبة بين تبايني عينتين $\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\right)$:

لدينا مجتمع أول يخضع للتوزيع الطبيعي متوسطه μ_1 وتباينه σ_1^2 أي: $(X_1 \sim N(\mu_1; \sigma_1^2))$ ، نسحب منه عينة عشوائية حجمها n_1 وتباينها S_1^2 ، ولدينا أيضا من جهة أخرى مجتمع ثان يخضع للتوزيع الطبيعي متوسطه μ_2 وتباينه σ_2^2 أي: $(X_2 \sim N(\mu_2; \sigma_2^2))$ ، نسحب منه عينة عشوائية حجمها n_2 وتباينها S_2^2 ، علما أن العينتين مستقلتين، فحينئذ تتوزع النسبة $\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\right)$ توزيع فيشر (F) بدرجة حرية: $(v_1 = n_1 - 1)$ و $(v_2 = n_2 - 1)$ ، وكما هو معروف أن توزيع فيشر $(F_{(v_2; v_1)})$ هو النسبة بين توزيعين مستقلين يتبع كل واحد منهما توزيع مربع كاي، كل بدرجة حريته، ونكتب:

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

$$F_{(v_2; v_1)} = \frac{\frac{\chi_1^2}{n_1 - 1}}{\frac{\chi_2^2}{n_2 - 1}} = \frac{\frac{(n_1 - 1)S_1^2}{\sigma_1^2}}{\frac{(n_2 - 1)S_2^2}{\sigma_2^2}} = \frac{\frac{S_1^2}{\sigma_1^2}}{\frac{S_2^2}{\sigma_2^2}} = \frac{S_1^2}{S_2^2} \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$$

ومنه تتوزع النسبة $\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\right)$ توزيع فيشر (F)، أي: $\frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F_{(v_2; v_1)} = \frac{S_1^2}{S_2^2} \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$

مثال 15: يرغب مستثمر في المقارنة بين مخاطر نوعين مختلفين من الأسهم، سجلت تغيرات سعر السهم الأول لعينة 11 يوم، وسجلت من جهة أخرى تغيرات سعر السهم الثاني لعينة 21 يوم، من الخبرات السابقة علم أن تباين سعر السهم الأول كان مساويا 0,0297 ، وأن تباين سعر السهم الثاني كان مساويا 0,25 ، بافتراض أن المجتمعين يتبعان التوزيع الطبيعي والعينتين مستقلتين:

أ. أحسب احتمال أن تكون النسبة بين تباين العينة للسهم الأول وتباين العينة للسهم الثاني أقل من 40%

ب. أحسب احتمال أن تكون النسبة بين تباين العينة للسهم الأول وتباين العينة للسهم الثاني أكبر من 28%

الحل:

أ. حساب $P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} < 0,4\right)$:

لدينا عينتين مستقلتين العينة الأولى حجمها $n_1 = 11$ مسحوبة من مجتمع توزيعه طبيعي وتباينه $\sigma_1^2 = 0,0297$ والعينة الثانية حجمها $n_2 = 21$ مسحوبة من مجتمع توزيعه طبيعي أيضا وتباينه $\sigma_2^2 = 0,25$ ، ومنه معاينة نسبة تباين العينة الأولى S_1^2 على تباين العينة الثانية S_2^2 يتبع توزيع فيشر بدرجة حرية البسط $(v_1 = n_1 - 1 = 11 - 1 = 10)$ ودرجة حرية المقام: $(v_2 = n_2 - 1 = 21 - 1 = 20)$

وعليه نجد:

$$P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} < 0,4\right) = P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} < 0,4 \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\right) = P\left(F < 0,4 \frac{0,25}{0,0297}\right) \\ = P(F < 3,37) = 0,99$$

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

ب. حساب $P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} > 0,28\right)$:

$$P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} > 0,28\right) = P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} > 0,28 \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\right) = P\left(F > 0,28 \frac{0,25}{0,0297}\right) \\ = P(F > 2,35) = 1 - P(F \leq 2,35) = 1 - 0,95 = 0,05$$

8. تمارين مقترحة حول الفصل الأول:

التمرين 1: إذا كانت نقاط 400 طالب من قسم العلوم الاقتصادية في امتحان الإحصاء 4 تتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط 11,5 وانحراف معياري 4,5 ، سحبنا عينة عشوائية مكونة من 25 طالب

1. ما هي طبيعة (نوع) توزيع متوسط النقاط في العينة؟
2. أحسب احتمال أن يكون متوسط النقاط في العينة أكبر من 10
3. أحسب احتمال أن يكون متوسط النقاط في العينة بين 10 و 13

التمرين 2: يتبع عدد الطلبة المتغيبين عن امتحانات السداسي الأول قانون بواسون بتوقع يساوي 30 ، اخترنا عدد الغيابات المسجلة في امتحانات السداسي الأول الخاصة بطلبة قسم معين والمقدرة بـ 36 امتحان ، ما هو احتمال أن يتجاوز متوسط عدد الغيابات لكل الامتحانات 32 غياب؟

التمرين 3: إذا كانت أجور الموظفين بمؤسسة ما تتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط 28500 دج ، سحبنا عينة مكونة من 16 موظف ما هو احتمال أن يزيد متوسط أجورهم عن 29500 دج ؟ علما أن الانحراف المعياري للعينة يساوي 1877 دج

التمرين 4: تدرس شركة طيران إمكانية السماح بحمولة يدوية مجانية للزبون، وقد وجد أن الوزن المتوسط للحمولة هو 5 كغ بتباين 0,25 كغ، اخترنا للدراسة عينة عشوائية حجمها 100 راكب

1. أحسب احتمال أن يكون الوزن الإجمالي للحمولة أقل من 515 كغ
2. أحسب احتمال أن يكون الوزن الإجمالي للحمولة بين 490 كغ و 520 كغ

التمرين 5: يمتلك صاحب مصنع لإنتاج المصابيح الكهربائية وحدتين إنتاجيتين A و B متوسط عمر المصابيح التي تنتجها الوحدة A هو 900 ساعة بانحراف معياري قدره 72 ساعة ويخضع عمر المصابيح التي تنتجها الوحدة B للتوزيع الطبيعي بمتوسط 1000 وتباين 8100

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

1- ن سحب عينة من 64 مصابيح منتجة بالوحدة A ، ما هو احتمال أن يتجاوز مجموع أعمارها 56000 ساعة؟

2- ما هو عدد المصابيح الواجب سحبها من الوحدة الإنتاجية B حتى يكون احتمال أن يقل متوسط عمرها عن 1030 ساعة يساوي 0.9525؟

3- ن سحب عينة من 180 مصباح من الوحدة A و عينة أيضا من 144 مصباح من الوحدة B ، احسب احتمال أن يزيد متوسط عمر المصابيح المسحوبة من الوحدة B 80 ساعة على الأقل عن متوسط عمر المصابيح المسحوبة من الوحدة A .

التمرين 6: شركتان لإنتاج الأدوية معدل الأجور في الشركة الأولى يساوي 37000 دج بانحراف معياري 5000 دج وفي الثانية 29000 دج بانحراف معياري 6000 دج ، سحبنا عينة عشوائية من 20 عامل من الشركة الأولى 25 عامل من الشركة الثانية مع العلم أن الأجور المدفوعة من طرف الشركتين تتبع التوزيع الطبيعي

1. أوجد طبيعة توزيع المعاينة للفرق بين المتوسطين
2. أحسب احتمال أن يزيد معدل الأجور في الشركة الأولى عنه في الثانية بمقدار يفوق 7000 دج

التمرين 7: إذا كان متوسط استهلاك البنزين للسيارات من النوع A يساوي 9,5 لتر في 100 كم بانحراف معياري 1,5 لتر وكان متوسط استهلاك البنزين للسيارات من النوع B يساوي 8,7 لتر في 100 كم بانحراف معياري 1,1 لتر ، سحبنا للدراسة عينة من سيارات النوع A حجمها 100 وعينة من سيارات النوع B حجمها 110

1. أوجد طبيعة توزيع المعاينة للفرق بين المتوسطين
2. أحسب احتمال أن يقل متوسط استهلاك البنزين لسيارات النوع B عنه لسيارات النوع A بمقدار يقل عن 0,6 لتر

التمرين 8: مجتمع مكون من 700 شخص من بينهم 450 مدخن ، إذا سحبنا عينة عشوائية من 40 شخص ما هو احتمال أن تكون نسبة المدخنين في العينة أكبر من 47%

التمرين 9: اشترت إدارة الجامعة 10000 علبة أقلام للبيضاء من أحد باعة الجملة، ثبت أن نسبة الأقلام غير الصالحة للاستعمال يقدر بـ 3% ، ما هو عدد العلب المتوقع أن تحوي 48 قلم صالح على الأقل؟ علما أن كل علبة تحوي 50 قلم

التمرين 10: إذا علمت أن نسبة الذكور في مؤسسة A تبلغ 30% وفي المؤسسة B 20% ، وأنا سحبنا عينة عشوائية من المؤسسة A حجمها 100 ومن المؤسسة B حجمها 200

1. أوجد طبيعة توزيع المعاينة للفرق بين النسبتين

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

2. أوجد احتمال أن تكون نسبة الذكور في المؤسسة A أكبر منها في المؤسسة B في العينتين بمقدار أكبر من 6%

التمرين 11: الوزن بالكيلوغرام للطلبة الذكور لكلية ما يخضع لقانون التوزيع الطبيعي بانحراف معياري يساوي 10 ، ما هي القيمة التي يقدر احتمال أن يتجاوزها تباين عينة من 31 طالب بـ 0,05 ؟

التمرين 12: إذا كان احتمال أن يكون تباين عينة أكبر من 14 هو 0,25 ، ما هو الانحراف المعياري المناسب للمجتمع إذا كان حجم العينة 25؟

التمرين 13: لدينا عينة حجمها 8 مسحوبة من مجتمع طبيعي تباينه 20 ، ولدينا من جهة أخرى عينة ثانية حجمها 10 مسحوبة من مجتمع طبيعي انحرافه المعياري 6 ، ما هو احتمال أن يكون تباين العينة الأولى أكبر من ضعف تباين العينة الثانية؟

الفصل الثاني: نظرية التقدير

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

تمهيد:

نظرا للصعوبات التي تواجه الباحثين في الحصول على كل بيانات المجتمع محل الدراسة، واللجوء إلى أسلوب العينة في ذلك، أصبحت أساليب الاستدلال الإحصائي هي الوسيلة لاتخاذ القرارات الإحصائية، فتأتي نظرية التقدير كأحد وسائل الاستنتاج الإحصائي في الوصول إلى القرارات السليمة عندما تكون معالم المجتمع مجهولة، فمحاولة إيجاد قيمة لأحد معالم المجتمع عن طريق عينة من المشاهدات المسحوبة منه يعطينا ما يسمى بتقدير تلك المعلمة، والصيغة أو الدالة المستخدمة في الحصول على تلك القيمة أو التقدير تسمى مقدرًا.

يمكن تقدير معالم المجتمع بقيمة واحدة، وهي قيمة المقدر التي نتوصل إليها من خلال معطيات العينة المختارة، فمثلا تقدير متوسط المجتمع (μ) هو متوسط العينة ($\bar{X}$)، وتقدير نسبة المجتمع (P) هو نسبة العينة ($\hat{P}$) إلى غيرها من التقديرات، هذا النوع من التقدير يسمى التقدير النقطي أو التقدير بنقطة (التقدير بقيمة واحدة)، وهو يختلف من عينة لأخرى رغم استخدامنا نفس المقدر، فالعينة المختارة نأمل في أن يكون تقديرها أقرب للقيمة الحقيقية لمعلمة المجتمع المراد الحصول عليها رغم أن هذا صعب الوقوع، لذلك من الأفضل وضع حد أدنى و آخر أعلى تتأرجح من خلالهما القيمة الحقيقية لمعلمة المجتمع بمستوى ثقة معين، وهذا ما يسمى بالتقدير بمجال أو فترة ثقة، وعليه نقسم المحور الثاني إلى ما يلي:

- التقدير النقطي.
- خصائص المقدر الجيد
- التقدير بمجال ثقة.

1. التقدير النقطي: أو ما يعرف بالتقدير بقيمة واحدة، ويقصد به تمثيل معلمة المجتمع المجهولة بقيمة واحدة نحسبها انطلاقا من عينة عشوائية مسحوبة منه باستخدام المقدر، فمثلا نقدر العمر الافتراضي للمصابيح المنتجة في مصنع معين هو 300 ساعة، وهناك عدة طرق لإيجاد المقدرات النقطية لمعالم المجتمع نذكر منها دون شرح: طريقة العزوم وطريقة المعقولة العظمى، فإذا أردنا تقدير متوسط المجتمع (μ) نسحب عينة منه ونقوم بحساب وسطها الحسابي: $\left(\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}\right)$ ، هذا الأخير سيكون تقديرا لمتوسط المجتمع⁸، أي أن: $(\hat{\mu} = \bar{X})$ ، وأيضا إذا كان المجتمع مجهول التباين فتقديره هو تباين العينة التي سحبت منه، أي أن:

$$\left(\hat{\sigma}^2 = S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n - 1}\right)$$

⁸ موساوي عبد النور وبركان يوسف، الإحصاء 2، دار العلوم للنشر والتوزيع، عنابة، الجزائر، 2010، ص 129.

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

- 2. خصائص المقدر الجيد:** يكون المقدر جيدا إذا تحققت فيه بعض المواصفات وهي⁹:
- 1.2 خاصية عدم التحيز:** يمكن تعريف التحيز بأنه يتمثل في وجود فرق أو انحراف بين القيمة المتوقعة للمقدر $(\hat{\theta})$ ومعلمة المجتمع الحقيقية (θ) ، أي: $(E(\hat{\theta}) \neq \theta)$ ، وبالتالي يكون عدم التحيز معاكسا أي أن: $(E(\hat{\theta}) = \theta)$
- 2.2 خاصية عدم الاتساق:** نقول عن المقدر $(\hat{\theta})$ أنه متسق إذا اقتربت قيمته من قيمة المعلمة الحقيقية للمجتمع (θ) كلما كبر حجم العينة، أي أن: $\lim_{n \rightarrow \infty} (|\hat{\theta} - \theta| > \varepsilon) = 0$ ، $\varepsilon > 0$
- 3.2 خاصية الكفاءة:** إذا كان لدينا أكثر من مقدر فنقول أن المقدر الأكفأ هو المقدر الذي له أقل تباين، فالكفاءة خاصية نسبية تستخدم للمقارنة بين المقدرات المختلفة لنفس المعلمة وبنفس حجم العينة، ويكون المقدر الأكفأ هو الذي يعطي تقديرات أقرب من المعلمة المجهولة، فإذا كان لدينا مقدرين $(\hat{\theta}_1$ و $\hat{\theta}_2$) للمعلمة (θ) ، فيكون المقدر $(\hat{\theta}_1)$ أكفأ من $(\hat{\theta}_2)$ إذا كان $(V(\hat{\theta}_1) < V(\hat{\theta}_2))$ ، ومقياس الكفاءة النسبية بين $\hat{\theta}_1$ و $\hat{\theta}_2$ يعطى بالعلاقة التالية:

$$e = \frac{V(\hat{\theta}_1)}{V(\hat{\theta}_2)}$$

- إذا كان (e) أقل من الواحد نقول: $(\hat{\theta}_1)$ أكفأ من $(\hat{\theta}_2)$ أما إذا كان (e) أكبر من الواحد نقول: $(\hat{\theta}_2)$ أكفأ من $(\hat{\theta}_1)$
- 4.2 الكفاية:** نقول عن المقدر أن له صفة الكفاية إذا كان يحوي جميع أو أغلب مشاهدات العينة، بحيث لا يوجد مقدر غيره يمكن أن يحوي أغلب تلك المشاهدات، مثل الوسط الحسابي للعينة المسحوبة من مجتمع طبيعي هو مقدر كاف مقارنة بالوسيط و المنوال، حيث أنه يعتمد على جميع المشاهدات بخلاف الوسيط والمنوال.
- 3. التقدير بمجال الثقة:** هو أدق من التقدير النقطي، وهو التقدير الذي يتألف من قيمتين عدديتين تعرفان مجالا من القيم التي نتوقع أن يتضمن المعلمة المطلوب تقديرها بدرجة ثقة معينة، وهاتين القيمتين تتمثلان في الحد الأدنى لمجال الثقة والأخرى الحد الأعلى له، نرمز لدرجة الثقة أو معامل الثقة (مستوى الثقة) بالرمز $(1 - \alpha)$ ، حيث: (α) تسمى مستوى المعنوية أو مستوى الدلالة أو مستوى الخطأ (وهي الخطأ من النوع الأول في اختبار الفروض الذي سنراه لاحقا)، وهي عكس مستوى الثقة.

⁹ كيجل عبد الباقي، مطبوعة محاضرات في الإحصاء الاستدلالي (الإحصاء 03)، كلية العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية وعلوم التسيير، جامعة أحمد بن يحيى الونشريسي تيسمسيلت، الجزائر، 2021/2020، ص 64

1.3 مجال الثقة لمتوسط المجتمع (μ):

1.1.3 عندما يكون تباين المجتمع σ^2 معلوم:

إذا كان لدينا مجتمعا يخضع للتوزيع الطبيعي بمتوسط μ وتباين σ^2 معلوم، وسحبنا منه العينات العشوائية البسيطة التي لها نفس الحجم n ، فإن توزيع المعاينة للوسط الحسابي $\bar{X}$ يكون أيضا توزيعا طبيعيا مهما كان حجم العينة n ، وأيضا إذا كان توزيع المجتمع ليس بالضرورة توزيعا طبيعيا وكان حجم العينة كبير ($n \geq 30$) فحسب نظرية النهاية المركزية توزيع المعاينة للوسط الحسابي $\bar{X}$ يكون أيضا توزيعا طبيعيا بمتوسط μ مهما كان نوع سحب العينة بالإرجاع أو بدونه، وتباين $\frac{\sigma^2}{n}$ إذا كان السحب بالإرجاع أي حجم المجتمع غير محدود و $\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} \left(\frac{N-n}{N-1} \right)$ إذا كان السحب بدون إرجاع أي حجم المجتمع محدود، وعليه إحصائية التوزيع الطبيعي المعياري $Z \sim N(0,1)$ تكون كما يلي:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \quad - \text{ إذا كان السحب بالإرجاع:}$$

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n} \frac{N-n}{N-1}}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}} \quad - \text{ إذا كان السحب بدون إرجاع:}$$

من الملاحظ أن Z دالة في المقدّر $\bar{X}$ والمعلمة المجهولة هي μ ، وبالتالي Z هي كمية محورية نستطيع استعمالها في إيجاد مجال الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع μ ، ومجاله عند معلومية تباين المجتمع σ^2 وعند مستوى ثقة معين $(1 - \alpha)$ يعطى كما يلي:

- في حالة السحب بالإرجاع:

بما أن منحنى التوزيع الطبيعي المعياري متناظر فإن:

$$P \left(-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq Z \leq Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right) = 1 - \alpha$$

$$P \left(-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right) = 1 - \alpha$$

بإجراء العمليات الجبرية على الحدود الثلاثة للمتباينة الموجودة داخل قوسي الاحتمال، بحيث نجعل الحد الأوسط للمتباينة يحتوي على المعلمة المجهولة μ فقط، ويتم ذلك بضرب الأطراف الثلاثة للمتباينة في $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ فنحصل على العبارة التالية:

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

$$P\left(-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{X} - \mu \leq Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

ثم بطرح $\bar{X}$ من الأطراف الثلاثة للمتباينة نجد:

$$P\left(-\bar{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq -\mu \leq -\bar{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

وبضرب الأطراف الثلاثة للمتباينة في (-1) نجد:

$$P\left(\bar{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

ويمكن كتابة هذا الأخير كما يلي:

$$CI(\mu)_{(1-\alpha)} = \bar{X} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \left[\bar{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \bar{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

- في حالة السحب بدون إرجاع:

$$P\left(\bar{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \leq \mu \leq \bar{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\right) = 1 - \alpha$$

ويمكن الكتابة كما يلي:

$$CI(\mu)_{(1-\alpha)} = \bar{X} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

حيث الحد الأدنى لمجال الثقة يرمز له عادة بالرمز (L) والحد الأعلى للمجال يرمز له عادة بالرمز (U) وهما كما يلي:

$$L = \bar{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \text{ و } U = \bar{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \text{ في حالة السحب بالإرجاع.}$$

$$L = \bar{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \text{ و } U = \bar{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \text{ في حالة السحب بدون إرجاع.}$$

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

أما المقدار الذي نضيفه وننقصه من و إلى $\bar{X}$ في طرفي متباينة المجال نسميه حد الخطأ في التقدير نرمز له بالرمز (E) ويعطى بالعلاقة:

$$E = Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{- حالة السحب بالإرجاع:}$$

$$E = Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \quad \text{- حالة السحب بدون إرجاع:}$$

مثال 16: إذا كان وزن الدجاج بالغرام في أحد المزارع بعد 45 يوم يتبع التوزيع الطبيعي بانحراف معياري يساوي 230 غرام، سحبت عينة عشوائية من أحد المزارع المنتجة للدجاج حجمها 25 دجاجة ووجد أن متوسط وزن الدجاج في العينة 890 غرام، والانحراف المعياري لها 200 غرام

أ. أعط التقدير النقطي لمتوسط وزن الدجاج في المزرعة.

ب. قدر مجال الثقة لمتوسط وزن الدجاج في المزرعة باستخدام مستوى ثقة 95%

ت. قدر مجال الثقة لمتوسط وزن الدجاج في المزرعة باستخدام مستوى ثقة 99% ماذا تستنتج؟

الحل:

أ. إعطاء التقدير النقطي لمتوسط وزن الدجاج في المزرعة:

$$\hat{\mu} = \bar{X} = 890$$

ب. تقدير مجال الثقة لمتوسط وزن الدجاج في المزرعة باستخدام مستوى ثقة 95%:

بما أن المجتمع طبيعي وتباينه معلوم فإن توزيع المعاينة يتبع التوزيع الطبيعي مهما يكن حجم العينة ، وبالتالي يمكننا وضع مجال الثقة لمتوسط المجتمع (متوسط وزن الدجاج في المزرعة) بمستوى ثقة 95% وذلك بالعلاقة التالية:

$$P\left(\bar{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

لدينا: $1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow \alpha = 0,05$ أي أن:

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-\frac{0,05}{2}} = 1,6 \quad Z_{0,975} = 1,96$$

ومنه بالتطبيق العددي نجد:

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

$$P\left(890 - 1,96 \frac{230}{\sqrt{25}} \leq \mu \leq 890 + 1,96 \frac{230}{\sqrt{25}}\right) = 0,95$$

$$P(890 - 90,16 \leq \mu \leq 890 + 90,16) = 0,95$$

$$P(799,84 \leq \mu \leq 970,16) = 0,95$$

معناه نحن واثقون أن 95% من أن هذا المجال صحيح أي لمتوسط المجتمع (متوسط وزن الدجاج في المزرعة محصور بين 799,84 و 970,16 بنسبة 95%

ت. تقدير مجال الثقة لمتوسط وزن الدجاج في المزرعة باستخدام مستوى ثقة 99%:

يمكننا وضع مجال الثقة لمتوسط المجتمع (متوسط وزن الدجاج في المزرعة) بمستوى ثقة 99% وذلك بالعلاقة التالية:

$$P\left(\bar{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

لدينا: $1 - \alpha = 0,99 \Rightarrow \alpha = 0,01$ أي أن:

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-\frac{0,01}{2}} = Z_{0,995} = 2,575$$

ومنه بالتطبيق العددي نجد:

$$P\left(890 - 2,575 \frac{230}{\sqrt{25}} \leq \mu \leq 890 + 2,575 \frac{230}{\sqrt{25}}\right) = 0,95$$

$$P(890 - 118,45 \leq \mu \leq 890 + 118,45) = 0,95$$

$$P(771,55 \leq \mu \leq 1008,45) = 0,95$$

معناه نحن واثقون أن 99% من أن هذا المجال صحيح أي متوسط وزن الدجاج في المزرعة محصور بين 771,55 و 1008,45 بنسبة 99%

نستنتج أنه كلما زاد مستوى الثقة $(1 - \alpha)$ اتسع مجال الثقة أي أن هناك علاقة طردية

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

2.1.3 عندما يكون تباين المجتمع σ^2 مجهول وحجم العينة $(n \geq 30)$:

في كثير من الدراسات يكون تباين المجتمع مجهولا، وبالتالي إذا كان لدينا مجتمع يتوزع توزيعا طبيعيا بمتوسط μ وتباين σ^2 مجهولين، وكانت لدينا عينة عشوائية مسحوبة منه حجمها $(n \geq 30)$ وتباينها S^2 ، فإن توزيع المعاينة للوسط الحسابي $\bar{X}$ يقرب إلى التوزيع الطبيعي بمتوسط μ مهما كان نوع سحب العينة بالإرجاع أو بدون، وتباين $\frac{S^2}{n}$ إذا كان السحب بالإرجاع و $\frac{S^2}{n} \left(\frac{N-n}{N-1} \right)$ إذا كان السحب بدون إرجاع، وعليه إحصائية التوزيع الطبيعي المعياري $Z \sim N(0,1)$ تكون كما يلي:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \quad - \quad \text{إذا كان السحب بالإرجاع:}$$

وعليه يكون مجال الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع μ عند عدم معلومية تباين المجتمع σ^2 ومستوى ثقة معين $(1 - \alpha)$ كما يلي:

ننتقل من منحني التوزيع الطبيعي المعياري متناظر أي أن:

$$P \left(-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq Z \leq Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right) = 1 - \alpha$$

$$P \left(-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \leq Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right) = 1 - \alpha$$

وبعد إجراء نفس العمليات الجبرية التي قمنا بها سابقا على الحدود الثلاثة للمتباينة الموجودة داخل قوسي الاحتمال نصل إلى أن مجال الثقة المناسب وهو:

$$P \left(\bar{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} \right) = 1 - \alpha$$

ويمكن كتابة هذا الأخير كما يلي:

$$CI(\mu)_{(1-\alpha)} = \bar{X} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} = \left[\bar{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} ; \bar{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} \right]$$

$$- \quad \text{إذا كان السحب بدون إرجاع:} \quad Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}} \quad \text{مجال الثقة هو:}$$

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

$$P\left(\bar{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \leq \mu \leq \bar{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\right) = 1 - \alpha$$

$$CI(\mu)_{(1-\alpha)} = \bar{X} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \quad \text{أو}$$

مثال 17: إذا كان لدينا مجتمعا يتوزع توزيعا طبيعيا، أخذت عينة منه حجمها 49 فكان متوسطها 15 وانحرافها المعياري 4.

أ. أعط التقدير النقطي لمتوسط المجتمع.

ب. قدر مجال الثقة لمتوسط المجتمع عند مستوى ثقة 90%

ت. إذا كان حجم المجتمع 200 قدر مجال الثقة لمتوسط المجتمع باستخدام مستوى ثقة 90% ، ماذا تستنتج؟

الحل:

أ. إعطاء التقدير النقطي لمتوسط المجتمع:

$$\hat{\mu} = \bar{X} = 15$$

ب. تقدير مجال الثقة لمتوسط المجتمع باستخدام مستوى ثقة 90%:

بما أن المجتمع طبيعي وتباينه مجهول، فإن توزيع المعاينة يتبع التوزيع الطبيعي لأن: $(n = 49 \geq 30)$ ، وأيضا السحب بالإرجاع لأن المجتمع غير محدود، فإن مجال الثقة لمتوسط المجتمع بمستوى ثقة 90% يعطى بالعلاقة التالية:

$$P\left(\bar{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

لدينا: $1 - \alpha = 0,9 \Rightarrow \alpha = 0,1$ أي أن:

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-\frac{0,1}{2}} = Z_{0,95} = 1,645$$

ومنه بالتطبيق العددي نجد:

$$P\left(15 - 1,645 \frac{4}{\sqrt{49}} \leq \mu \leq 15 + 1,645 \frac{4}{\sqrt{49}}\right) = 0,9$$

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

$$P(15 - 0,94 \leq \mu \leq 15 + 0,94) = 0,9$$

$$P(14,06 \leq \mu \leq 15,94) = 0,9$$

معناه نحن واثقون أن متوسط المجتمع محصور بين 14,06 و 15,94 بنسبة 90%

ت.لما ($N = 200$) تقدير مجال الثقة لمتوسط المجتمع باستخدام مستوى ثقة 90%:

لدينا السحب بدون إرجاع لأن: $\frac{n}{N} = \frac{49}{200} > 0,05$ ومنه مجال الثقة لمتوسط المجتمع يصبح كما يلي:

$$P\left(\bar{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \leq \mu \leq \bar{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\right) = 1 - \alpha$$

وبالتطبيق العددي نجد:

$$P\left(15 - 1,645 \frac{4}{\sqrt{49}} \frac{200 - 49}{200 - 1} \leq \mu \leq 15 + 1,645 \frac{4}{\sqrt{49}} \frac{200 - 49}{200 - 1}\right) = 0,9$$

$$P(15 - 0,71 \leq \mu \leq 15 + 0,71) = 0,9$$

$$P(14,29 \leq \mu \leq 15,71) = 0,9$$

معناه نحن واثقون أن متوسط المجتمع محصور بين 14,29 و 15,71 بنسبة 90%

نستنتج أنه مجال الثقة يضيق في حالة السحب بدون إرجاع ويتسع في حالة السحب بالإرجاع لأن حد الخطأ في التقدير يصغر في حالة السحب بدون إرجاع

3.1.3 عندما يكون تباين المجتمع σ^2 مجهول وحجم العينة ($n < 30$):

إذا كان لدينا مجتمع يتوزع توزيعاً طبيعياً بمتوسط μ وتباين σ^2 مجهولين، وكانت لدينا عينة عشوائية مسحوبة منه حجمها ($n < 30$) وتباينها S^2 ، فإن توزيع المعاينة للوسط الحسابي $\bar{X}$ يقرب إلى توزيع ستودنت بدرجة حرية ($n - 1$) وبمتوسط μ مهما كان نوع سحب العينة بالإرجاع أو بدونه، وتباين $\frac{S^2}{n}$ إذا كان السحب بالإرجاع و $\frac{S^2}{n} \left(\frac{N-n}{N-1}\right)$ إذا كان السحب بدون إرجاع، وعليه إحصائية ستودنت تكون كما يلي:

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \quad - \quad \text{إذا كان السحب بالإرجاع:}$$

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

وعليه يكون مجال الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع μ عند عدم معلومية تباين المجتمع σ^2 ومستوى ثقة معين $(1 - \alpha)$ كما يلي:

$$P\left(\bar{X} - T_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + T_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

ويمكن كتابة هذا الأخير كما يلي:

$$CI(\mu)_{(1-\alpha)} = \bar{X} \pm T_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} = \left[\bar{X} - T_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} ; \bar{X} + T_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} \right]$$

- إذا كان السحب بدون إرجاع: $T = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}}$ مجال الثقة هو:

$$P\left(\bar{X} - T_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \leq \mu \leq \bar{X} + T_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\right) = 1 - \alpha$$

$$CI(\mu)_{(1-\alpha)} = \bar{X} \pm T_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \quad \text{أو}$$

مثال 18: لإصلاح حركة المرور، قامت سلطات ولاية البليدة بإجراء مسح ميداني لتحديد حجم حركة المرور عبر تقاطع رئيسي في المدينة خلال فترة الصباح لكل يوم السبت من الساعة السابعة إلى العاشرة صباحا، وذلك لعشرة أسابيع، فتبين أن متوسط عدد المركبات لعينة الدراسة يساوي 1600 مركبة بانحراف معياري قدره 400 مركبة، إذا افترضنا أن توزيع عدد المركبات المارة في التقاطع الرئيسي للمدينة يتوزع توزيعا طبيعيا:

أ. أعط التقدير النقطي لمتوسط عدد المركبات المارة في التقاطع الرئيسي للمدينة.

ب. قدر مجال الثقة لمتوسط عدد المركبات المارة في التقاطع الرئيسي للمدينة عند مستوى ثقة 95%

الحل:

أ. إعطاء التقدير النقطي لمتوسط عدد المركبات المارة في التقاطع الرئيسي للمدينة:

$$\hat{\mu} = \bar{X} = 1600$$

ب. تقدير مجال الثقة لهذا المتوسط باستخدام مستوى ثقة 95%:

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

بما أن المجتمع طبيعي وتباينه مجهول، فإن توزيع المعاينة يتبع توزيع ستيودنت لأن: $(n = 10 < 30)$ ، بدرجة حرية $(n - 1 = 10 - 1 = 9)$ وأيضا السحب بالإرجاع لأن المجتمع غير محدود، فإن مجال الثقة لمتوسط المجتمع بمستوى ثقة 95% يعطى بالعلاقة التالية:

$$P\left(\bar{X} - T_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + T_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

لدينا: $1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow \alpha = 0,05 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975$ وحسب جدول ستيودنت نجد:

$$T_{(1-\frac{\alpha}{2}; v)} = T_{(0,975; 9)} = 2,262$$

وبالتطبيق العددي نجد:

$$P\left(1600 - 2,262 \frac{400}{\sqrt{10}} \leq \mu \leq 1600 + 2,262 \frac{400}{\sqrt{10}}\right) = 0,95$$

$$P(1600 - 286,32 \leq \mu \leq 1600 + 286,32) = 0,95$$

$$P(1313,68 \leq \mu \leq 1826,32) = 0,95$$

4.1.3 تحديد حجم العينة المناسب لمجال ثقة متوسط المجتمع:

- في حالة استخدام التوزيع الطبيعي والسحب بالإرجاع: $n = \frac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}}^2 \alpha \sigma^2}{E^2}$

- في حالة استخدام التوزيع الطبيعي والسحب بدون إرجاع: $n = \frac{NZ_{1-\frac{\alpha}{2}}^2 \alpha \sigma^2}{(N-1)E^2 + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}^2 \alpha \sigma^2}$

- في حالة استخدام توزيع ستيودنت والسحب بالإرجاع: $n = \frac{T_{1-\frac{\alpha}{2}}^2 \alpha \sigma^2}{E^2}$

- في حالة استخدام توزيع ستيودنت والسحب بدون إرجاع: $n = \frac{NT_{1-\frac{\alpha}{2}}^2 \alpha \sigma^2}{(N-1)E^2 + T_{1-\frac{\alpha}{2}}^2 \alpha \sigma^2}$

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

مثال 19: ما هو حجم العينة المناسب n من مجتمع إحصائي يتوزع توزيعاً طبيعياً إذا كان حد الخطأ في التقدير يساوي 0,5 في مجال الثقة لمتوسط هذا المجتمع الذي تباينه يساوي 2,56 ، علماً أن مستوى المعنوية 5%

الحل:

بما أن المجتمع طبيعي وتباينه معلوم، فإن التوزيع المستخدم في الحل هو التوزيع الطبيعي مهما يكن n ، والمجتمع غير محدود فالسحب بالإرجاع، وأيضا: $Z_{0,975} = 1,96$

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-\frac{0,05}{2}} =$$

ومنه حجم العينة هو:

$$n = \frac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}}^2 \sigma^2}{E^2} = \frac{(1,96)^2 (2,56)}{(0,5)^2} = 39$$

2.3 مجال الثقة للفرق بين متوسطي مجتمعين مستقلين $(\mu_1 - \mu_2)$:

1.2.3 في حالة تباين المجتمعين σ_1^2 و σ_2^2 معلومين:

نختار كل العينات العشوائية ذات الحجم n_1 من المجتمع الأول الذي يتوزع توزيعاً طبيعياً، حجمه N_1 بمتوسط μ_1 مجهول وتباين σ_1^2 معلوم، من جهة أخرى نسحب كل العينات العشوائية ذات الحجم n_2 من المجتمع الثاني اللامحدود الذي يتوزع توزيعاً طبيعياً حجمه N_2 بمتوسط μ_2 مجهول وتباين σ_2^2 معلوم بحيث تكون العينات من المجتمع الأول مستقلة عنها في المجتمع الثاني، وعليه يكون توزيع المعاينة للفرق بين المتوسطات $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$ قريباً من التوزيع الطبيعي مهما يكون حجم العينتين، وأيضا حسب نظرية النهاية المركزية في حالة ما إذا كان توزيع المجتمعين ليس طبيعياً مع أن حجم العينتين كبير، أي أن:

$(n_1 \geq 30 \text{ و } n_2 \geq 30)$ ، بمتوسط حسابي: $\mu_1 - \mu_2$ وانحراف معياري:

$$\left(\frac{n_1}{N_1} \text{ و } \frac{n_2}{N_2} \leq 0,05 \right) \text{ إذا كان السحب بالإرجاع، أي: } \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

$$\left(\frac{n_1}{N_1} \text{ و } \frac{n_2}{N_2} > 0,05 \right) \text{ إذا كان السحب بدون إرجاع } \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} \left(\frac{N_1 - n_1}{N_1 - 1} \right) + \frac{\sigma_2^2}{n_2} \left(\frac{N_2 - n_2}{N_2 - 1} \right)}$$

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

ومنه إحصائية التوزيع تعطى بالعلاقة التالية:

$$Z = \begin{cases} \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \text{ si } \left(\frac{n_1}{N_1} \text{ و } \frac{n_2}{N_2} \leq 0,05 \right) \\ \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} \left(\frac{N_1 - n_1}{N_1 - 1} \right) + \frac{\sigma_2^2}{n_2} \left(\frac{N_2 - n_2}{N_2 - 1} \right)}} \text{ si } \left(\frac{n_1}{N_1} \text{ و } \frac{n_2}{N_2} > 0,05 \right) \end{cases}$$

وعليه مجال الثقة للفرق بين متوسطي المجتمعين $(\mu_1 - \mu_2)$ عند مستوى ثقة معين $(1 - \alpha)$ يعطى كما يلي:

- في حالة السحب بالإرجاع:

$$P \left(-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq Z \leq Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right) = 1 - \alpha$$

$$P \left(-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{(\bar{X}_2 - \bar{X}_1) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \leq Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right) = 1 - \alpha$$

بإجراء العمليات الجبرية على الحدود الثلاثة للمتباينة الموجودة داخل قوسي الاحتمال، بحيث نجعل الحد الأوسط للمتباينة يحتوي على المعلمة المجهولة $(\mu_1 - \mu_2)$ فقط، ويتم

ذلك بضرب الأطراف الثلاثة للمتباينة في $\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$ فنحصل على العبارة التالية:

$$P \left(-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \leq (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2) \leq Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \right) = 1 - \alpha$$

ثم بطرح $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$ من الأطراف الثلاثة للمتباينة نجد:

$$P \left(-(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \leq -(\mu_1 - \mu_2) \leq -(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \right) = 1 - \alpha$$

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

وبضرب الأطراف الثلاثة للمتباينة في (1-) نجد:

$$P \left((\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \leq (\mu_1 - \mu_2) \leq (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \right) = 1 - \alpha$$

ويمكن كتابة هذا الأخير كما يلي:

$$CI(\mu_1 - \mu_2)_{(1-\alpha)} = (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

- في حالة السحب بدون إرجاع مجال الثقة للفرق بين متوسطي المجتمعين المستقلين هو:

$$CI(\mu_1 - \mu_2)_{(1-\alpha)} = (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} \left(\frac{N_1 - n_1}{N_1 - 1} \right) + \frac{\sigma_2^2}{n_2} \left(\frac{N_2 - n_2}{N_2 - 1} \right)}$$

مثال 20: مصنع أول يتبع التوزيع الطبيعي في إنتاجه لسلعة الكسكس، تباينه 35، سحبت منه عينة عشوائية تمثل إنتاج 20 يوم فبلغ متوسطها 650 كغ، مصنع ثاني يتبع التوزيع الطبيعي أيضا في إنتاجه لنفس السلعة، تباينه 30، سحبت منه عينة عشوائية تمثل إنتاج 25 يوم فبلغ متوسطها 450 كغ

أ. أعط التقدير النقطي للفرق بين متوسطي الإنتاج في المصنعين.

ب. قدر مجال الثقة لهذا الفرق عند مستوى ثقة 90%

الحل:

أ. التقدير النقطي للفرق بين متوسطي الإنتاج في المصنعين:

$$\mu_1 - \mu_2 = (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) = 650 - 450 = 200$$

ب. تقدير مجال الثقة للفرق بين متوسطي الإنتاج في المصنعين باستخدام مستوى ثقة 90%:

بما أن المجتمعين (المصنعين) يتبعان التوزيع الطبيعي في إنتاجهما الكسكس وتباينهما معلومين، فإن توزيع المعاينة للفرق بينهما يتبع التوزيع الطبيعي ، وأيضا السحب

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

بالإرجاع لأن المجتمعين غير محدودين، فإن مجال الثقة لمتوسط المجتمع بمستوى ثقة 90% يعطى بالعلاقة التالية:

$$CI(\mu_1 - \mu_2)_{(1-\alpha)} = (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

لدينا: $1 - \alpha = 0,9 \Rightarrow \alpha = 0,1$ أي أن:

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-\frac{0,1}{2}} = Z_{0,95} = 1,645$$

ومنه بالتطبيق العددي نجد:

$$CI(\mu_1 - \mu_2)_{(0,9)} = (650 - 450) \pm 1,645 \sqrt{\frac{35}{20} + \frac{30}{25}}$$

$$CI(\mu_1 - \mu_2)_{(0,9)} = 200 \pm 2,83 = [197,17 ; 202,83]$$

معناه نحن واثقون أن الفرق بين متوسطي إنتاج الكسكس محصور بين 197,17 و 202,83 كلغ بنسبة 90%

2.2.3 في حالة تباين المجتمعين σ_1^2 و σ_2^2 مجهولين وحجم العينتين كبير ($n_1 \geq 30$ و $n_2 \geq 30$):

نختار كل العينات العشوائية ذات الحجم n_1 من المجتمع الأول الذي يتوزع توزيعا طبيعيا، حجمه N_1 بمتوسط μ_1 مجهول وتباين σ_1^2 مجهول، من جهة أخرى نسحب كل العينات العشوائية ذات الحجم n_2 من المجتمع الثاني الذي يتوزع توزيعا طبيعيا، حجمه N_2 بمتوسط μ_2 مجهول وتباين σ_2^2 مجهول، بحيث تكون العينات من المجتمع الأول مستقلة عنها في المجتمع الثاني و ($n_1 \geq 30$ و $n_2 \geq 30$) ، وعليه يكون توزيع المعاينة للفرق بين المتوسطات $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$ هو التوزيع الطبيعي بمتوسط حسابي: $\mu_1 - \mu_2$ وانحراف معياري:

$$\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} \quad \left(\frac{n_1}{N_1} \leq 0,05 \text{ و } \frac{n_2}{N_2} \leq 0,05 \right) \text{ إذا كان السحب بالإرجاع أي:}$$

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

$$\left(\frac{n_1}{N_1} \text{ و } \frac{n_2}{N_2} > 0,05 \right) \text{ إذا كان السحب بدون إرجاع } \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} \left(\frac{N_1 - n_1}{N_1 - 1} \right) + \frac{S_2^2}{n_2} \left(\frac{N_2 - n_2}{N_2 - 1} \right)}$$

حيث: S_1^2 تباين العينة الأولى التي تكون تقديرا σ_1^2 المجهول، S_2^2 تباين العينة الأولى التي تكون تقديرا σ_2^2 المجهول أيضا، ومنه إحصائية التوزيع تعطى بالعلاقة التالية:

$$Z = \begin{cases} \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \text{ si } \left(\frac{n_1}{N_1} \text{ و } \frac{n_2}{N_2} \leq 0,05 \right) \\ \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} \left(\frac{N_1 - n_1}{N_1 - 1} \right) + \frac{S_2^2}{n_2} \left(\frac{N_2 - n_2}{N_2 - 1} \right)}} \text{ si } \left(\frac{n_1}{N_1} \text{ و } \frac{n_2}{N_2} > 0,05 \right) \end{cases}$$

وعليه مجال الثقة للفرق بين متوسطي المجتمعين $(\mu_1 - \mu_2)$ عند مستوى ثقة معين $(1 - \alpha)$ يعطى كما يلي:

- في حالة السحب بالإرجاع:

$$P \left((\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} \leq (\mu_1 - \mu_2) \leq (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} \right) = 1 - \alpha$$

ويمكن كتابة هذا الأخير كما يلي:

$$CI(\mu_1 - \mu_2)_{(1-\alpha)} = (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$$

- في حالة السحب بدون إرجاع مجال الثقة للفرق بين متوسطي المجتمعين المستقلين هو:

$$CI(\mu_1 - \mu_2)_{(1-\alpha)} = (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} \left(\frac{N_1 - n_1}{N_1 - 1} \right) + \frac{S_2^2}{n_2} \left(\frac{N_2 - n_2}{N_2 - 1} \right)}$$

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

مثال 21: تخضع نتائج مادة الإحصاء في قسم العلوم الاقتصادية للتوزيع الطبيعي، عدد الطلبة في القسم 200 ، من جهة أخرى تتبع نتائج مادة الإحصاء في قسم علوم التسيير للتوزيع الطبيعي أيضا، عدد الطلبة في القسم 300 ، لغرض تقدير الفرق بين متوسطي العلامات المحصل عليها في مادة الإحصاء، نأخذ عينة عشوائية من قسم العلوم الاقتصادية حجمها 50 طالب، فكان متوسط العلامات فيها في هذه المادة 13,5 بتباين 4 ، ونسحب عينة من قسم علوم التسيير حجمها 64 طالب، فكان متوسط العلامات فيها 11,5 بتباين 9، نعتبر قسم العلوم الاقتصادية هو المجتمع الأول وقسم علوم التسيير المجتمع الثاني.

أ. أعط التقدير النقطي للفرق بين متوسطي علامات مادة الإحصاء في القسمين.

ب. قدر مجال الثقة لهذا الفرق عند مستوى ثقة 95%

الحل:

أ. التقدير النقطي للفرق بين متوسطي علامات مادة الإحصاء في القسمين:

$$\mu_1 - \mu_2 = (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) = 13,5 - 11,5 = 2$$

ب. تقدير مجال الثقة لهذا الفرق عند مستوى ثقة 95% :

بما أن المجتمعين يتبعان التوزيع الطبيعي وتباينهما مجهولين و $n_1 = 50$ و $n_2 = 64$ ($30 \leq 64$)، فإن توزيع المعاينة للفرق بينهما يتبع التوزيع الطبيعي ، وأيضا السحب بدون إرجاع لأن:

$\left(\frac{n_1}{N_1} = \frac{50}{200} \text{ و } \frac{n_2}{N_2} = \frac{64}{300} > 0,05 \right)$ ، ومنه مجال الثقة لمتوسط المجتمع بمستوى ثقة 95% يعطى بالعلاقة التالية:

$$CI(\mu_1 - \mu_2)_{(1-\alpha)} = (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} \left(\frac{N_1 - n_1}{N_1 - 1} \right) + \frac{S_2^2}{n_2} \left(\frac{N_2 - n_2}{N_2 - 1} \right)}$$

لدينا: $1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow \alpha = 0,05$ أي أن:

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-\frac{0,05}{2}} = Z_{0,975} = 1,96$$

ومنه بالتطبيق العددي نجد:

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

$$CI(\mu_1 - \mu_2)_{(0,95)}$$

$$= (13,5 - 11,5) \pm 1,96 \sqrt{\frac{4}{50} \left(\frac{200 - 50}{200 - 1} \right) + \frac{9}{64} \left(\frac{300 - 64}{300 - 1} \right)}$$

$$CI(\mu_1 - \mu_2)_{(0,95)} = 2 \pm 0,8 = [1,2 ; 2,8]$$

معناه نحن واثقون أن الفرق بين متوسطي علامات القسمين في مادة الإحصاء محصور بين 1,2 و 2,8 بنسبة 95%

3.2.3 في حالة تباين المجتمعين σ_1^2 و σ_2^2 مجهولين وحجم العينتين (n_1 و $n_2 < 30$) :

نسحب كل العينات العشوائية ذات الحجم ($n_1 < 30$) وتباين العينة S_1^2 من المجتمع الأول الذي يتوزع توزيعا طبيعيا، حجمه N_1 بمتوسط μ_1 مجهول وتباينه مجهول σ_1^2 ، ونختار كل العينات العشوائية ذات الحجم ($n_2 < 30$) وتباين العينة S_2^2 من المجتمع الثاني الذي يتوزع توزيعا طبيعيا أيضا، حجمه N_2 بمتوسط مجهول μ_2 وتباينه مجهول σ_2^2 ، بحيث تكون العينات من المجتمع الأول مستقلة عنها من المجتمع الثاني، وعليه يكون توزيع المعاينة للفرق بين متوسطي العينتين ($\bar{X}_1 - \bar{X}_2$) قريبا من توزيع ستودنت، بمتوسط حسابي: $\mu_1 - \mu_2$ أما الانحراف المعياري، فنحن أمام حالتين:

أ. الحالة الأولى: تباين المجتمعين مجهولين ومتساويين ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2$)

$$\left(\frac{n_1}{N_1} \text{ و } \frac{n_2}{N_2} \leq 0,05 \right) \text{ إذا كان السحب بالإرجاع } = S_P \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \sqrt{\frac{S_P^2}{n_1} + \frac{S_P^2}{n_2}}$$

$$\text{إذا كان } \sqrt{\frac{S_P^2}{n_1} \left(\frac{N_1 - n_1}{N_1 - 1} \right) + \frac{S_P^2}{n_2} \left(\frac{N_2 - n_2}{N_2 - 1} \right)} = S_P \sqrt{\frac{1}{n_1} \left(\frac{N_1 - n_1}{N_1 - 1} \right) + \frac{1}{n_2} \left(\frac{N_2 - n_2}{N_2 - 1} \right)}$$

السحب بدون إرجاع ($\frac{n_1}{N_1} \text{ و } \frac{n_2}{N_2} > 0,05$) حيث: $S_P^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{(n_1 + n_2 - 2)}$ ومنه إحصائية التوزيع تعطى بالعلاقة التالية:

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

$$T = \begin{cases} \frac{(\bar{X}_2 - \bar{X}_1) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_P \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} & \text{si } \left(\frac{n_1}{N_1} \text{ و } \frac{n_2}{N_2} \leq 0,05 \right) \\ \frac{(\bar{X}_2 - \bar{X}_1) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_P \sqrt{\frac{1}{n_1} \left(\frac{N_1 - n_1}{N_1 - 1} \right) + \frac{1}{n_2} \left(\frac{N_2 - n_2}{N_2 - 1} \right)}} & \text{si } \left(\frac{n_1}{N_1} \text{ و } \frac{n_2}{N_2} > 0,05 \right) \end{cases}$$

وتكون درجة الحرية لتوزيع ستيودنت في هذه الحالة: $(v = n_1 + n_2 - 2)$

وعليه مجال الثقة للفرق بين متوسطي المجتمعين $(\mu_1 - \mu_2)$ عند مستوى ثقة معين $(1 - \alpha)$ يعطى كما يلي:

- في حالة السحب بالإرجاع:

$$P \left((\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - T_{1-\frac{\alpha}{2}} S_P \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \leq (\mu_1 - \mu_2) \leq (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + T_{1-\frac{\alpha}{2}} S_P \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \right) = 1 - \alpha$$

ويمكن كتابة هذا الأخير كما يلي:

$$CI(\mu_1 - \mu_2)_{(1-\alpha)} = (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \pm T_{1-\frac{\alpha}{2}} S_P \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

- في حالة السحب بدون إرجاع مجال الثقة للفرق بين متوسطي المجتمعين المستقلين هو:

$$CI(\mu_1 - \mu_2)_{(1-\alpha)} = (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \pm T_{1-\frac{\alpha}{2}} S_P \sqrt{\frac{1}{n_1} \left(\frac{N_1 - n_1}{N_1 - 1} \right) + \frac{1}{n_2} \left(\frac{N_2 - n_2}{N_2 - 1} \right)}$$

مثال 22: مجتمع أول يخضع للتوزيع الطبيعي، تباينه مجهول، نسحب عينة عشوائية منه حجمها 7، متوسطها 38 بتباين 9، كما أن هناك مجتمع ثان يخضع للتوزيع الطبيعي أيضا، تباينه مجهول، نسحب عينة عشوائية منه حجمها 10، متوسطها 33 بتباين 16، قدر مجال الثقة للفرق بين متوسطي المجتمعين عند مستوى ثقة 95% (علما أن تباينا المجتمعين متساويين)

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

الحل:

- تقدير مجال الثقة لهذا الفرق عند مستوى ثقة 95% :

بما أن المجتمعين يتبعان التوزيع الطبيعي وتباينهما مجهولين و $n_1 = 7$ و $n_2 = 10$ (30)، فإن توزيع المعاينة للفرق بينهما يتبع توزيع ستودنت ، وأيضا السحب بالإرجاع لأن المجتمعين غير محدودين، ومنه مجال الثقة لمتوسطي المجتمعين بمستوى ثقة 95% يعطى بالعلاقة التالية:

$$CI(\mu_1 - \mu_2)_{(1-\alpha)} = (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \pm T_{1-\frac{\alpha}{2}} S_P \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

لدينا: $1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow \alpha = 0,05$

درجة الحرية $(v = n_1 + n_2 - 2 = 7 + 10 - 2 = 15)$ أي أن:

$$T_{(1-\frac{\alpha}{2}; v)} = T_{(0,975; 15)} = 2,131$$

$$S_P^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{(n_1+n_2-2)} = \frac{(7-1)9 + (10-1)16}{(7+10-2)} = 13,2 \text{ و}$$

$$\Rightarrow S_p = \sqrt{13,2} = 3,63$$

ومنه بالتطبيق العددي نجد:

$$CI(\mu_1 - \mu_2)_{(0,95)} = (38 - 33) \pm (2,131)(3,63) \sqrt{\frac{1}{7} + \frac{1}{10}}$$

$$CI(\mu_1 - \mu_2)_{(0,95)} = 5 \pm 3,91 = [1,09 ; 8,91]$$

ب. الحالة الثانية: تباين المجتمعين مجهولين وغير متساويين $(\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2)$

$$\left(\frac{n_1}{N_1} \text{ و } \frac{2}{N_2} \leq 0,05 \right) \text{ إذا كان السحب بالإرجاع } \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$$

$$\left(\frac{n_1}{N_1} \text{ و } \frac{2}{N_2} > 0,05 \right) \text{ إذا كان السحب بدون إرجاع } \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} \left(\frac{N_1 - n_1}{N_1 - 1} \right) + \frac{S_2^2}{n_2} \left(\frac{N_2 - n_2}{N_2 - 1} \right)}$$

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

ومنه إحصائية التوزيع تعطى بالعلاقة التالية:

$$T = \begin{cases} \frac{(\bar{X}_2 - \bar{X}_1) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} & \text{si } \left(\frac{n_1}{N_1} \text{ و } \frac{n_2}{N_2} \leq 0,05 \right) \\ \frac{(\bar{X}_2 - \bar{X}_1) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} \left(\frac{N_1 - n_1}{N_1 - 1} \right) + \frac{S_2^2}{n_2} \left(\frac{N_2 - n_2}{N_2 - 1} \right)}} & \text{si } \left(\frac{n_1}{N_1} \text{ و } \frac{n_2}{N_2} > 0,05 \right) \end{cases}$$

وتكون درجة الحرية لتوزيع ستيودنت في هذه الحالة هي:

$$v = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2} \right)^2}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} \right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2} \right)^2}{n_2 - 1}}$$

ومجال الثقة للفرق بين متوسطي المجتمعين $(\mu_1 - \mu_2)$ عند مستوى ثقة معين $(1 - \alpha)$ يعطى كما يلي:

- في حالة السحب بالإرجاع:

$$P \left((\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - T_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} \leq (\mu_1 - \mu_2) \leq (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + T_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} \right) = 1 - \alpha$$

ويمكن كتابة هذا الأخير كما يلي:

$$CI(\mu_1 - \mu_2)_{(1-\alpha)} = (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \pm T_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$$

- في حالة السحب بدون إرجاع مجال الثقة للفرق بين متوسطي المجتمعين المستقلين هو:

$$CI(\mu_1 - \mu_2)_{(1-\alpha)} = (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \pm T_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} \left(\frac{N_1 - n_1}{N_1 - 1} \right) + \frac{S_2^2}{n_2} \left(\frac{N_2 - n_2}{N_2 - 1} \right)}$$

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

مثال 23: تم قياس مستوى السكر في الدم لمجموعتين، المجموعة الأولى يعانون من داء السكري المعتمد على الأنسولين حجمها 8 مريض، والمجموعة الثانية يعانون من داء السكري غير المعتمد على الأنسولين حجمها 10 مريض، تبين أن متوسط مستوى السكر في المجموعة الأولى 3,7 غ/ل بتباين 1,44 غ/ل، في حين متوسط مستوى السكر في المجموعة الثانية 1,9 غ/ل بتباين 1,21 غ/ل، بافتراض المجتمعين يتبعان التوزيع الطبيعي بتباينين غير متساويين، أعط مجال الثقة للفارق بين متوسطي مستوى السكر للنوعين المعتمد على الأنسولين وغير المعتمد عليه، وهذا عند مستوى ثقة 99%

الحل:

- تقدير مجال الثقة لهذا الفارق عند مستوى ثقة 99% :

المجتمعين يتبعان التوزيع الطبيعي وتباينهما مجهولين و $n_1 = 8$ و $n_2 = 10$ (30)، فإن توزيع المعاينة للفارق بينهما يتبع توزيع ستودنت، وأيضا السحب بالإرجاع لأن المجتمعين غير محدودين، ومنه مجال الثقة لمتوسطي المجتمعين بمستوى ثقة 99% يعطى بالعلاقة التالية:

$$CI(\mu_1 - \mu_2)_{(1-\alpha)} = (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \pm T_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$$

$$1 - \alpha = 0,99 \Rightarrow \alpha = 0,01 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,995 \quad \text{لدينا:}$$

درجة الحرية:

$$v = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1-1} + \frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2-1}} = \frac{\left(\frac{1,44}{8} + \frac{1,21}{10}\right)^2}{\frac{\left(\frac{1,44}{8}\right)^2}{8-1} + \frac{\left(\frac{1,21}{10}\right)^2}{10-1}} = 18$$

$$T_{\left(1-\frac{\alpha}{2}; v\right)} = T_{(0,995; 18)} = 2,878$$

ومنه بالتطبيق العددي نجد:

$$CI(\mu_1 - \mu_2)_{(1-\alpha)} = (3,7 - 1,9) \pm 2,878 \sqrt{\frac{1,44}{8} + \frac{1,21}{10}}$$

$$CI(\mu_1 - \mu_2)_{(0,95)} = 1,8 \pm 1,58 = [0,22 ; 3,38]$$

3.3 مجال الثقة للفرق بين متوسطي مجتمعين غير مستقلين $(\mu_1 - \mu_2)$:

العينات المرتبطة أو المفردات المزدوجة تتمثل في وجود نفس العناصر قبل وبعد التجربة، فتكون عناصر العينتين على شكل أزواج بحيث كل عنصرين لهما علاقة ببعضهما البعض، أي نفس الوحدة التجريبية تقاس قبل التجربة وبعدها لمعرفة التغير الطارئ

مجتمع أول يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط μ_1 وتباين σ_1^2 ، وهو مرتبط مع مجتمع ثان يخضع هو الآخر للتوزيع الطبيعي بمتوسط μ_2 وتباين σ_2^2 ، نسحب عينة من المجتمع الأول حجمها n_1 قيمها $\{X_{11}, X_{12}, X_{13}, \dots, X_{1i}\}$ ، وأخرى من المجتمع الثاني حجمها n_2 ، (حيث: $n_1 = n_2 = n$ ، أي أن حجما العينتين يجب أن يكونا متساويين) قيمها: $\{X_{21}, X_{22}, X_{23}, \dots, X_{2i}\}$ ، حيث أن: X_{2i} و X_{1i} قيم متناظرة (متقابلة) في العينتين المرتبطتين، وأن: $i = 1, 2, 3, 4, \dots, n$

إن الفرق: $d_i = X_{1i} - X_{2i}$ يعطينا سلسلة أخرى $\{d_1, d_2, d_3, \dots, d_i\}$ ، التي تشكل عينة عشوائية متوسطةها: $\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^n d_i}{n}$ وتباينها: $S_d^2 = \frac{\sum_{i=1}^n ((d_i - \bar{d})^2)}{n-1}$ ، المسحوبة من هذا المجتمع الذي وسطه: $\mu_d = \mu_1 - \mu_2$ وتباينه: σ_d^2

- إذا كان حجم العينة $n \geq 30$ وتباين المجتمع σ_d^2 مجهول، فإن توزيع فرق

متوسطي العينتين يخضع للتوزيع الطبيعي بمتوسط: $\mu_d = \mu_1 - \mu_2 = \bar{d}$

$$Z = \frac{\bar{d} - \mu_d}{\frac{S_d}{\sqrt{n}}} \quad \text{وتباين: } \frac{S_d^2}{n} = \sigma_d^2 \quad \text{، أما إحصائية التوزيع فهي: } Z = \frac{\bar{d} - \mu_d}{\frac{S_d}{\sqrt{n}}}$$

- إذا كان حجم العينة $n < 30$ وتباين المجتمع σ_d^2 مجهول، فإن توزيع فرق

متوسطي العينتين يخضع لتوزيع ستودنت بدرجة حرية: $v = n-1$ ، ومتوسط كما يلي:

$$T = \frac{\bar{d} - \mu_d}{\frac{S_d}{\sqrt{n}}} \quad \text{، وتباين: } \frac{S_d^2}{n} \quad \text{، أما إحصائية التوزيع فهي: } T = \frac{\bar{d} - \mu_d}{\frac{S_d}{\sqrt{n}}}$$

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

ومنه مجال الثقة في هذه الحالة عند مستوى ثقة معين $(1 - \alpha)$ يكون كما يلي:

- في حالة $n < 30$ نستعمل توزيع ستيودنت:

$$P\left(\bar{d} - T_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S_d}{\sqrt{n}} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq \bar{d} + T_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S_d}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

ويمكن كتابة هذا الأخير كما يلي:

$$\begin{aligned} CI(\mu_1 - \mu_2)_{(1-\alpha)} &= \bar{d} \pm T_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S_d}{\sqrt{n}} \\ &= \left[\bar{d} - T_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S_d}{\sqrt{n}} ; \bar{d} + T_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S_d}{\sqrt{n}} \right] \end{aligned}$$

- في حالة $n \geq 30$ نستعمل التوزيع الطبيعي كما يلي:

$$P\left(\bar{d} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S_d}{\sqrt{n}} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq \bar{d} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S_d}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

ويمكن كتابة هذا الأخير كما يلي:

$$\begin{aligned} CI(\mu_1 - \mu_2)_{(1-\alpha)} &= \bar{d} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S_d^2}{n} \\ &= \left[\bar{d} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S_d}{\sqrt{n}} ; \bar{d} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S_d}{\sqrt{n}} \right] \end{aligned}$$

مثال 24: باستعمال معطيات المثال 10 أعط مجال الثقة للفرق بين متوسطي المجتمعين عند مستوى ثقة 0,9

الحل:

بما توزيع مجتمع مرضى السكري في هذا المستشفى يخضع للتوزيع الطبيعي وتباينه مجهول، والعينتين قبل وبعد تلقي الدواء المعين مرتبطتين وحجمهما أقل من 30، فإن هذا الفرق يخضع لتوزيع ستيودنت، بدرجة حرية: $v = n - 1 = 6 - 1 = 5$ ، و $\bar{d} = 0,34$ و $S_d^2 = 0,08$

لدينا: $1 - \alpha = 0,9 \Rightarrow \alpha = 0,1 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,95$ وحسب جدول

ستسودنت نجد: $T_{(1-\frac{\alpha}{2}; v)} = T_{(0,95; 5)} = 2,015$

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

وعليه يكون مجال الثقة كما يلي:

$$\begin{aligned} CI(\mu_1 - \mu_2)_{(1-\alpha)} &= \bar{d} \pm T_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S_d}{\sqrt{n}} \\ &= \left[\bar{d} - T_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S_d}{\sqrt{n}} ; \bar{d} + T_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S_d}{\sqrt{n}} \right] \\ CI(\mu_1 - \mu_2)_{(0,9)} &= 0,34 \pm 2,015 \frac{0,08}{6} \\ &= \left[0,34 - 2,015 \frac{0,08}{6} ; 0,34 + 2,015 \frac{0,08}{6} \right] \\ &= [0,34 - 0,02 ; 0,34 + 0,02] = [0,32 ; 0,36] \end{aligned}$$

4.3. مجال الثقة لنسبة المجتمع (P):

يتكون المجتمع محل الدراسة هنا من جزء تكون الخاصية أو الظاهرة المدروسة محققة والجزء الآخر غير محققة، فيكون احتمال تحقق الظاهرة (P) ويسمى احتمال النجاح، ويكون احتمال عدم تحقق الظاهرة (q = 1 - P) ويسمى احتمال الفشل، واحتمال النجاح (P) يكون مجهولا ، وبالتالي لا نستطيع حساب تباينه $\frac{pq}{n}$ وإنما نقوم بتقدير نسبة المجتمع (P) وأفضل مقدر هو نسبة العينة $\hat{P}$ أي أن:

(P = $\hat{P}$) حيث: $\frac{x}{n} = \hat{P}$ فيكون بذلك مقدر التباين هو: $\left(\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n} \right)$ وبما أن حجم العينة كبير ($n \geq 30$) توزيع النسبة هو التوزيع الطبيعي فتكون بذلك إحصائية التوزيع كما يلي:

$$\begin{aligned} Z &= \frac{\hat{P}-p}{\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}} \quad \text{- السحب بالإرجاع:} \\ Z &= \frac{\hat{P}-p}{\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n} \left(\frac{N-n}{N-1} \right)}} \quad \text{- السحب بدون إرجاع:} \end{aligned}$$

ويكون مجال الثقة كما يلي:

$$P \left(\hat{P} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}} \leq P \leq \hat{P} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}} \right) = 1 - \alpha$$

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

ويمكن الكتابة كما يلي:

$$CI(P)_{(1-\alpha)} = \hat{P} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{P} (1 - \hat{P})}{n}}$$

مثال 25: في مسح إحصائي لمنطقة معينة، أخذت عينة حجمها 200 شخص، وجد منهم 80 ذكور، أوجد فترة الثقة لنسبة الذكور في هذه المنطقة علما أن مستوى الثقة 95%

الحل:

لدينا نسبة العينة $\frac{x}{n} = \hat{P} = \frac{80}{200} = 0,4$ وحجم العينة كبير ($n = 200 \geq 30$)، ومنه نستخدم توزيع النسبة هو التوزيع الطبيعي.

ولدينا: $1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow \alpha = 0,05 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975$ وحسب جدول التوزيع الطبيعي نجد: $Z_{(0,975)} = 1,96$ ، فيكون عندئذ مجال الثقة كما يلي:

$$CI(P)_{(1-\alpha)} = \hat{P} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{P} (1 - \hat{P})}{n}}$$

$$CI(P)_{(0,95)} = 0,4 \pm 1,96 \sqrt{\frac{0,4 (1 - 0,4)}{200}}$$

$$CI(P)_{(0,95)} = [0,4 - 0,07 ; 0,4 + 0,07]$$

$$CI(P)_{(0,95)} = [3,93 ; 4,07]$$

5.3 مجال الثقة لفرق نسبي مجتمعين ($P_1 - P_2$) :

لدينا مجتمع أول، حجمه N_1 ، هو محل دراسة ظاهرة معينة، احتمال تحقق الظاهرة فيه (P_1) مجهولة واحتمال عدم تحقق الظاهرة ($q_1 = 1 - P_1$)، ولدينا من جهة أخرى مجتمع ثان، حجمه N_2 ، هو محل دراسة نفس ظاهرة المجتمع الأول، احتمال تحقق الظاهرة فيه (P_2) مجهولة أيضا، واحتمال عدم تحقق الظاهرة ($q_2 = 1 - P_2$)، وعند عدم توفر بيانات كل العناصر في المجتمعين محل الدراسة اتجاه الظاهرة المعنية، نلجأ لتقدير P_1 و P_2 بنسبة الخاصة المدروسة في العينتين العشوائيتين

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

المسحوبتين من كل مجتمع، التي نرسم لها بالرمز $\hat{P}_1$ لنسبة العينة الأولى المسحوبة من المجتمع الأول، والتي حجمها كبير ($n_1 \geq 30$)، و $\hat{P}_2$ لنسبة العينة الثانية المسحوبة من المجتمع الثاني، والتي حجمها كبير أيضا ($n_2 \geq 30$)، فتكون محاولة معرفة مجال الثقة للفرق بين النسبتين في المجتمعين ($P_1 - P_2$) باستخدام التوزيع الطبيعي، وذلك كما يلي:

- إذا كان السحب بالإرجاع أو ($\frac{n_1}{N_1} \leq 0,05$ و $\frac{n_2}{N_2} \leq 0,05$) الانحراف المعياري هو:

$$= \sqrt{\frac{\hat{P}_1(1-\hat{P}_1)}{n_1} + \frac{\hat{P}_2(1-\hat{P}_2)}{n_2}}$$

إحصائية التوزيع هي:

$$Z = \frac{(\hat{P}_1 - \hat{P}_2) - (P_1 - P_2)}{\sqrt{\frac{\hat{P}_1(1-\hat{P}_1)}{n_1} + \frac{\hat{P}_2(1-\hat{P}_2)}{n_2}}}$$

- إذا كان السحب بدون إرجاع أو ($\frac{n_1}{N_1} > 0,05$ و $\frac{n_2}{N_2} > 0,05$) الانحراف المعياري هو:

$$\sqrt{\frac{P_1(1-P_1)}{n_1} \left(\frac{N_1-n_1}{N_1-1} \right) + \frac{P_2(1-P_2)}{n_2} \left(\frac{N_2-n_2}{N_2-1} \right)}$$

إحصائية التوزيع كما يلي:

$$Z = \frac{(\hat{P}_1 - \hat{P}_2) - (P_1 - P_2)}{\sqrt{\frac{\hat{P}_1(1-\hat{P}_1)}{n_1} \left(\frac{N_1-n_1}{N_1-1} \right) + \frac{\hat{P}_2(1-\hat{P}_2)}{n_2} \left(\frac{N_2-n_2}{N_2-1} \right)}}$$

وعليه مجال الثقة للفرق بين نسبتي المجتمعين عند مستوى ثقة معين هو:

- في حالة السحب بالإرجاع:

$$CI(P_1 - P_2)_{(1-\alpha)} = (\hat{P}_1 - \hat{P}_2) \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{P}_1(1-\hat{P}_1)}{n_1} + \frac{\hat{P}_2(1-\hat{P}_2)}{n_2}}$$

- في حالة السحب بدون إرجاع:

$$CI(P_1 - P_2)_{(1-\alpha)} = (\hat{P}_1 - \hat{P}_2) \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{P}_1(1-\hat{P}_1)}{n_1} \left(\frac{N_1-n_1}{N_1-1} \right) + \frac{\hat{P}_2(1-\hat{P}_2)}{n_2} \left(\frac{N_2-n_2}{N_2-1} \right)}$$

مثال 26: منطقة أولى من بلد أوروبي، أخذنا عينة 120 شخص، عدد المسلمين منهم 48 شخص، في حين منطقة ثانية من نفس البلد، أخذنا عينة 150 شخص، فكان عدد

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

المسلمين منهم 15 شخص، أعط مجال الثقة للفرق بين نسبة عدد المسلمين في منطقتي هذا البلد عند مستوى ثقة 99%

الحل:

$$\hat{P}_2 = \text{نسبة المسلمين في العينة الأولى} = \frac{48}{120} = 0,4 \text{ وفي العينة الثانية } \hat{P}_1 = \frac{15}{150} = 0,1$$

توزيع الفرق بين النسبتين هو التوزيع الطبيعي لأن $(n_1 = 120, n_2 = 150 \geq 30)$ والسحب بالإرجاع لأن المجتمعين غير محدودين

ولدينا: $1 - \frac{\alpha}{2} = 0,995 \Rightarrow \alpha = 0,01 \Rightarrow 1 - \alpha = 0,99$ ، وحسب جدول التوزيع الطبيعي نجد: $Z_{(0,995)} = 2,575$ ، فيكون عندئذ مجال الثقة كما يلي:

$$CI(P_1 - P_2)_{(1-\alpha)} = (\hat{P}_1 - \hat{P}_2) \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{P}_1(1 - \hat{P}_1)}{n_1} + \frac{\hat{P}_2(1 - \hat{P}_2)}{n_2}}$$

$$CI(P_1 - P_2)_{(0,99)} = (0,4 - 0,1) \pm 2,575 \sqrt{\frac{0,4(1 - 0,4)}{120} + \frac{0,1(1 - 0,1)}{150}}$$

$$CI(P_1 - P_2)_{(0,95)} = [0,3 - 0,13 ; 0,3 + 0,13]$$

$$CI(\mu_1 - \mu_2)_{(0,95)} = [0,17 ; 0,43]$$

6.3 مجال الثقة لتباين المجتمع (σ^2):

عادة نستخدم توزيع المعاينة للتباين للاستدلال عن تباين المجتمع باستخدام العينة المسحوبة منه في الظاهرة المدروسة، فإذا اخترنا عينة عشوائية حجمها n من مجتمع يخضع للتوزيع الطبيعي بوسط حسابي μ وتباين σ^2 مجهول فإن تباين العينة S^2 سيتوزع توزيع مربع كاي (χ^2) بدرجة حرية $(v = n - 1)$ ، وذلك كما يلي:

$$\frac{(n - 1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$$

و مجال الثقة لمربع كاي يكون كما يلي:

$$P\left(\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2 \leq \chi^2 \leq \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2\right) = (1 - \alpha)$$

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

$$P\left(\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leq \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2\right) = (1-\alpha)$$

نقسم الأطراف الثلاثة للمتباينة على: $(n-1)S^2$ نحصل على مايلي:

$$P\left(\frac{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2}{(n-1)S^2} \leq \frac{1}{\sigma^2} \leq \frac{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2}{(n-1)S^2}\right) = (1-\alpha)$$

$$\Leftrightarrow P\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2}\right) = (1-\alpha)$$

وهو مجال الثقة للتباين عند مستوى ثقة معين $(1-\alpha)$

مثال 27: لتقدير تباين المجتمع الذي يخضع للتوزيع الطبيعي، أخذنا عينة عشوائية منه قوامها 20 فتبين أن انحرافها المعياري 4 ، أعط مجال الثقة لتباين المجتمع عند مستوى ثقة 90%

الحل:

بما أن المجتمع يخضع للتوزيع الطبيعي بتباين مجهول ، فإن تباين العينة المسحوبة منه S^2 سيخضع لتوزيع مربع كاي (χ^2) بدرجة حرية $v = 20 - 1 \Leftrightarrow v = 19$ ولدينا أيضا:

$$(1-\alpha) = 0,9 \Rightarrow \alpha = 0,1 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,05 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,95$$

من جدول مربع كاي نجد:

$$\chi_{(0,95; 19)}^2 = 30,1 \text{ و } \chi_{(0,05; 19)}^2 = 10,1$$

وعليه يكون مجال الثقة لتباين المجتمع:

$$P\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2}\right) = (1-\alpha)$$

$$P\left(\frac{(20-1)4^2}{30,1} \leq \sigma^2 \leq \frac{(20-1)4^2}{10,1}\right) = 0,9$$

$$P(10,1 \leq \sigma^2 \leq 30,1) = 0,9$$

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

7.3 مجال الثقة لنسبة تبايني مجتمعين $\left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\right)$:

لدينا مجتمع أول يخضع للتوزيع الطبيعي متوسطه μ_1 وتباينه σ_1^2 مجهول، نسحب منه عينة عشوائية حجمها n_1 وتباينها S_1^2 ، ولدينا أيضا من جهة أخرى مجتمع ثان يخضع للتوزيع الطبيعي متوسطه μ_2 وتباينه σ_2^2 مجهول، نسحب منه عينة عشوائية حجمها n_2 وتباينها S_2^2 ، علما أن العينتين مستقلتين، فحينئذ تتوزع النسبة $\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\right)$ توزيع فيشر (F) بدرجة حرية: $(v_1 = n_1 - 1)$ و $(v_2 = n_2 - 1)$ ، وكما هو معروف أن توزيع فيشر $(F_{(v_2; v_1)})$ هو النسبة بين توزيعين مستقلين يتبع كل واحد منهما توزيع مربع كاي، كل بدرجة حريته، ونكتب:

$$F_{(v_1; v_2)} = \frac{\frac{\chi_1^2}{n_1 - 1}}{\frac{\chi_2^2}{n_2 - 1}} = \frac{\frac{(n_1 - 1)S_1^2}{\sigma_1^2}}{\frac{(n_2 - 1)S_2^2}{\sigma_2^2}} = \frac{\frac{S_1^2}{\sigma_1^2}}{\frac{S_2^2}{\sigma_2^2}} = \frac{S_1^2}{S_2^2} \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$$

ومنه تتوزع النسبة $\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\right)$ توزيع فيشر (F) ، أي: $\frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F_{(v_1; v_2)} = \frac{S_1^2}{S_2^2} \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$

أما مجال الثقة لنسبة تبايني المجتمعين $\left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\right)$ نجده كما يلي:

$$P\left(F_{\left(\frac{\alpha}{2}; v_1; v_2\right)} \leq F_{(v_1; v_2)} \leq F_{\left(1-\frac{\alpha}{2}; v_1; v_2\right)}\right) = (1 - \alpha)$$

$$P\left(F_{\left(\frac{\alpha}{2}; v_1; v_2\right)} \leq \frac{S_1^2}{S_2^2} \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \leq F_{\left(1-\frac{\alpha}{2}; v_1; v_2\right)}\right) = (1 - \alpha)$$

نقسم الأطراف الثلاثة للمتباينة على: $\frac{S_1^2}{S_2^2}$ نحصل على مايلي:

$$P\left(\frac{F_{\left(\frac{\alpha}{2}; v_1; v_2\right)}}{\frac{S_1^2}{S_2^2}} \leq \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \leq \frac{F_{\left(1-\frac{\alpha}{2}; v_1; v_2\right)}}{\frac{S_1^2}{S_2^2}}\right) = (1 - \alpha)$$

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

$$\Leftrightarrow P\left(\frac{\frac{S_1^2}{S_2^2}}{F_{\left(1-\frac{\alpha}{2}; v_1, v_2\right)}} \leq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq \frac{\frac{S_1^2}{S_2^2}}{F_{\left(\frac{\alpha}{2}; v_1, v_2\right)}}\right) = (1 - \alpha)$$

وهو مجال الثقة لنسبة تبايني المجتمعين $\left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\right)$ عند مستوى ثقة معين $(1 - \alpha)$

مثال 28: أخذت عينة عشوائية حجمها 8 من مجتمع أول يتوزع توزيعا طبيعيا بتباين مجهول فأعطت تباين يساوي 16 ، وسحبت عينة عشوائية حجمها 10 من مجتمع ثان يتوزع توزيعا طبيعيا بتباين مجهول فأعطت تباين يساوي 25 أعط مجال الثقة للنسبة $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$

عند مستوى ثقة 90%

الحل:

بما أن المجتمعين يخضعان للتوزيع الطبيعي، فإن مجال الثقة للنسبة $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ سيخضع لتوزيع مربع كاي (χ^2) بدرجتي حرية $(v_1 = 8 - 1 = 7$ و $v_2 = 10 - 1 = 9)$ ، ولدينا أيضا:

$$(1 - \alpha) = 0,9 \Rightarrow \alpha = 0,1 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,05 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,95$$

من جدول فيشر نجد:

$$F_{\left(1-\frac{\alpha}{2}; v_1, v_2\right)} = F_{(0,95 ; 7 ; 9)} = 3,29$$

$$F_{\left(\frac{\alpha}{2}; v_1, v_2\right)} = F_{(0,05 ; 7 ; 9)} = \frac{1}{F_{(0,95 ; 9 ; 7)}} = \frac{1}{3,68} = 0,27$$

وعليه يكون مجال الثقة لتباين المجتمع:

$$P\left(\frac{\frac{S_1^2}{S_2^2}}{F_{\left(1-\frac{\alpha}{2}; v_1, v_2\right)}} \leq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq \frac{\frac{S_1^2}{S_2^2}}{F_{\left(\frac{\alpha}{2}; v_1, v_2\right)}}\right) = (1 - \alpha)$$

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

$$\begin{aligned} &= P\left(\frac{\frac{16}{25}}{F_{(0,95 ; 7 ; 9)}} \leq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq \frac{\frac{16}{25}}{F_{(0,05 ; 7 ; 9)}}\right) = 0,9 \\ &= P\left(\frac{\frac{16}{25}}{3,29} \leq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq \frac{\frac{16}{25}}{0,27}\right) = 0,9 \\ &= P\left(0,19 \leq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq 2,37\right) = 0,9 \end{aligned}$$

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

4. تمارين مقترحة حول الفصل الثاني:

التمرين الأول: أخذنا عينة من قسم العلوم الاقتصادية حجمها 80 طالب وذلك لمعرفة العلامات المحصل عليها في مادة الإحصاء

14.5	13	12	10.5	9	8	7.5	6	العلامة
4	8	6	23	14	9	11	5	عدد الطلبة

1- أعط تقدير نقطي لمتوسط علامات طلبة القسم

2- عين مجال ثقة لمتوسط علامات طلبة الكلية عند مستوى معنوية 0,05

3- إذا علمت أن العينة أخذت من مجموعة يقدر عدد طلبتها بـ 400 طالب عين مجال الثقة لمتوسط علامات طلبة القسم عند مستوى معنوية 0,1

التمرين الثاني: في محطة للبنزين تخضع كمية البنزين التي تعبأ في السيارات للقانون الطبيعي أعطت نتائج معاينة تعبئة 50 سيارة متوسط تعبئة يقدر بـ 28 لتر وانحراف معياري 10 لتر

1- عين مجال للمتوسط عند مستوى معنوية 0,05

2- ما هو عدد السيارات التي يجب معاينتها للحصول على خطأ في تقدير المتوسط يساوي 3 لتر عند مستوى معنوية 0,05.

3- عين مجال ثقة للانحراف المعياري عند مستوى معنوية 0,05

التمرين الثالث: لمعرفة مدى تأثير دروس الدعم في مادة الرياضيات الطور المتوسط أخذنا عينة من التلاميذ الذين يتلقون هذه الدروس حجمها 10 فكان متوسط العلامة المحصل عليها في المادة هو 14,5 بتباين 9 و أخذنا عينة أخرى مستقلة عن الأولى حيث يكون التلاميذ فيها لا يتلقون هذه الدروس حجمها 17 فكان متوسط العلامة المحصل عليها في المادة هو 11,5 بتباين 16 (علما أن كل من العينتين مأخوذتين من مدرستين خاصتين مختلفتين)

1- أعط تقدير نقطي للفرق بين متوسطي العلامة المحصل عليها في الرياضيات بين التلاميذ الذين يتلقون دروس الدعم والذين لا يتلقونها

2- عين مجال ثقة للفرق بين المتوسطين عند مستوى معنوية 0,05

أ) في حالة تساوي انحرافي المجتمعين
ب) في حالة عدم تساويهما

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

التمرين الرابع: تشغل مقاوله للبناء العمال الموزعين عبر جميع ورشاتها بنظام الدوامين أراد مسؤولوا المقاوله تقدير الفرق بين متوسطي عدد ساعات العمل الفعلي في الدوامين تم سحب عينة من 35 عامل للفترة من الساعة 6 صباحا إلى الساعة 14 فكان متوسط عمل أفراد العينة 6 ساعات ونصف بانحراف معياري يقدر بـ 45 دقيقة وقدر متوسط ساعات العمل الفعلية في عينة من 40 عامل للفترة من 14 الساعة إلى الساعة 22 ليلا بـ 6 ساعات بانحراف معياري يقدر بـ 70 دقيقة

1- أوجد مجال ثقة لفرق المتوسطين عند مستوى معنوية 0,05

2- أوجد مجال ثقة للنسبة بين التباينين عند مستوى ثقة 90 %

التمرين الخامس: في شركة معينة أخذنا عينة مكونة من 40 عامل لدراسة نسبة عدد العاملين الحاصلين على شهادة الماستر فوجدنا فيها 8 عمال

1- أعط تقدير نقطي لنسبة العاملين الحاصلين على شهادة الماستر في هذه الشركة

2- عين مجال الثقة لهذه النسبة عند مستوى معنوية 0,05

3- إذا كان عدد العمال في هذه الشركة يساوي 200 عامل أعد الإجابة على السؤال الثاني

التمرين السادس: قصد دراسة نسبة المعجبين بالبرنامج التلفزيوني أخذنا عينة من 225 شخص متابع لهذا البرنامج منهم 125 رجل كان فيهم 80 معجب به و 75 امرأة معجبة

1. أعط تقدير نقطي للفرق بين نسبة النساء المعجبات بالبرنامج ونسبة الرجال المعجبين

2. عين مجال الثقة لهذا الفرق عند مستوى معنوية 0,1 علما أن عدد الرجال الذين يتابعون هذا البرنامج 1200 وعدد النساء 2000

التمرين السابع: لدينا مجتمع أول يتوزع توزيعا طبيعيا أخذنا منه عينة حجمها 6 وتباينها 4,4 ولدينا من جهة أخرى مجتمع آخر يتوزع هو الآخر توزيعا طبيعيا أخذنا منه عينة عشوائية حجمها 5 وتباينها 2,5

1. أوجد مجال الثقة لتباين المجتمع الأول عند مستوى معنوية 0,1

2. أوجد مجال الثقة لنسبة تباين المجتمع الأول إلى تباين المجتمع الثاني عند مستوى معنوية 0,1

الفصل الثالث: اختبار الفرضيات

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

تمهيد:

بعدما عرضنا طريقة الاستدلال الإحصائي الأولى، التي عرفنا فيها كيفية تقدير معالم المجتمع المجهولة، تأتي الطريقة الثانية التي يمكن أن يستعملها الباحث كوسيلة لاتخاذ قراراته البحثية، يمثل اختبار الفرضيات أحد الطرق لاتخاذ القرار بشأن الادعاءات حول معالم المجتمع من حيث قبولها أو رفضها وتحديد ما إذا كانت النتائج المشاهدة تختلف معنويًا عن المعالم الحقيقية للمجتمع أم لا تختلف، وسنحاول في هذا الفصل تسليط الضوء على هذه الطريقة بالتعرض للمباحث التالية:

1. مفاهيم أساسية في اختبار الفرضيات:

1.1 مفهوم اختبار الفرضيات الإحصائية:

الفرضية هي تخمين أو استنتاج مبني على حثيات معقولة ومنطقية وليس على حسابات دقيقة خاصة بالمجتمع الإحصائي لأننا نفترض أنه لا يمكن دراسته بالكامل عن طريق الحصر الشامل، بل نحاول الاستدلال على مقاييس هذا المجتمع باستخدام بيانات ونتائج العينة المسحوبة منه، ويقوم الباحث بصياغة الفرضية المعنية واختبارها لبيان مدى صحتها لغرض الوصول إلى قرار حول إدعاء معين

2.1 فرضية العدم والفرضية البديلة وكيفية صياغتها:

لغرض إجراء عملية الاختبار يجب تحديد فرضيتين هما فرضية العدم والفرضية البديلة:

- فرضية العدم يرمز لها بالرمز (H_0) ، وتعرف بأنها تلك الفرضية التي يتم اختبار إمكانية رفضها بفرض أنها صحيحة، وتعني انعدام الاختلاف والتباين والتشتت، كما تسمى أيضا بالفرضية الصفرية أو الأساسية، وعادة يقوم الباحثون في ميادين المعرفة المختلفة بصياغة فرضية العدم، ومهمة الإحصائي تكمن في مساعدتهم في اختيار فرضية العدم المناسبة واتخاذ القرار بقبولها أو رفضها، إذن فرضية العدم هي الفرضية التي يتم اختبارها.

-الفرضية البديلة هي فرضية أخرى مكملية لفرضية العدم ويرمز لها بالرمز (H_1) وتعني وجود الاختلاف والتباين، كما تسمى أحيانا بفرضية القبول، أي القبول بوجود الاختلاف والتباين، وبناء على ما تقدم يمكن صياغة فرضية العدم والفرضية البديلة على ثلاثة أشكال.

لنفترض أننا نتكلم عن اختبار متوسط مجتمع طبيعي، فرضية العدم تصاغ بالشكل التالي :
حيث أن $H_0: \mu = \mu_0$ تمثل قيمة معطاة ، أما الفرضية البديلة فيمكن صياغتها على ثلاث حالات :

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

- اختبار من جانبيين عندما تكون $H_1: \mu \neq \mu_0$
- اختبار من جانب واحد وهو الجانب الأيمن (الجانب العلوي) عندما تكون $H_1: \mu > \mu_0$
- اختبار من جانب واحد وهو الجانب الأيسر (الجانب السفلي) عندما تكون $H_1: \mu < \mu_0$

3.1 الأخطاء التي يقع فيها الإحصائي في اختبار الفرضية :

نحن نريد إتخاذ قرار بشأن قبول فرضية العدم ورفض الفرضية البديلة أو رفض فرضية العدم وقبول الفرضية البديلة، وفي اتخاذنا للقرارات قد نقع في نوعين من الخطأ¹⁰.

- خطأ من النوع الأول رمزه (α) : رفض فرضية العدم (H_0) عندما تكون فرضية العدم صحيحة.
- خطأ من النوع الثاني رمزه (β) : قبول فرضية العدم (H_0) عندما تكون فرضية العدم غير صحيح.

4.1. مستوى المعنوية (الدالة) ¹¹:

إن قيمة احتمال رفض (H_0) عندما تكون صحيحة، أي احتمال الوقوع في الخطأ من النوع الأول يمثل مستوى المعنوية، ويرمز لمستوى المعنوية بالرمز (α) ، حيث: $\alpha = P(H_0 \text{ صحيح} \mid \text{رفض } H_0)$ ، وعادة يتم اختيار قيمة (α) مساوية إلى (1%) (5%) (10%)، مثلاً إذا كانت $(\alpha = 5\%)$ فهذا يعني أنه من المحتمل الوقوع بالخطأ من النوع الأول بمقدار خمس مرات كل مائة مرة، مستوى المعنوية يتأثر بنوع الاختبار، فإذا كان الاختبار من جانب واحد (أيمن أو أيسر) فإن قيمة (α) تبقى كما هي، أما إذا كان الاختبار من جانبيين فإن (α) تقسم على 2، أي تصبح $(\frac{\alpha}{2})$

5.1 قوة الاختبار ¹²:

هي قيمة احتمال رفض (H_0) عندما تكون خاطئة، بما أن احتمال الوقوع في الخطأ من النوع الثاني يرمز له بالرمز (β) ، فإن قوة الاختبار تكون $(1 - \beta)$ ، أي:

¹⁰ طعمة حسن ياسين، الاختبارات الإحصائية أسس وتطبيقات، دار صفاء للنشر، عمان، الطبعة الأولى، 2011، ص 21

¹¹ طعمة حسن ياسين، نفس المرجع، ص 23

¹² عابد علي، مطبوعة الإحصاء 3 (الإحصاء الاستنتاجي أو الاستدلالي)، مرجع سابق، ص 117

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

(H_0 خطأ \ رفض H_0) $P(1 - \beta)$ ، وهذا يعني أنه كلما قل احتمال الوقوع في الخطأ من النوع الثاني كلما زادت قوة الاختبار.

6.1 الإحصائية والمعلمة الإحصائية :

تعرف الإحصائية بأنها دالة بدلالة قياسات العينة، في حين تعرف المعلمة الإحصائية بأنها ثابت إحصائي يخص المجتمع، فالوسط الحسابي ($\bar{X}$) والتباين (S^2) هي إحصائيات وفقاً لقياسات مشاهدات العينات، أما (μ) متوسط المجتمع و (σ^2) تباين المجتمع، فإنهما يمثلان معلمتا المجتمع .

7.1 درجة الحرية:

تعرف درجة الحرية بأنها عدد مفردات العينة (حجم العينة) () مطروحاً منه عدد القيود المستقلة التي فرضت على تلك العينة (عدد المقدرات)، فلو فرضنا أن عدد المقدرات بشكل عام يساوي (k) فإن درجة الحرية تكون ($d.f = v = n - k$)

8.1 المنطقة الحرجة والقيمة الحرجة :

تعرف المنطقة الحرجة بأنها ذلك الجزء من المساحة تحت منحنى دالة التوزيع الاحتمالي لمعيار الاختبار، هذه المساحة تمثل احتمال رفض (H_0) عندما تكون صحيحة، قيمة هذه المساحة هي (α) في حالة الاختبار من جانب واحد ، وتكون ($\frac{\alpha}{2}$) للجانب الأيمن و ($\frac{\alpha}{2}$) للجانب الأيسر في حالة الاختبار من جانبيين .

أما القيمة الحرجة فتعرف بأنها قيمة من قيم التوزيع الاحتمالي لمعيار الاختبار، وهي قيمة تفصل ما بين منطقة رفض (H_0) ومنطقة قبولها .

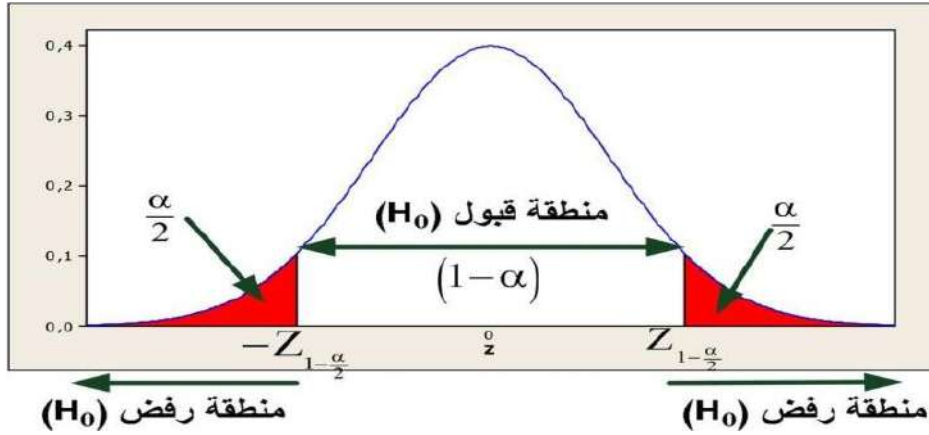
9.1 الخطوات المتبعة في اختبار فرضية : نفرض أن المعلمة المعنية بالاختبار هي متوسط المجتمع (μ)، هناك أربع خطوات لإجراء اختبار الفرضية¹³:

1.9.1 الخطوة الأولى: وضع الفرضية

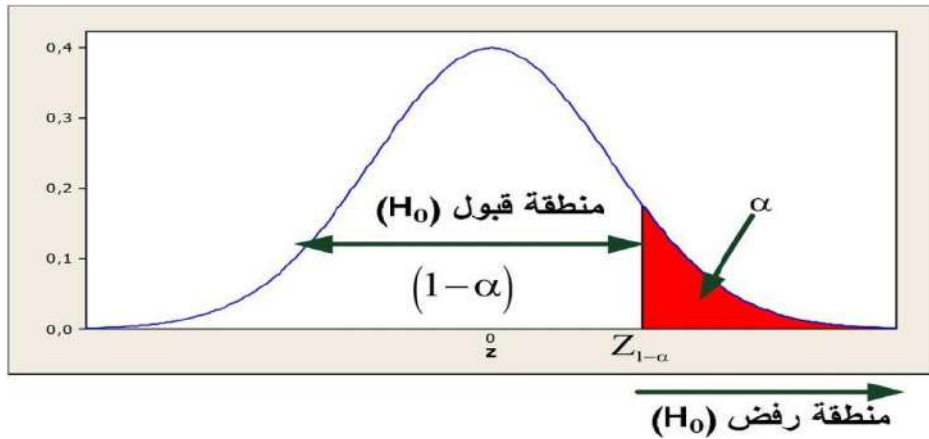
¹³ طعمة حسن ياسين، مرجع سابق، ص ص 29-30

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

اختبار من جانبيين
$$\begin{cases} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu \neq \mu_0 \end{cases}$$

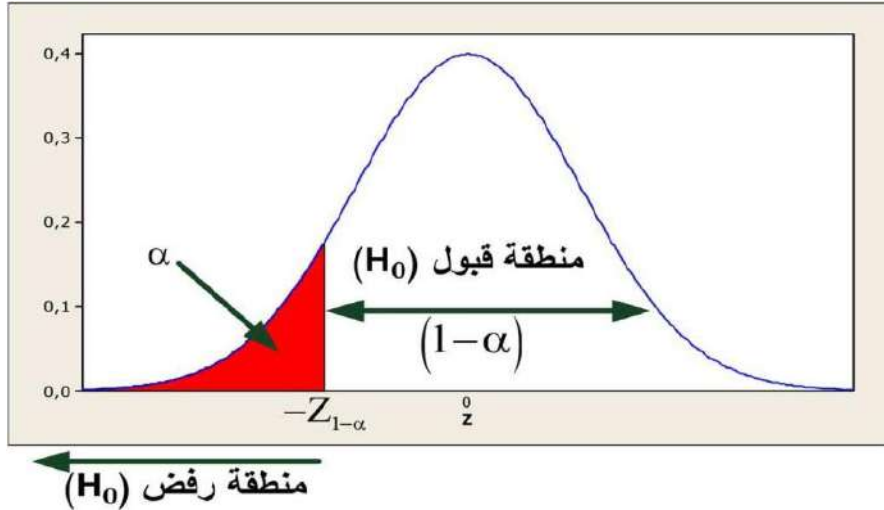


اختبار أحادي من الجانب اليمين (العلوي)
$$\begin{cases} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu > \mu_0 \end{cases}$$



الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

اختبار أحادي من الجانب اليسار (السفلي) $\begin{cases} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu < \mu_0 \end{cases}$



2.9.1 الخطوة الثالثة: حساب قيمة الإحصائية المناسبة بحسب التوزيع المتبع، ونرمز لها (Z_{cal}) أو (T_{cal}) أو (F_{cal}) أو (χ^2_{cal})

3.9.1 الخطوة الثانية: إيجاد نوعية التوزيع واختيار الإحصائية المناسبة، وإيجاد القيمة الحرجة الخاصة بها، ونرمز لها (Z_{tab}) أو (T_{tab}) أو (F_{tab}) أو (χ^2_{tab}) وذلك بالاعتماد على مستوى المعنوية (α) ونوع الاختبار (أحادي الجانب أو جانبيين)

4.9.1 الخطوة الرابعة: القرار المتخذ، يكون كما يلي:

- إذا كان الاختبار جانبيين، نقبل فرضية العدم H_0 ونرفض الفرضية البديلة H_1 إذا كانت قيمة الإحصائية المناسبة المحسوبة تنتمي إلى المجال التالي: [القيمة الحرجة الدنيا , القيمة الحرجة القصوى]، أما إذا كانت خارج هذا المجال فنرفض فرضية العدم H_0 ونقبل الفرضية البديلة H_1

- إذا كان الاختبار أحادي الجانب من اليمين (علوي)، نقبل فرضية العدم H_0 ونرفض الفرضية البديلة H_1 إذا كانت قيمة الإحصائية المناسبة المحسوبة أصغر من القيمة الحرجة (المجدولة) ، أما إذا كانت أكبر منها فنرفض فرضية العدم H_0 ونقبل الفرضية البديلة H_1

- إذا كان الاختبار أحادي الجانب من اليسار (سفلي)، نقبل فرضية العدم H_0 ونرفض الفرضية البديلة H_1 إذا كانت قيمة الإحصائية المناسبة المحسوبة أكبر من القيمة الحرجة

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

(المجدولة) ، أما إذا كانت أصغر منها فنرفض فرضية العدم H_0 ونقبل الفرضية البديلة H_1

2. إختبار الفرضيات حول الوسط الحسابي لمجتمع (μ) يتبع التوزيع الطبيعي:

إذا كان لدينا مجتمعا يخضع للتوزيع الطبيعي بمتوسط μ مجهول، نريد اختبار صحة ما قيل عنه، وتباين σ^2 معلوم، وسحبنا منه العينات العشوائية البسيطة التي لها نفس الحجم n ، ووسطها الحسابي $\bar{X}$ وتباينها S^2

1.2 عندما يكون تباين المجتمع σ^2 معلوم:

نقوم باختبار فرضية متوسط المجتمع المجهول في حالة معلومية تباين المجتمع والتي نحاول من خلالها الإجابة على ما ادعي حول قيمة هذا المتوسط، هذا الاختبار نستخدم فيه التوزيع الطبيعي (أيضا لما لا يكون توزيع المجتمع طبيعي و $(n \geq 30)$ فحسب نظرية النهاية المركزية نستخدم فيه التوزيع الطبيعي) ، كما ذكرنا سابقا يكون من جانبيين أو من جانب واحد :

1.1.2 الاختبار من جانبيين ($H_1: (\neq)$) : نقوم باختبار فرضية متوسط المجتمع وفقا للخطوات التالية:

(أ) **الخطوة الأولى:** وضع العدم والفرضية البديلة: (نضع $\neq$ في H_1 عندما لا نستشعر وجود معنى الأكبر أو الأصغر في نص التمرين) وتكون الفرضية كما يلي:

$$\begin{cases} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu \neq \mu_0 \end{cases}$$

(ب) **الخطوة الثانية:** حساب إحصائية الاختبار المتمثلة في Z_{Cal} حيث:

$$Z_{Cal} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \quad - \text{إذا كان السحب بالإرجاع} \left(\frac{n}{N} \leq 0,05 \right)$$

$$Z_{Cal} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}} \quad - \text{إذا كان السحب بدون إرجاع} \left(\frac{n}{N} > 0,05 \right)$$

(ت) **الخطوة الثالثة:** استخراج القيم الحرجة، قيم (Z_{tab}) من جدول التوزيع الطبيعي المعياري، بما أن الاختبار بجانبيين فإن: $P = 1 - \frac{\alpha}{2}$ ، مستوى الثقة هي: $(1 - \alpha)$ ومستوى المعنوية (α) الجدول التالي يوضح بعض القيم الحرجة في التوزيع الطبيعي المعياري الشائعة الاستعمال:

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

0,1	0,05	0,01	10
1,645	1,96	2,575	$Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

(ث) الخطوة الرابعة: القرار المتخذ

- إذا كانت: $Z_{cal} \in \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} ; Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$ نقبل H_0 ونرفض H_1 ، وبالتالي: $\mu = \mu_0$

- إذا كانت: $Z_{cal} \notin \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} ; Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$ نرفض H_0 ونقبل H_1 ، وبالتالي: $\mu \neq \mu_0$

مثال 29: في أحد المصانع المنتجة لنوع معين من المكاتب، تبين أن الإنتاج الأسبوعي يتوزع توزيعاً طبيعياً بانحراف معياري قدره 16 وحدة، وعند أخذ عينة قدرها إنتاج 25 أسبوع اتضح أن متوسط الإنتاج الأسبوعي هو 203,5 وحدة، اختبر القول بأن متوسط المجتمع يساوي 200 وحدة عند مستوى معنوية 5%

الحل:

الخطوة الأولى: وضع العدم والفرضية البديلة كما يلي:

$$\begin{cases} H_0: \mu = 200 \\ H_1: \mu \neq 200 \end{cases}$$

الخطوة الثانية: حساب إحصائية Z_{cal} (نستعمل التوزيع الطبيعي مهما يكن حجم العينة (n) لوجود تباين المجتمع وتوزيع المجتمع طبيعي) حيث:

$$Z_{cal} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{203,5 - 200}{\frac{16}{\sqrt{25}}} = 1,09 \quad \text{السحب بالإرجاع لعدم وجود } N \text{ ومنه:}$$

الخطوة الثالثة: استخراج القيم الحرجة، قيم (Z_{tab}) من جدول التوزيع الطبيعي المعياري

بما أن الاختبار بجانبيين فإن: $P = 1 - \frac{\alpha}{2}$ ، ومنه حسب الجدول أعلاه لما $(\alpha = 0,05)$ نجد

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{tab} = Z_{0,975} = 1,96$$

الخطوة الرابعة: القرار المتخذ

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

بما أن: $Z_{cal} = 1,09 \in [-1,96 ; 1,96]$ فإننا نقبل H_0 ونرفض H_1

وبالتالي: $\mu = 200$

2.1.2 الاختبار أحادي الجانب من اليمين (العلوي) ($H_1: >$): نقوم باختبار فرضية متوسط المجتمع وفقا للخطوات التالية:

(أ) الخطوة الأولى: وضع العدم والفرضية البديلة (نضع $>$ في H_1 عند وجود مصطلح أكبر تماما أو على الأكثر في نص التمرين) وتكون الفرضية كما يلي:

$$\begin{cases} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu > \mu_0 \end{cases}$$

(ب) الخطوة الثانية: حساب إحصائية الاختبار المتمثلة في Z_{cal} حيث:

$$Z_{cal} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \quad - \text{إذا كان السحب بالإرجاع} \left(\frac{n}{N} \leq 0,05 \right)$$

$$Z_{cal} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}} \quad - \text{إذا كان السحب بدون إرجاع} \left(\frac{n}{N} > 0,05 \right)$$

(ت) الخطوة الثالثة: استخراج القيمة الحرجة، قيمة (Z_{tab}) من جدول التوزيع الطبيعي المعياري، بما أن الاختبار أحادي الجانب فإن: $P = 1 - \alpha$ ، مستوى الثقة هي: $(1 - \alpha)$ ومستوى المعنوية (α) والجدول التالي يوضح بعض القيمة الحرجة في التوزيع الطبيعي المعياري الشائعة الاستعمال لما يكون الاختبار أحادي الجانب من اليمين (القيمة الحرجة هنا تكون موجبة):

0,1	0,05	0,01	α
1,28	1,645	2,33	$Z_{1-\alpha}$

(ث) الخطوة الرابعة: القرار المتخذ

- إذا كانت: $Z_{cal} \geq Z_{1-\alpha}$ نرفض H_0 ونقبل H_1 ، وبالتالي: $\mu > \mu_0$

- إذا كانت: $Z_{cal} < Z_{1-\alpha}$ نقبل H_0 ونرفض H_1 ، وبالتالي: $\mu = \mu_0$

مثال 30: في أحد المصانع المنتجة لنوع معين من المكاتب، تبين أن الإنتاج الأسبوعي يتوزع توزيعا طبيعيا بانحراف معياري قدره 16 وحدة، وعند أخذ عينة قدرها إنتاج 36

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

أسبوع اتضح أن متوسط الإنتاج الأسبوعي هو 203,5 وحدة، اختبر القول بأن متوسط المجتمع يساوي على الأكثر 200 وحدة عند مستوى معنوية 1%

الحل:

الخطوة الأولى: وضع العدم والفرضية البديلة كما يلي:

$$\begin{cases} H_0: \mu = 200 \\ H_1: \mu > 200 \end{cases}$$

الخطوة الثانية: حساب إحصائية Z_{cal} (نستعمل التوزيع الطبيعي مهما يكن حجم العينة (n) لوجود تباين المجتمع وتوزيع المجتمع طبيعي) حيث:

$$Z_{cal} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{203,5 - 200}{\frac{16}{\sqrt{36}}} = 1,31 \quad \text{السحب بالإرجاع لعدم وجود } N \text{ ومنه:}$$

الخطوة الثالثة: استخراج القيم الحرجة، قيم (Z_{tab}) من جدول التوزيع الطبيعي المعياري

بما أن الاختبار أحادي الجانب فإن: $P = 1 - \alpha$ ، ومنه حسب الجدول أعلاه لما $(\alpha = 0,01)$

$$Z_{1-\alpha} = Z_{tab} = Z_{0,99} = 2,33 \quad \text{نجد}$$

الخطوة الرابعة: القرار المتخذ

بما أن: $Z_{cal} = 1,31 < 2,33$ نقبل H_0 ونرفض H_1 ، وبالتالي: $\mu = 200$

3.1.2 الاختبار أحادي الجانب من اليسار (السفلي) $(H_1: <)$: نقوم باختبار فرضية متوسط المجتمع وفقا للخطوات التالية:

أ) الخطوة الأولى: وضع العدم والفرضية البديلة (نضع $<$ في H_1 عند وجود مصطلح أقل تماما أو على الأقل في نص التمرين) وتكون الفرضية كما يلي:

$$\begin{cases} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu < \mu_0 \end{cases}$$

ب) الخطوة الثانية: حساب إحصائية الاختبار المتمثلة في Z_{cal} حيث:

$$Z_{cal} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \quad \text{- إذا كان السحب بالإرجاع } \left(\frac{n}{N} \leq 0,05 \right)$$

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

$$Z_{Cal} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}} : \left(\frac{n}{N} > 0,05 \right) \text{ - إذا كان السحب بدون إرجاع}$$

(ت) **الخطوة الثالثة:** استخراج القيمة الحرجة، قيمة (Z_{tab}) من جدول التوزيع الطبيعي المعياري، بما أن الاختبار أحادي الجانب فإن: $P = 1 - \alpha$ ، مستوى الثقة هي: $(1 - \alpha)$ ومستوى المعنوية (α) الجدول التالي يوضح بعض القيم الحرجة في التوزيع الطبيعي المعياري الشائعة الاستعمال لما يكون الاختبار أحادي الجانب من اليسار (تكون القيمة الحرجة هنا سالبة) :

0,1	0,05	0,01	α
-1,28	-1,645	-2,33	$Z_{1-\alpha}$

(ث) **الخطوة الرابعة:** القرار المتخذ

- إذا كانت: $Z_{Cal} \geq Z_{1-\alpha}$ نقبل H_0 ونرفض H_1 ، وبالتالي: $\mu = \mu_0$

- إذا كانت: $Z_{Cal} < Z_{1-\alpha}$ نرفض H_0 ونقبل H_1 ، وبالتالي: $\mu < \mu_0$

مثال 31: في أحد المصانع المنتجة لنوع معين من المكاتب، تبين أن الإنتاج الأسبوعي يتوزع توزيعاً طبيعياً بانحراف معياري قدره 16 وحدة، وعند أخذ عينة قدرها إنتاج 36 أسبوع اتضح أن متوسط الإنتاج الأسبوعي هو 203,5 وحدة، اختبر القول بأن متوسط المجتمع يساوي على الأقل 200 وحدة عند مستوى معنوية 10%

الحل:

الخطوة الأولى: وضع العدم والفرضية البديلة كما يلي:

$$\begin{cases} H_0: \mu = 200 \\ H_1: \mu < 200 \end{cases}$$

الخطوة الثانية: حساب إحصائية Z_{Cal} (نستعمل التوزيع الطبيعي مهما يكن حجم العينة (n) لوجود تباين المجتمع وتوزيع المجتمع طبيعي) حيث:

$$Z_{Cal} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{203,5 - 200}{\frac{16}{\sqrt{36}}} = 1,31 \text{ السحب بالإرجاع لعدم وجود } N \text{ ومنه:}$$

الخطوة الثالثة: استخراج القيم الحرجة، قيم (Z_{tab}) من جدول التوزيع الطبيعي المعياري

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

بما أن الاختبار أحادي الجانب فإن: $P = 1 - \alpha$ ، ومنه حسب الجدول أعلاه لما
($\alpha = 0,1$)

$$Z_{1-\alpha} = Z_{\text{tab}} = Z_{0,9} = -1,28 \text{ نجد}$$

الخطوة الرابعة: القرار المتخذ

بما أن: $Z_{\text{cal}} = 1,31 \geq -1,28$ نقبل H_0 ونرفض H_1 ، وبالتالي: $\mu = 200$

2.2 عندما يكون تباين المجتمع σ^2 مجهول:

اختبار فرضية متوسط المجتمع المجهول في حالة تباين المجتمع مجهول، يوجد حالتين:

1.1.2 حجم العينة كبير ($n \geq 30$) : نستخدم التوزيع الطبيعي بنفس المفهوم والخطوات السابقة، فقط في الخطوة الثانية من الاختبار نستبدل الانحراف المعياري للمجتمع σ بالانحراف المعياري للعينة S كتقدير له لأنه مجهول ، فتصبح:

$$Z_{\text{cal}} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \quad - \text{إذا كان السحب بالإرجاع} \left(\frac{n}{N} \leq 0,05 \right) :$$

$$Z_{\text{cal}} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}} \quad - \text{إذا كان السحب بدون إرجاع} \left(\frac{n}{N} > 0,05 \right) :$$

مثال 32: يعتقد أحد الباحثين أن الوسط الحسابي في مجتمع ما يزيد عن 300، ومن أجل اختبار ذلك قام بسحب عينة عشوائية مكونة من 100 عنصر من هذا المجتمع الذي يحتوي على 250 عنصر، فوجد أن الوسط الحسابي للعينة يساوي 310 والانحراف المعياري لها 44، اختبر ما إذا كان اعتقاد الباحث صحيحا عند مستوى معنوية 5%

الحل:

الخطوة الأولى: وضع العدم والفرضية البديلة كما يلي:

$$\begin{cases} H_0: \mu = 300 \\ H_1: \mu > 300 \end{cases}$$

الخطوة الثانية: حساب إحصائية Z_{cal} (نستعمل التوزيع الطبيعي لعدم وجود تباين المجتمع و ($n \geq 30$) حيث:

$$\text{السحب بدون إرجاع لأن } \frac{n}{N} = \frac{100}{250} > 0,05 \text{ ومنه:}$$

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

$$Z_{cal} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}} = \frac{310-300}{\frac{44}{\sqrt{100}} \sqrt{\frac{250-100}{250-1}}} = 2,94$$

الخطوة الثالثة: استخراج القيمة الحرجة، قيمة (Z_{tab}) من جدول التوزيع الطبيعي المعياري

بما أن الاختبار أحادي الجانب فإن: $P = 1 - \alpha$ ، ومنه لما ($\alpha = 0,05$)

$$Z_{1-\alpha} = Z_{tab} = Z_{0,95} = 1,645$$

الخطوة الرابعة: القرار المتخذ

بما أن: $Z_{cal} = 2,94 \geq 1,645$ نرفض H_0 ونقبل H_1 ، وبالتالي: $\mu > 300$
أي أن اعتقاد الباحث صحيحا

2.1.2 حجم العينة صغير ($n < 30$) : نستخدم توزيع ستيودنت بدرجة حرية ($v = n - 1$) ونستبدل الانحراف المعياري للمجتمع σ بالانحراف المعياري للعينة S كتقدير له لأنه مجهول ، والاختبار يتم على حسب نوعه (تقريبا نفس منهجية الاختبار في حالة استخدام التوزيع الطبيعي)

أ. الاختبار من جانبيين ($H_1: (\neq)$): نقوم باختبار فرضية متوسط المجتمع وفقا للخطوات التالية:

1. الخطوة الأولى: وضع العدم والفرضية البديلة:

$$\begin{cases} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu \neq \mu_0 \end{cases}$$

2. الخطوة الثانية: حساب إحصائية الاختبار المتمثلة في T_{cal} حيث:

$$T_{cal} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \quad - \text{إذا كان السحب بالإرجاع} \left(\frac{n}{N} \leq 0,05 \right) :$$

$$T_{cal} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}} \quad - \text{إذا كان السحب بدون إرجاع} \left(\frac{n}{N} > 0,05 \right) :$$

3. الخطوة الثالثة: استخراج القيم الحرجة، قيم (T_{tab}) من جدول توزيع ستيودنت، بما أن الاختبار بجانبيين فإن: $P = 1 - \frac{\alpha}{2}$ ، درجة الحرية ($v = n - 1$)

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

أ. الخطوة الرابعة: القرار المتخذ

- إذا كانت: $T_{cal} \in \left[-T_{1-\frac{\alpha}{2}} ; T_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$ نقبل H_0 ونرفض H_1 ، وبالتالي: $\mu = \mu_0$

- إذا كانت: $T_{cal} \notin \left[-T_{1-\frac{\alpha}{2}} ; T_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$ نرفض H_0 ونقبل H_1 ، وبالتالي: $\mu \neq \mu_0$

مثال 33: في أحد المصانع المنتجة لنوع معين من المكاتب، تبين أن الإنتاج الأسبوعي يتوزع توزيعاً طبيعياً ، أخذنا عينة قدرها إنتاج 25 أسبوع، اتضح أن متوسط الإنتاج الأسبوعي هو 203,5 وحدة، اختبر القول بأن متوسط المجتمع يساوي 200 وحدة عند مستوى معنوية 5%

الحل:

الخطوة الأولى: وضع العدم والفرضية البديلة كما يلي:

$$\begin{cases} H_0: \mu = 200 \\ H_1: \mu \neq 200 \end{cases}$$

الخطوة الثانية: حساب إحصائية T_{cal} (نستعمل توزيع ستيودنت لعدم وجود تباين المجتمع و $(n < 30)$) حيث:

$$T_{cal} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{203,5 - 200}{\frac{16}{\sqrt{25}}} = 1,09 \quad \text{السحب بالإرجاع لعدم وجود } N \text{ ومنه:}$$

الخطوة الثالثة: استخراج القيم الحرجة، قيم (T_{tab}) من جدول توزيع ستيودنت

بما أن الاختبار جانبيين فإن: $P = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{0,05}{2} = 0,975$ ، ودرجة الحرية $v = n - 1 = 25 - 1 = 24$ ومنه حسب جدول ستيودنت الموجود في الملاحق نجد:

$$T_{(1-\frac{\alpha}{2};v)} = T_{tab} = T_{(P;v)} = T_{(0,975;24)} = 2,064$$

الخطوة الرابعة: القرار المتخذ

بما أن: $T_{cal} = 1,09 \in [-2,064 ; 2,064]$ فإننا نقبل H_0 ونرفض H_1

وبالتالي: $\mu = 200$

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

ب. الاختبار أحادي الجانب من اليمين (العلوي) ($H_1: >$): نقوم باختبار فرضية متوسط المجتمع وفقا للخطوات التالية:

ب.1. الخطوة الأولى: وضع العدم والفرضية البديلة

$$\begin{cases} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu > \mu_0 \end{cases}$$

ب.2. الخطوة الثانية: حساب إحصائية الاختبار المتمثلة في T_{Cal} حيث:

$$T_{Cal} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \quad \left(\frac{n}{N} \leq 0,05 \right) \text{ - إذا كان السحب بالإرجاع}$$

$$T_{Cal} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}} \quad \left(\frac{n}{N} > 0,05 \right) \text{ - إذا كان السحب بدون إرجاع}$$

ب.3. الخطوة الثالثة: استخراج القيمة الحرجة، قيمة (T_{tab}) من جدول ستيودنت، بما أن الاختبار أحادي الجانب فإن: $P = 1 - \alpha$ ، و $v = n - 1$ (القيمة الحرجة هنا تكون موجبة):

ب.4. الخطوة الرابعة: القرار المتخذ

- إذا كانت: $T_{Cal} \geq T_{1-\alpha}$ نرفض H_0 ونقبل H_1 ، وبالتالي: $\mu > \mu_0$

- إذا كانت: $T_{Cal} < T_{1-\alpha}$ نقبل H_0 ونرفض H_1 ، وبالتالي: $\mu = \mu_0$

مثال 34: في دراسة قام بها أحد البنوك وجد أن عملاءه يستخدمون البطاقات التي يصدرها 10 مرات في الشهر وسطيا ، ورغبة من البنك في زيادة استعمال عملائه لتلك البطاقات، طرح في شهر لاحق جوائز يمكن أن يربحها مستعملوا البطاقات، أخذت عينة عشوائية من الزبائن مكونة من 25 شخصا حاملا لهذه البطاقات فوجد أنهم استخدموا البطاقات في ذلك الشهر 12 مرة في المتوسط بانحراف معياري قدره 3 ، هل تعطينا هذه البيانات مبررا للقول بأن استعمال البطاقات قد ازداد خلال ذلك الشهر عند مستوى الدلالة 5% ؟

الحل:

الخطوة الأولى: وضع العدم والفرضية البديلة كما يلي:

$$\begin{cases} H_0: \mu = 10 \\ H_1: \mu > 10 \end{cases}$$

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

الخطوة الثانية: حساب إحصائية T_{Cal} (نستعمل توزيع ستودنت لعدم وجود تباين المجتمع و $(n < 30)$) حيث:

$$T_{Cal} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{12 - 10}{\frac{3}{\sqrt{25}}} = 3,33 \quad \text{السحب بالإرجاع لعدم وجود } N \text{ ومنه:}$$

الخطوة الثالثة: استخراج القيم الحرجة، قيم (T_{tab}) من جدول ستودنت

بما أن الاختبار أحادي الجانب فإن: $P = 1 - \alpha$ ، $v = 25 - 1 = 24$ ،

$$T_{(1-\alpha;v)} = T_{tab} = T_{(P;v)} = T_{(0,95;24)} = 2,711 \quad (\alpha = 0,05) \quad \text{نجد:}$$

الخطوة الرابعة: القرار المتخذ

بما أن: $T_{Cal} = 3,33 \geq 1,711$ فإننا نرفض H_0 ونقبل H_1 ، وبالتالي: $\mu > 10$
نعم تعطينا هذه البيانات مبررا للقول بأن استعمال البطاقات قد ازداد خلال ذلك الشهر عند مستوى الدلالة 5%

ت. الاختبار أحادي الجانب من اليسار (السفلي) ($H_1: (<)$): نقوم باختبار فرضية متوسط المجتمع وفقا للخطوات التالية:

ت.1. الخطوة الأولى: وضع العدم والفرضية البديلة

$$\begin{cases} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu < \mu_0 \end{cases}$$

ت.2. الخطوة الثانية: حساب إحصائية الاختبار المتمثلة في T_{Cal} حيث:

$$T_{Cal} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \quad \text{- إذا كان السحب بالإرجاع } \left(\frac{n}{N} \leq 0,05\right):$$

$$T_{Cal} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}} \quad \text{- إذا كان السحب بدون إرجاع } \left(\frac{n}{N} > 0,05\right):$$

ت.3. الخطوة الثالثة: استخراج القيمة الحرجة، قيمة (T_{tab}) من جدول ستودنت، بما أن الاختبار أحادي الجانب فإن: $P = 1 - \alpha$ (تكون القيمة الحرجة هنا سالبة) ، $v = n - 1$

ت.4. الخطوة الرابعة: القرار المتخذ

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

- إذا كانت: $T_{cal} \geq T_{1-\alpha}$ نقبل H_0 ونرفض H_1 ، وبالتالي: $\mu = \mu_0$

- إذا كانت: $T_{cal} < T_{1-\alpha}$ نرفض H_0 ونقبل H_1 ، وبالتالي: $\mu < \mu_0$

مثال 35: في دراسة قام بها أحد البنوك وجد أن عملاءه يستخدمون البطاقات التي يصدرها 10 مرات في الشهر وسطيا ، ورغبة من البنك في زيادة استعمال عملائه لتلك البطاقات، طرح في شهر لاحق جوائز يمكن أن يربحها مستعملوا البطاقات، أخذت عينة عشوائية من الزبائن مكونة من 25 شخصا حاملا لهذه البطاقات فوجد أنهم استخدموا البطاقات في ذلك الشهر 12 مرة في المتوسط بانحراف معياري قدره 3 ، هل تعطينا هذه البيانات مبررا للقول بأن استعمال البطاقات قد انخفض خلال ذلك الشهر عند مستوى الدلالة 5% ؟

الحل:

الخطوة الأولى: وضع العدم والفرضية البديلة كما يلي:

$$\begin{cases} H_0: \mu = 10 \\ H_1: \mu < 10 \end{cases}$$

الخطوة الثانية: حساب إحصائية T_{cal} (نستعمل توزيع ستيودنت لعدم وجود تباين المجتمع و $(n < 30)$) حيث:

$$T_{cal} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{12 - 10}{\frac{3}{\sqrt{25}}} = 3,33 \quad \text{السحب بالإرجاع لعدم وجود } N \text{ ومنه:}$$

الخطوة الثالثة: استخراج القيم الحرجة، قيم (T_{tab}) من جدول ستيودنت

بما أن الاختبار أحادي الجانب فإن: $P = 1 - \alpha$ ، $v = 25 - 1 = 24$

$$T_{(1-\alpha;v)} = T_{tab} = T_{(P;v)} = -T_{(0,95;24)} = -1,711 \quad \text{نجد: } (\alpha = 0,05)$$

الخطوة الرابعة: القرار المتخذ

بما أن: $T_{cal} = 3,33 \geq -1,711$ فإننا نقبل H_0 ونرفض H_1 ، وبالتالي: $\mu = 10$

لا تعطينا هذه البيانات مبررا للقول بأن استعمال البطاقات قد انخفض خلال ذلك الشهر عند مستوى الدلالة 5%

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

3. إختبار الفرضيات حول الفرق بين متوسطي مجتمعين مستقلين $(\mu_1 - \mu_2)$ يتبعان التوزيع الطبيعي:

لدينا μ_1 متوسط المجتمع الأول و μ_2 هو متوسط المجتمع الثاني يتوزعان توزيعا طبيعيا، قصد اختبار الفرق بين متوسطي المجتمعين $(\mu_1 - \mu_2)$ ، نقوم باختيار العينة الأولى من المجتمع الأول، والتي حجمها n_1 ومتوسطها $\bar{X}_1$ وتباينها S_1^2 ، وأيضا نقوم باختيار العينة الثانية من المجتمع الثاني، والتي حجمها n_2 ومتوسطها $\bar{X}_2$ وتباينها S_2^2 .

1.3. عندما يكون تباينا المجتمعين (σ_1^2) و (σ_2^2) معلومين:

نقوم باختبار فرضية الفرق بين متوسطي المجتمعين المجتمع المجهولين في حالة معلومية تباينهما، هذا الاختبار نستخدم فيه التوزيع الطبيعي (أيضا لما لا يكون توزيعي المجتمعين طبيعي وحجما العينتين كبير $(n_1 \geq 30)$)

$(n_2 \geq 30)$ فحسب نظرية النهاية المركزية نستخدم فيه التوزيع الطبيعي، ويكون هذا الاختبار من جانبيين أو من جانب واحد :

1.1.3 الاختبار من جانبيين $(H_1: \neq)$: نقوم باختبار فرضية فرق متوسطي المجتمعين وفقا للخطوات التالية:

أ) الخطوة الأولى: وضع العدم والفرضية البديلة: (نضع $\neq$ في H_1 عندما لا نستشعر وجود معنى الأكبر أو الأصغر في نص التمرين) وتكون الفرضية كما يلي:

$$\begin{cases} H_0: \mu_1 = \mu_2 \\ H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases}$$

ب) الخطوة الثانية: حساب إحصائية الاختبار المتمثلة في Z_{Cal} حيث:

$$Z_{Cal} = \begin{cases} \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \text{ si } \left(\frac{n_1}{N_1} \text{ و } \frac{n_2}{N_2} \leq 0,05 \right) \\ \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} \left(\frac{N_1 - n_1}{N_1 - 1} \right) + \frac{\sigma_2^2}{n_2} \left(\frac{N_2 - n_2}{N_2 - 1} \right)}} \text{ si } \left(\frac{n_1}{N_1} \text{ و } \frac{n_2}{N_2} > 0,05 \right) \end{cases}$$

ت) الخطوة الثالثة: استخراج القيم الحرجة، قيم (Z_{tab}) من جدول التوزيع الطبيعي المعياري، بما أن الاختبار بجانبيين فإن: $P = 1 - \frac{\alpha}{2}$ ، مستوى الثقة هي: $(1 - \alpha)$

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

α ومستوى المعنوية (α) الجدول التالي يوضح بعض القيم الحرجة في التوزيع الطبيعي المعياري الشائعة الاستعمال:

0,1	0,05	0,01	10
1,645	1,96	2,575	$Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

ث) الخطوة الرابعة: القرار المتخذ

- إذا كانت: $Z_{cal} \in \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} ; Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$ نقبل H_0 ونرفض H_1 ، وبالتالي: $\mu_1 = \mu_2$

- إذا كانت: $Z_{cal} \notin \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} ; Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$ نرفض H_0 ونقبل H_1 ، وبالتالي: $\mu_1 \neq \mu_2$

مثال 36: أخذت عينة عشوائية حجمها 17 من مجتمع طبيعي تباينه 10 فوجد أن وسطها الحسابي 70 أخذت عينة عشوائية حجمها 21 من مجتمع طبيعي آخر تباينه 26 فوجد أن وسطها 67 ، اختبر تساوي متوسطي المجتمعين ضد عدم تساويهما عند مستوى معنوية 5%

الحل:

الخطوة الأولى: وضع العدم والفرضية البديلة كما يلي:

$$\begin{cases} H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0 \\ H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0 \end{cases} \text{ أي: } \begin{cases} H_0: \mu_1 = \mu_2 \\ H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases}$$

الخطوة الثانية: حساب إحصائية Z_{cal} (نستعمل التوزيع الطبيعي مهما يكن حجم العينة (n) لوجود تباين المجتمع وتوزيع المجتمع طبيعي) حيث:

$$Z_{cal} = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{(70 - 67) - 0}{\sqrt{\frac{10}{17} + \frac{26}{21}}} =$$

2,22

الخطوة الثالثة: استخراج القيم الحرجة، قيم (Z_{tab}) من جدول التوزيع الطبيعي المعياري

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

بما أن الاختبار بجانبين فإن: $P = 1 - \frac{\alpha}{2}$ ، ومنه حسب الجدول أعلاه لما $\alpha = 0,05$ نجد

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{\text{tab}} = Z_{0,975} = 1,96$$

الخطوة الرابعة: القرار المتخذ

بما أن: $Z_{\text{cal}} = 2,22 \in [-1,96 ; 1,96]$ فإننا نقبل H_0 ونرفض H_1

وبالتالي: $\mu_1 = \mu_2$

2.1.3 الاختبار أحادي الجانب من اليمين (العلوي) ($H_1: >$): نقوم بالاختبار وفقا للخطوات التالية:

(أ) الخطوة الأولى: وضع العدم والفرضية البديلة (نضع $>$ في H_1 عند وجود مصطلح أكبر تماما أو على الأكثر في نص التمرين) وتكون الفرضية كما يلي:

$$\begin{cases} H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0 \\ H_1: \mu_1 - \mu_2 > 0 \end{cases} \text{ أي: } \begin{cases} H_0: \mu_1 = \mu_2 \\ H_1: \mu_1 > \mu_2 \end{cases}$$

(ب) الخطوة الثانية: حساب إحصائية الاختبار المتمثلة في Z_{cal} حيث:

$$Z_{\text{cal}} = \begin{cases} \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \text{ si } \left(\frac{n_1}{N_1} \text{ و } \frac{n_2}{N_2} \leq 0,05 \right) \\ \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} \left(\frac{N_1 - n_1}{N_1 - 1} \right) + \frac{\sigma_2^2}{n_2} \left(\frac{N_2 - n_2}{N_2 - 1} \right)}} \text{ si } \left(\frac{n_1}{N_1} \text{ و } \frac{n_2}{N_2} > 0,05 \right) \end{cases}$$

(ت) الخطوة الثالثة: استخراج القيم الحرجة، قيم (Z_{tab}) من جدول التوزيع الطبيعي المعياري، بما أن الاختبار بجانبين فإن: $P = (1 - \alpha)$ ، الجدول التالي يوضح بعض القيم الحرجة في التوزيع الطبيعي المعياري الشائعة الاستعمال الجانب من اليمين (القيمة الحرجة هنا تكون موجبة):

0,1	0,05	0,01	α
1,28	1,645	2,33	$Z_{1-\alpha}$

(ث) الخطوة الرابعة: القرار المتخذ

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

- إذا كانت: $Z_{cal} \geq Z_{1-\alpha}$ نرفض H_0 ونقبل H_1 ، وبالتالي: $\mu_1 > \mu_2$

- إذا كانت: $Z_{cal} < Z_{1-\alpha}$ نقبل H_0 ونرفض H_1 ، وبالتالي: $\mu_1 = \mu_2$

مثال 37: نفس المثال السابق ، اختبر فرضية أن $\mu_1 > \mu_2$ عند مستوى معنوية 5%

الحل:

الخطوة الأولى: وضع العدم والفرضية البديلة كما يلي:

$$\begin{cases} H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0 \\ H_1: \mu_1 - \mu_2 > 0 \end{cases} \text{ أي: } \begin{cases} H_0: \mu_1 = \mu_2 \\ H_1: \mu_1 > \mu_2 \end{cases}$$

الخطوة الثانية: نفسها في المثال السابق

الخطوة الثالثة: استخراج القيم الحرجة، قيم (Z_{tab}) من جدول التوزيع الطبيعي المعياري

بما أن الاختبار جانبيين فإن: $P = 1 - \alpha$ ، ومنه حسب الجدول أعلاه لما $\alpha = 0,05$ نجد

$$Z_{1-\alpha} = Z_{tab} = Z_{0,95} = 1,645$$

الخطوة الرابعة: القرار المتخذ

بما أن: $Z_{cal} = 2,22 \geq 1,645$ فإننا نرفض H_0 ونقبل H_1 وبالتالي: $\mu_1 > \mu_2$

3.1.3. الاختبار أحادي الجانب من اليسار (السفلي) ($H_1: (<)$): نقوم باختبار الفرضية وفقا للخطوات التالية:

(أ) الخطوة الأولى: وضع العدم والفرضية البديلة (نضع $<$ في H_1 عند وجود مصطلح أقل تماما أو على الأقل في نص التمرين) وتكون الفرضية كما يلي:

$$\begin{cases} H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0 \\ H_1: \mu_1 - \mu_2 < 0 \end{cases} \text{ أي: } \begin{cases} H_0: \mu_1 = \mu_2 \\ H_1: \mu_1 < \mu_2 \end{cases}$$

(ب) الخطوة الثانية: حساب إحصائية الاختبار المتمثلة في Z_{cal} حيث:

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

$$Z_{Cal} = \begin{cases} \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \text{ si } \left(\frac{n_1}{N_1} \text{ و } \frac{n_2}{N_2} \leq 0,05 \right) \\ \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} \left(\frac{N_1 - n_1}{N_1 - 1} \right) + \frac{\sigma_2^2}{n_2} \left(\frac{N_2 - n_2}{N_2 - 1} \right)}} \text{ si } \left(\frac{n_1}{N_1} \text{ و } \frac{n_2}{N_2} > 0,05 \right) \end{cases}$$

ت) الخطوة الثالثة: استخراج القيم الحرجة، قيم (Z_{tab}) من جدول التوزيع الطبيعي المعياري، بما أن الاختبار بجانبيين فإن: $P = (1 - \alpha)$ ، الجدول التالي يوضح بعض القيم الحرجة في التوزيع الطبيعي المعياري الشائعة الاستعمال الجانب من اليمين (القيمة الحرجة هنا تكون سالبة):

0,1	0,05	0,01	α
-1,28	-1,645	-2,33	$Z_{1-\alpha}$

ث) الخطوة الرابعة: القرار المتخذ

- إذا كانت: $Z_{Cal} \geq Z_{1-\alpha}$ نقبل H_0 ونرفض H_1 ، وبالتالي: $\mu = \mu_0$

- إذا كانت: $Z_{Cal} < Z_{1-\alpha}$ نرفض H_0 ونقبل H_1 ، وبالتالي: $\mu < \mu_0$

مثال 38: نفس المثال السابق، اختبر فرضية أن $\mu_1 < \mu_2$ عند مستوى معنوية 5%

الحل:

الخطوة الأولى: وضع العدم والفرضية البديلة كما يلي:

$$\begin{cases} H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0 \\ H_1: \mu_1 - \mu_2 < 0 \end{cases} \text{ أي: } \begin{cases} H_0: \mu_1 = \mu_2 \\ H_1: \mu_1 < \mu_2 \end{cases}$$

الخطوة الثانية: نفسها في المثال السابق

الخطوة الثالثة: استخراج القيم الحرجة، قيم (Z_{tab}) من جدول التوزيع الطبيعي المعياري

بما أن الاختبار بجانبيين فإن: $P = 1 - \alpha$ ، ومنه حسب الجدول أعلاه لما $(\alpha = 0,05)$ نجد

$$Z_{1-\alpha} = Z_{tab} = -Z_{0,95} = -1,645$$

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

الخطوة الرابعة: القرار المتخذ

بما أن: $Z_{cal} = 2,22 \geq -1,645$ فإننا نقبل H_0 ونرفض H_1 وبالتالي: $\mu_1 = \mu_2$

2.3. عندما يكون تباينا المجتمعين (σ_1^2) و (σ_2^2) مجهولين:1.2.3. حجم العينتين كبير $(n_1 \geq 30)$ و $(n_2 \geq 30)$:

نستخدم التوزيع الطبيعي بنفس المفهوم والخطوات السابقة، فقط في الخطوة الثانية من الاختبار نستبدل تباينا المجتمعين (σ_1^2) و (σ_2^2) بتباينا العينتين (S_1^2) و (S_2^2) كتقدير لهما لأنهما مجهولين ، فتصبح:

$$Z_{cal} = \begin{cases} \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \text{ si } \left(\frac{n_1}{N_1} \text{ و } \frac{n_2}{N_2} \leq 0,05 \right) \\ \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} \left(\frac{N_1 - n_1}{N_1 - 1} \right) + \frac{S_2^2}{n_2} \left(\frac{N_2 - n_2}{N_2 - 1} \right)}} \text{ si } \left(\frac{n_1}{N_1} \text{ و } \frac{n_2}{N_2} > 0,05 \right) \end{cases}$$

مثال 39:

يخضع عمر بطاريات السيارات في المصنع الأول للتوزيع الطبيعي، سحبت منه عينة 36 بطارية فكان متوسطها 3,7 سنة وانحرافها المعياري 0,5 سنة، وفي المصنع الثاني يتبع أيضا عمر نفس البطاريات للتوزيع الطبيعي، سحبت منه عينة 49 بطارية فكان متوسطها 3,2 سنة وتباينها 0,16 سنة، اختبر فرضية أن يزيد متوسط عمر البطاريات في المصنع الأول عنه في المصنع الثاني ب 0,3 سنة عند مستوى معنوية 10%

الحل:

الخطوة الأولى: وضع العدم والفرضية البديلة كما يلي:

$$\begin{cases} H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0,3 \\ H_1: \mu_1 - \mu_2 > 0,3 \end{cases}$$

الخطوة الثانية: حساب احصائية الاختبار

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

$$Z_{cal} = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} = \frac{(3,7 - 3,2) - 0,3}{\sqrt{\frac{0,25}{36} + \frac{0,16}{49}}} = 2$$

الخطوة الثالثة: استخراج القيم الحرجة، قيم (Z_{tab}) من جدول التوزيع الطبيعي المعياري

بما أن الاختبار جانبيين فإن: $P = 1 - \alpha$ ، ومنه حسب الجدول أعلاه لما $\alpha = 0,1$ نجد

$$Z_{1-\alpha} = Z_{tab} = Z_{0,9} = 1,28$$

الخطوة الرابعة: القرار المتخذ

بما أن: $Z_{cal} = 2 \geq 1,28$ فإننا نرفض H_0 ونقبل H_1 وبالتالي: $\mu_1 > \mu_2$
أي أن متوسط عمر البطاريات في المصنع الأول يزيد عنه في المصنع الثاني ب 0,3 سنة عند مستوى معنوية 10%

2.2.3. حجم العينتين صغير ($n_1 < 30$ و n_2) :

في هذه الحالة نستخدم توزيع ستيودنت ونستبدل تباينا المجتمعين (σ_1^2) و (σ_2^2) بتباينا العينتين (S_1^2) و (S_2^2) كتقدير لهما لأنهما مجهولين ، والاختبار يتم على حسب نوعه (تقريبا نفس منهجية الاختبار في حالة استخدام التوزيع الطبيعي)

أ.الحالة الأولى: تباينا المجتمعين مجهولين ومتساويين ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2$)

هنا نقدر التباينين بنفس المقدر، وهو عبارة عن الوسط المرجح لتباين العينتين، ويرمز له بالرمز: S_p^2 ، حيث:

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{(n_1 + n_2 - 2)}$$

و تكون درجة الحرية هنا $(v = n_1 + n_2 - 2)$ ، وتكون خطوات الاختبار كما يلي:

1. الاختبار من جانبيين ($H_1: (\neq)$): نقوم باختبار فرضية متوسط المجتمع وفقا للخطوات التالية:

الخطوة الأولى: وضع العدم والفرضية البديلة:

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

$$\begin{cases} H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0 \\ H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0 \end{cases} \text{ أي: } \begin{cases} H_0: \mu_1 = \mu_2 \\ H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases}$$

الخطوة الثانية: حساب إحصائية الاختبار المتمثلة في Z_{Cal} حيث:

$$T_{Cal} = \begin{cases} \frac{(\bar{X}_2 - \bar{X}_1) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_P \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \text{ si } \left(\frac{n_1}{N_1} \text{ و } \frac{n_2}{N_2} \leq 0,05 \right) \\ \frac{(\bar{X}_2 - \bar{X}_1) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_P \sqrt{\frac{1}{n_1} \left(\frac{N_1 - n_1}{N_1 - 1} \right) + \frac{1}{n_2} \left(\frac{N_2 - n_2}{N_2 - 1} \right)}} \text{ si } \left(\frac{n_1}{N_1} \text{ و } \frac{n_2}{N_2} > 0,05 \right) \end{cases}$$

الخطوة الثالثة: استخراج القيم الحرجة، قيم (T_{tab}) من جدول توزيع ستيودنت، بما أن الاختبار بجانبيين فإن: $P = 1 - \frac{\alpha}{2}$ ، درجة الحرية $(v = n_1 + n_2 - 2)$

الخطوة الرابعة: القرار المتخذ

- إذا كانت: $T_{Cal} \in \left[-T_{1-\frac{\alpha}{2}} ; T_{1-\frac{\alpha}{2}} \right]$ نقبل H_0 ونرفض H_1 ، وبالتالي:

$$\mu_1 - \mu_2 = 0$$

- إذا كانت: $T_{Cal} \notin \left[-T_{1-\frac{\alpha}{2}} ; T_{1-\frac{\alpha}{2}} \right]$ نرفض H_0 ونقبل H_1 ، وبالتالي:

$$\mu_1 - \mu_2 \neq 0$$

أ. 2. الاختبار أحادي الجانب من اليمين (العلوي) $(H_1: (>))$: نقوم باختبار الفرضية وفقاً للخطوات التالية:

الخطوة الأولى: وضع العدم والفرضية البديلة:

$$\begin{cases} H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0 \\ H_1: \mu_1 - \mu_2 > 0 \end{cases} \text{ أي: } \begin{cases} H_0: \mu_1 = \mu_2 \\ H_1: \mu_1 > \mu_2 \end{cases}$$

الخطوة الثانية: نفس العلاقة السابقة

الخطوة الثالثة: استخراج القيم الحرجة، قيم (T_{tab}) من جدول توزيع ستيودنت وتكون موجبة، بما أن الاختبار أحادي الجانب فإن: $P = 1 - \alpha$ ، درجة الحرية $(v = n_1 + n_2 - 2)$

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

الخطوة الرابعة: القرار المتخذ

- إذا كانت: $T_{cal} \geq T_{1-\alpha}$ نرفض H_0 ونقبل H_1 ، وبالتالي: $\mu_1 - \mu_2 > 0$

- إذا كانت: $T_{cal} < T_{1-\alpha}$ نرفض H_0 ونقبل H_1 ، وبالتالي: $\mu_1 - \mu_2 = 0$

أ.3 الاختبار أحادي الجانب من اليسار (السفلي) ($H_1: (<)$): نقوم باختبار الفرضية وفقا للخطوات التالية:

الخطوة الأولى: وضع العدم والفرضية البديلة:

$$\begin{cases} H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0 \\ H_1: \mu_1 - \mu_2 < 0 \end{cases} \text{ أي: } \begin{cases} H_0: \mu_1 = \mu_2 \\ H_1: \mu_1 < \mu_2 \end{cases}$$

الخطوة الثانية: نفس العلاقة السابقة

الخطوة الثالثة: استخراج القيم الحرجة، قيم (T_{tab}) من جدول توزيع ستيودنت وتكون سالبة، بما أن الاختبار أحادي الجانب فإن: $P = 1 - \alpha$ ، درجة الحرية ($v = n_1 + n_2 - 2$)

الخطوة الرابعة: القرار المتخذ

- إذا كانت: $T_{cal} \geq T_{1-\alpha}$ نقبل H_0 ونرفض H_1 ، وبالتالي: $\mu_1 - \mu_2 = 0$

- إذا كانت: $T_{cal} < T_{1-\alpha}$ نرفض H_0 ونقبل H_1 ، وبالتالي: $\mu < \mu_0$

مثال 40: لدينا مجتمع أول يخضع للتوزيع الطبيعي، سحبت منه عينة حجمها 25 فكان متوسطها 25 وانحرافها المعياري 3، ومجتمع ثان يخضع هو الآخر للتوزيع الطبيعي بمتوسط 20 ، سحبت منه عينة حجمها 17 فكان متوسطها 20 وتباينها 16، مع العلم أن العينتين مستقلتين وتباينا المجتمعين متساويين، اختبر فرضية أن يقل متوسط المجتمع الأول عنه في المجتمع الثاني ب 2,5 عند مستوى معنوية 5%

الحل:

الخطوة الأولى: وضع العدم والفرضية البديلة كما يلي:

$$\begin{cases} H_0: \mu_1 - \mu_2 = 2,5 \\ H_1: \mu_1 - \mu_2 < 2,5 \end{cases}$$

الخطوة الثانية: حساب احصائية الاختبار

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

$$T_{Cal} = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_P \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = \frac{(25 - 20) - 2,5}{3,44 \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{1}{17}}} = 2,27$$

$$S_P^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{(n_1 + n_2 - 2)} = \frac{(25 - 1)3^2 + (17 - 1)16}{(25 + 17 - 2)} = 11,8$$

$$\Rightarrow S_P = \sqrt{11,8} = 3,4$$

الخطوة الثالثة: استخراج القيمة الحرجة، قيم (T_{tab}) من جدول ستيودنت

بما أن الاختبار جانبيين فإن: $P = 1 - \alpha$ ، لما $(\alpha = 0,05)$ ودرجة الحرية هي:

$$(v = n_1 + n_2 - 2 = 25 - 17 - 2 = 40)$$

$$T_{1-\alpha} = T_{tab} = -T_{0,95} = -T_{(0,95; 40)} = -1,684$$

الخطوة الرابعة: القرار المتخذ

بما أن: $T_{Cal} = 2,27 \geq -1,684$ فإننا نقبل H_0 ونرفض H_1 وبالتالي:

$$\mu_1 - \mu_2 = 2,5$$

ب. الحالة الثانية: تباين المجتمعين مجهولين وغير متساويين $(\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2)$

اختبار الغرضية يتم بنفس خطوات الحالة الأولى أي $(\sigma_1^2 = \sigma_2^2)$ ، فقط نغير الخطوة الثانية فتصبح:

$$T_{Cal} = \begin{cases} \frac{(\bar{X}_2 - \bar{X}_1) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} & \text{si } \left(\frac{n_1}{N_1} \text{ و } \frac{n_2}{N_2} \leq 0,05 \right) \\ \frac{(\bar{X}_2 - \bar{X}_1) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} \left(\frac{N_1 - n_1}{N_1 - 1} \right) + \frac{S_2^2}{n_2} \left(\frac{N_2 - n_2}{N_2 - 1} \right)}} & \text{si } \left(\frac{n_1}{N_1} \text{ و } \frac{n_2}{N_2} > 0,05 \right) \end{cases}$$

وتكون درجة الحرية لتوزيع ستيودنت في هذه الحالة:

$$v = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2} \right)^2}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} \right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2} \right)^2}{n_2 - 1}}$$

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

مثال 41: نفس المثال السابق، غير أن $(\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2)$

الخطوة الأولى: وضع العدم والفرضية البديلة كما يلي:

$$\begin{cases} H_0: \mu_1 - \mu_2 = 2,5 \\ H_1: \mu_1 - \mu_2 < 2,5 \end{cases}$$

الخطوة الثانية: حساب احصائية الاختبار

$$T_{cal} = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} = \frac{(25 - 20) - 2,5}{\sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{17}}} = 2,19$$

الخطوة الثالثة: استخراج القيمة الحرجة، قيم (T_{tab}) من جدول ستيودنت

بما أن الاختبار جانبيين فإن: $P = 1 - \alpha$ ، لما $(\alpha = 0,05)$ ودرجة الحرية هي:

$$v = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1-1} + \frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2-1}} = \frac{\left(\frac{9}{25} + \frac{16}{17}\right)^2}{\frac{\left(\frac{9}{25}\right)^2}{25-1} + \frac{\left(\frac{16}{17}\right)^2}{17-1}} = 16,9 = 17$$

$$T_{1-\alpha} = T_{tab} = -T_{0,95} = -T_{(0,95; 17)} = -1,74$$

الخطوة الرابعة: القرار المتخذ

بما أن: $T_{cal} = 2,19 \geq -1,74$ فإننا نقبل H_0 ونرفض H_1 وبالتالي: $\mu_1 - \mu_2 = 2,5$

4. اختبار الفرضية للفرق بين متوسطي مجتمعين مرتبطتين $(\mu_1 - \mu_2)$:

لدينا مجتمع أول يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط μ_1 وتباين σ_1^2 ، وهو مرتبط مع مجتمع ثان يخضع هو الآخر للتوزيع الطبيعي بمتوسط μ_2 وتباين σ_2^2 ، نسحب عينة من المجتمع الأول حجمها n_1 قيمها $\{X_{11}, X_{12}, X_{13}, \dots, X_{1i}\}$ ، ونسحب عينة من المجتمع الثاني حجمها n_2 ، (حيث: $n_1 = n_2 = n$ أي أن حجم العينتين يجب أن يكونا متساويين) قيمها: $\{X_{21}, X_{22}, X_{23}, \dots, X_{2i}\}$ ، حيث أن: X_{2i} و X_{1i} قيم متناظرة (متقابلة) في العينتين المرتبطتين، وأن: $i = 1, 2, 3, 4, \dots, n$

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

إن الفرق: $d_i = X_{1i} - X_{2i}$ يعطينا سلسلة أخرى $\{d_1, d_2, d_3, \dots, d_i\}$ التي تشكل عينة عشوائية متوسطة: $\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^n d_i}{n}$ وتباينها: $S_d^2 = \frac{\sum_{i=1}^n ((d_i - \bar{d})^2)}{n-1}$ ، المسحوبة من هذا المجتمع الذي وسطه: $\mu_d = \mu_1 - \mu_2$ وتباينه: σ_d^2 مجهول

إن اختبار فرضية الفرق بين متوسطي المجتمعين المرتبطين تتبع نفس خطوات اختبار فرضية متوسط مجتمع واحد باستخدام التوزيع الطبيعي إذا كان حجم العينة $n \geq 30$ و توزيع ستيودنت بدرجة حرية $(v = n - 1)$: فقط مكان (μ) نضع (μ_d) ومكان $(S \text{ أو } \sigma)$ نضع (μ_d)

مثال 42: إذا كانت كمية السكر في الدم لمرضى السكري المعروفون بارتفاع كمية السكر في دمهم في أحد المستشفيات تخضع للتوزيع الطبيعي، أخذنا عينة عشوائية حجمها 6 مرضى من هؤلاء المرضى، فكانت كمية السكر في الدم لديهم (غ/ل) قبل تلقي الدواء المعين لتخفيض السكر X_{1i} وبعد التلقي X_{2i} موضحة في الجدول التالي:

1,79	1,94	1,88	1,67	1,49	1,54	X_{1i}
1,42	1,65	1,41	1,22	1,1	1,49	X_{2i}

اختبر مدى انخفاض مستوى السكر في الدم للمرضى في هذا المستشفى بعد تلقي الدواء عند مستوى معنوية 5%

الحل:

0,0009	0,0025	0,0169	0,0121	0,0025	0,0841	$(d_i - \bar{d})^2$
0,03	-0,05	0,13	0,11	0,05	-0,29	$(d_i - \bar{d})$
0,37	0,29	0,47	0,45	0,39	0,05	$ d_i = X_{1i} - X_{2i} $
1,79	1,94	1,88	1,67	1,49	1,54	X_{1i}
1,42	1,65	1,41	1,22	1,1	1,49	X_{2i}

هذا الفرق سيخضع لتوزيع ستيودنت، بدرجة حرية: $v = n - 1 = 6 - 1 = 5$ ، ومتوسط:

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^n d_i}{n} = \frac{0,05+0,39+\dots+0,37}{6} = \frac{2,02}{6} = 0,34$$

$$S_d^2 = \frac{\sum_{i=1}^n ((d_i - \bar{d})^2)}{n-1} = \frac{0,4756}{6} = 0,08 \text{ أما تباين العينة هو:}$$

$$\Rightarrow S_d = \sqrt{0,08} = 0,28$$

وعليه نختبر الفرضية بالخطوات التالية:

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

الخطوة الأولى: وضع العدم والفرضية البديلة كما يلي:

$$\begin{cases} H_0: \mu_d = \mu_1 - \mu_2 = 0 \\ H_1: \mu_d = \mu_1 - \mu_2 < 0 \end{cases}$$

الخطوة الثانية: حساب إحصائية T_{Cal} (نستعمل توزيع ستيودنت لعدم وجود تباين المجتمع و $(n = 6 < 30)$) حيث:

$$T_{Cal} = \frac{\bar{d} - \mu_d}{\frac{s_d}{\sqrt{n}}} = \frac{0,34 - 0}{\frac{0,28}{\sqrt{6}}} = 3,09 \quad \text{السحب بالإرجاع لعدم وجود } N \text{ ومنه:}$$

الخطوة الثالثة: استخراج القيم الحرجة، قيم (T_{tab}) من جدول ستيودنت

بما أن الاختبار أحادي الجانب فإن: $P = 1 - \alpha$ ، $v = 6 - 1 = 5$

$$T_{(1-\alpha;v)} = T_{tab} = T_{(P;v)} = -T_{(0,95;5)} = -2,015 \quad \text{نجد: } (\alpha = 0,05)$$

الخطوة الرابعة: القرار المتخذ

بما أن: $T_{Cal} = 3,09 \geq -2,015$ فإننا نقبل H_0 ونرفض H_1 ، وبالتالي:

$\mu_d = \mu_1 - \mu_2 = 0$ أي لا ينخفض مستوى السكر في الدم للمرضى في هذا المستشفى بعد تلقي الدواء عند مستوى معنوية 5%

5. اختبار فرضية نسبة مجتمع (P):

يتكون المجتمع محل الدراسة هنا من جزء تكون الخاصية أو الظاهرة المدروسة محققة والجزء الآخر غير محققة، أي ، فيكون احتمال تحقق الظاهرة (P) ويسمى احتمال النجاح، واحتمال عدم تحقق الظاهرة $(q = 1 - P)$ ويسمى احتمال الفشل، ونظرا لتكرار نفس التجربة n مرة (وهو حجم العينة المسحوبة)، فيكون بذلك توزيع المجتمع هو توزيع ذي الحدين ، واحتمال النجاح (P) هو نسبة المجتمع، الذي يحسب بالعلاقة التالية:

حيث: X يمثل عدد العناصر (الأفراد) التي تتحقق فيها الظاهرة المدروسة في المجتمع، N عدد العناصر الكلي في المجتمع أو ما يعرف بحجم المجتمع.

نلجأ للاستدلال على نسبة المجتمع (P) باستخدام نسبة الخاصية المدروسة في العينة العشوائية المسحوبة من هذا المجتمع، التي نرمز لها بالرمز $\hat{p}$ حيث:

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

حيث: X يمثل عدد العناصر (الأفراد) التي تتحقق فيها الظاهرة المدروسة في العينة، n عدد العناصر الكلي في العينة أو ما يعرف بحجم العينة المسحوبة عشوائية من المجتمع محل الدراسة.

إذا كان حجم العينة n كبير أي: ($n \geq 30$) ويكون أيضا ($np \geq 5$ و $nq \geq 5$) فإن توزيع المعاينة تتبع التوزيع الطبيعي Z ، وعليه نستخدم إحصائية هذا التوزيع في اختبار فرضية نسبة المجتمع الإحصائي، وذلك بحسب نوع الاختبار:

1.5. الاختبار من جانبيين ($H_1: \neq$): نقوم باختبار فرضية نسبة المجتمع وفقا للخطوات التالية:

(أ) **الخطوة الأولى:** وضع العدم والفرضية البديلة: (نضع $\neq$ في H_1) وذلك كما يلي:

$$\begin{cases} H_0: P = P_0 \\ H_1: P \neq P_0 \end{cases}$$

(ب) **الخطوة الثانية:** حساب إحصائية الاختبار المتمثلة في Z_{Cal} حيث:

$$Z_{Cal} = \frac{\hat{P} - P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}} \quad : \left(\frac{n}{N} \leq 0,05 \right) \text{ - إذا كان السحب بالإرجاع}$$

$$Z_{Cal} = \frac{\hat{P} - P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}} \quad : \left(\frac{n}{N} > 0,05 \right) \text{ - إذا كان السحب بدون إرجاع}$$

(ت) **الخطوة الثالثة:** استخراج القيم الحرجة، قيم (Z_{tab}) من جدول التوزيع الطبيعي المعياري، بما أن الاختبار بجانبيين فإن: $P = 1 - \frac{\alpha}{2}$ الجدول التالي يوضح بعض القيم الحرجة في التوزيع الطبيعي المعياري الشائعة الاستعمال:

0,1	0,05	0,01	10
1,645	1,96	2,575	$Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

(ث) **الخطوة الرابعة:** القرار المتخذ

- إذا كانت: $Z_{Cal} \in \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} ; Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right]$ نقبل H_0 ونرفض H_1 ، وبالتالي: $P = P_0$

- إذا كانت: $Z_{Cal} \notin \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} ; Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right]$ نرفض H_0 ونقبل H_1 ، وبالتالي: $P \neq P_0$

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

2.5. الاختبار أحادي الجانب من اليمين (العلوي) ($H_1: >$): نقوم باختبار فرضية نسبة المجتمع وفقا للخطوات التالية:

أ) الخطوة الأولى: وضع العدم والفرضية البديلة (نضع $>$ في H_1) وتكون الفرضية كما يلي:

$$\begin{cases} H_0: P = P_0 \\ H_1: P > P_0 \end{cases}$$

ب) الخطوة الثانية: حساب إحصائية الاختبار المتمثلة في Z_{cal} حيث:

$$Z_{cal} = \frac{\bar{P} - P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}} \quad : \left(\frac{n}{N} \leq 0,05 \right) \text{ - إذا كان السحب بالإرجاع}$$

$$Z_{cal} = \frac{\bar{P} - P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}} \quad : \left(\frac{n}{N} > 0,05 \right) \text{ - إذا كان السحب بدون إرجاع}$$

ت) الخطوة الثالثة: استخراج القيمة الحرجة، قيمة (Z_{tab}) من جدول التوزيع الطبيعي المعياري، بما أن الاختبار أحادي الجانب فإن: $P = 1 - \alpha$ ، وجدول بعض القيم الحرجة في التوزيع الطبيعي المعياري الشائعة الاستعمال لما يكون الاختبار أحادي الجانب من اليمين (القيمة الحرجة هنا تكون موجبة):

0,1	0,05	0,01	α
1,28	1,645	2,33	$Z_{1-\alpha}$

ث) الخطوة الرابعة: القرار المتخذ

- إذا كانت: $Z_{cal} \geq Z_{1-\alpha}$ نرفض H_0 ونقبل H_1 ، وبالتالي: $P > P_0$

- إذا كانت: $Z_{cal} < Z_{1-\alpha}$ نقبل H_0 ونرفض H_1 ، وبالتالي: $P = P_0$

3.5. الاختبار أحادي الجانب من اليسار (السفلي) ($H_1: <$): نقوم باختبار فرضية نسبة المجتمع وفقا للخطوات التالية:

أ) الخطوة الأولى: وضع العدم والفرضية البديلة (نضع $<$ في H_1) وتكون الفرضية كما يلي:

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

$$\begin{cases} H_0: P = P_0 \\ H_1: P < P_0 \end{cases}$$

(ب) الخطوة الثانية: حساب إحصائية الاختبار المتمثلة في Z_{Cal} حيث:

- إذا كان السحب بالإرجاع $\left(\frac{n}{N} \leq 0,05\right)$:

$$Z_{Cal} = \frac{\hat{P} - P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}}$$

- إذا كان السحب بدون إرجاع $\left(\frac{n}{N} > 0,05\right)$:

$$Z_{Cal} = \frac{\hat{P} - P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}}$$

(ت) الخطوة الثالثة: استخراج القيمة الحرجة، قيمة (Z_{tab}) من جدول التوزيع الطبيعي المعياري، بما أن الاختبار أحادي الجانب فإن: $P = 1 - \alpha$ الجدول التالي يوضح بعض القيم الحرجة في التوزيع الطبيعي المعياري الشائعة الاستعمال لما يكون الاختبار أحادي الجانب من اليسار (تكون القيمة الحرجة هنا سالبة):

0,1	0,05	0,01	α
-1,28	-1,645	-2,33	$Z_{1-\alpha}$

(ث) الخطوة الرابعة: القرار المتخذ

- إذا كانت: $Z_{Cal} \geq Z_{1-\alpha}$ نقبل H_0 ونرفض H_1 ، وبالتالي: $P = P_0$

- إذا كانت: $Z_{Cal} < Z_{1-\alpha}$ نرفض H_0 ونقبل H_1 ، وبالتالي: $P < P_0$

مثال 43: في تقرير ما ذكر أن 20% فقط من خريجي الجامعات يجدون عملا في مجال تخصصهم الرئيسي،

سحبت عينة عشوائية حجمها 200 خريج فوجد من بينهم 50 فقط يعملون في مجال تخصصهم، هل تدل نتائج العينة على أن النسبة التي ذكرت في التقرير كانت تختلف عن الواقع عند مستوى المعنوية 5% ؟

الحل:

الخطوة الأولى: وضع العدم والفرضية البديلة كما يلي:

$$\begin{cases} H_0: P = 0,2 \\ H_1: P \neq 0,2 \end{cases}$$

الخطوة الثانية: حساب إحصائية Z_{Cal} ، حيث: $\hat{P} = \frac{50}{200} = 0,25$

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

$$Z_{cal} = \frac{\bar{P} - P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}} =$$

$$\frac{0,25-0,2}{\sqrt{\frac{0,2(1-0,2)}{200}}} = 1,67$$

الخطوة الثالثة: استخراج القيم الحرجة، قيم (Z_{tab}) من جدول التوزيع الطبيعي المعياري

بما أن الاختبار جانبيين فإن: $P = 1 - \frac{\alpha}{2}$ ، ومنه لما ($\alpha = 0,05$) نجد
 $Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{tab} = Z_{0,975} = 1,96$

الخطوة الرابعة: القرار المتخذ

بما أن: $Z_{cal} = 1,67 \in [-1,96 ; 1,96]$ ، فإننا نقبل H_0 ونرفض H_1

وبالتالي: $P = 0,2$ ، ومنه تدل نتائج العينة على أن النسبة التي ذكرت في التقرير لا تختلف عن الواقع عند مستوى المعنوية 5%

6. اختبار فرضية الفرق بين نسبتي مجتمعين مستقلين ($P_1 - P_2$) :

لدينا مجتمع أول توزيعه ذي الحدين، حجمه N_1 ، هو محل دراسة ظاهرة معينة، احتمال تحقق الظاهرة فيه (P_1) واحتمال عدم تحقق الظاهرة ($q_1 = 1 - P_1$) ، ولدينا من جهة أخرى مجتمع ثان توزيعه ذي الحدين أيضا، حجمه N_2 ، هو محل دراسة نفس ظاهرة المجتمع الأول، احتمال تحقق الظاهرة فيه (P_2) واحتمال عدم تحقق الظاهرة ($q_2 = 1 - P_2$) ، وعند عدم توفر بيانات كل العناصر في المجتمعين محل الدراسة اتجاه الظاهرة المعنية، نلجأ للاستدلال عليها باستخدام نسبة الخاصية المدروسة في العينتين العشوائيتين المسحوبتين من كل مجتمع، التي نرمز لها بالرمز $\hat{P}_1$ لنسبة العينة الأولى المسحوبة من المجتمع الأول، والتي حجمها كبير ($n_1 \geq 30$) ، و $\hat{P}_2$ لنسبة العينة الثانية المسحوبة من المجتمع الثاني، والتي حجمها كبير أيضا ($n_2 \geq 30$) ، فيكون اختبار فرضية الفرق بين النسبتين في المجتمعين باستخدام الإحصائية ($\hat{P}_1 - \hat{P}_2$) ، وذلك كما يلي:

1.6. الاختبار من جانبيين ($H_1: (\neq)$): نقوم باختبار فرضية الفرق بين نسبتي المجتمعين كما يلي:

(أ) الخطوة الأولى: وضع العدم والفرضية البديلة: (نضع $\neq$ في H_1) وذلك كما يلي:

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

$$\begin{cases} H_0: P_1 - P_2 = 0 \\ H_1: P_1 - P_2 \neq 0 \end{cases} \text{ أي: } \begin{cases} H_0: P_1 = P_2 \\ H_1: P_1 \neq P_2 \end{cases}$$

(ب) الخطوة الثانية: حساب إحصائية الاختبار المتمثلة في Z_{Cal} حيث:

$$\hat{P} = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2} = \frac{\hat{P}_1 n_1 + \hat{P}_2 n_2}{n_1 + n_2} \text{ حيث: } Z_{Cal} = \frac{(\hat{P}_1 - \hat{P}_2) - (P_1 - P_2)}{\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n_1} + \frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n_2}}}$$

(ت) الخطوة الثالثة: استخراج القيم الحرجة، قيم (Z_{tab}) ، بما أن الاختبار بجانبيين فإن: $P = 1 - \frac{\alpha}{2}$ ونستعمل القيم الحرجة للتوزيع الطبيعي المعياري الشائعة الاستعمال السالفة الذك

(ث) الخطوة الرابعة: القرار المتخذ

- إذا كانت: $Z_{Cal} \in \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} ; Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right]$ نقبل H_0 ونرفض H_1 ، وبالتالي:

$$P_1 - P_2 = 0$$

- إذا كانت: $Z_{Cal} \notin \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} ; Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right]$ نرفض H_0 ونقبل H_1 ، وبالتالي:

$$P_1 - P_2 \neq 0$$

2.6. الاختبار أحادي الجانب من اليمين (العلوي) ($H_1: (>)$): نقوم باختبار فرضية نسبة المجتمع وفقا للخطوات التالية:

(أ) الخطوة الأولى: وضع العدم والفرضية البديلة (نضع $>$ في H_1) وتكون الفرضية كما يلي:

$$\begin{cases} H_0: P_1 - P_2 = 0 \\ H_1: P_1 - P_2 > 0 \end{cases} \text{ أي: } \begin{cases} H_0: P_1 = P_2 \\ H_1: P_1 > P_2 \end{cases}$$

(ب) الخطوة الثانية: نفس الخطوة السابقة

(ت) الخطوة الثالثة: استخراج القيمة الحرجة، قيمة (Z_{tab}) من جدول التوزيع الطبيعي المعياري، بما أن الاختبار أحادي الجانب من اليمين فإن: $P = 1 - \alpha$ (القيمة الحرجة هنا تكون موجبة)

(ث) الخطوة الرابعة: القرار المتخذ

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

- إذا كانت: $Z_{cal} \geq Z_{1-\alpha}$ نرفض H_0 ونقبل H_1 ، وبالتالي: $P_1 - P_2 > 0$

- إذا كانت: $Z_{cal} < Z_{1-\alpha}$ نقبل H_0 ونرفض H_1 ، وبالتالي: $P_1 - P_2 = 0$

3.6. الاختبار أحادي الجانب من اليسار (السفلي) ($H_1: (<)$): نقوم باختبار فرضية نسبة المجتمع وفقا للخطوات التالية:

أ) الخطوة الأولى: وضع العدم والفرضية البديلة (نضع $<$ في H_1) وتكون الفرضية كما يلي:

$$\begin{cases} H_0: P_1 - P_2 = 0 \\ H_1: P_1 - P_2 < 0 \end{cases} \text{ أي: } \begin{cases} H_0: P_1 = P_2 \\ H_1: P_1 < P_2 \end{cases}$$

ب) الخطوة الثانية: نفس الخطوة السابقة

ت) الخطوة الثالثة: نفس الخطوة السابقة إلا أن الاختبار أحادي الجانب من اليسار (تكون القيمة الحرجة هنا سالبة)

ث) الخطوة الرابعة: القرار المتخذ

- إذا كانت: $Z_{cal} \geq Z_{1-\alpha}$ نقبل H_0 ونرفض H_1 ، وبالتالي: $P_1 - P_2 = 0$

- إذا كانت: $Z_{cal} < Z_{1-\alpha}$ نرفض H_0 ونقبل H_1 ، وبالتالي: $P_1 - P_2 < 0$

مثال 44: ينتج أحد المصانع سلعة معينة من خلال التين إنتاجيتين، اختيرت عينة عشوائية من 120 وحدة من إنتاج الآلة الأولى، فوجد بها 18 وحدة تالفة، ومن إنتاج الآلة الثانية اختيرت 100 وحدة، وجد بها 10 وحدات تالفة، اختبر الفرضية القائلة بأن الفرق بين نسبة الإنتاج التالف في الآلة الأولى و نسبة الإنتاج التالف في الآلة الثانية على الأقل 6% عند مستوى معنوية 5%

الحل:

نحن أمام اختبار أحادي الجانب من اليسار، حيث:

$$\hat{P}_1 = \frac{x_1}{n_1} = \frac{18}{120} = 0,15$$

$$\hat{P}_2 = \frac{x_2}{n_2} = \frac{10}{100} = 0,1$$

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

$$\hat{p} = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2} = \frac{18 + 10}{120 + 100} = 0,13$$

الخطوة الأولى: وضع العدم والفرضية البديلة (نضع $<$ في H_1) وتكون الفرضية كما يلي:

$$\begin{cases} H_0: P_1 - P_2 = 0,06 \\ H_1: P_1 - P_2 < 0,06 \end{cases}$$

الخطوة الثانية: حساب إحصائية الاختبار

$$Z_{Cal} = \frac{(\hat{P}_1 - \hat{P}_2) - (P_1 - P_2)}{\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n_1} + \frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n_2}}} = \frac{(0,15 - 0,1) - 0,06}{\sqrt{\frac{0,13(1-0,13)}{120} + \frac{0,13(1-0,13)}{100}}} = -0,25$$

الخطوة الثالثة: بما أن الاختبار بجانب واحد من اليسار فإن: $P = 1 - \alpha$ ، ومنه لما

$$Z_{1-\alpha} = Z_{tab} = -Z_{0,95} = -1,645 \quad (\alpha = 0,05)$$

الخطوة الرابعة: القرار المتخذ

نلاحظ أن: $Z_{Cal} = -0,25 \geq -1,645$ نقبل H_0 ونرفض H_1 ، وبالتالي: $P_1 - P_2 = 0,06$

7. اختبار فرضية تباين المجتمع (σ^2):

نستخدم في اختبار الفرضية لتباين المجتمع العينة المسحوبة منه في الظاهرة المدروسة، فإذا اخترنا عينة عشوائية حجمها n من مجتمع يخضع للتوزيع الطبيعي تباينها S^2 ويكون توزيع مربع كاي (χ^2) بدرجة حرية ($v = n - 1$) هو التوزيع المستعمل في هذا الاختبار، وذلك كما يلي:

1.7. الاختبار من جانبيين ($H_1: (\neq)$): نقوم باختبار فرضية تباين المجتمع وفقا للخطوات التالية:

أ) الخطوة الأولى: وضع العدم والفرضية البديلة: (نضع $\neq$ في H_1) وذلك كما يلي:

$$\begin{cases} H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \end{cases}$$

ب) الخطوة الثانية: حساب إحصائية الاختبار المتمثلة في مربع كاي (χ_{Cal}^2) حيث:

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

$$\chi_{cal}^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$$

ت) الخطوة الثالثة: استخراج القيم الحرجة، قيم (χ_{tab}^2) من جدول مربع كاي الموجود في الملاحق، بما أن الاختبار بجانبيين فإن: $P = 1 - \frac{\alpha}{2}$ ودرجة حرية $(v = n - 1)$

ث) الخطوة الرابعة: القرار المتخذ

- إذا كانت: $\chi_{cal}^2 \in \left[\left(\frac{\alpha}{2}; n-1 \right) ; \chi_{\left(1-\frac{\alpha}{2}; n-1 \right)}^2 \right]$ نقبل H_0 ونرفض H_1 ، وبالتالي: $\sigma^2 = \sigma_0^2$

- إذا كانت: $\chi_{cal}^2 \notin \left[\left(\frac{\alpha}{2}; n-1 \right) ; \chi_{\left(1-\frac{\alpha}{2}; n-1 \right)}^2 \right]$ نرفض H_0 ونقبل H_1 ، وبالتالي: $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$

2.7. الاختبار أحادي الجانب من اليمين (العلوي) $(H_1: >)$: نقوم باتباع الخطوات التالية :

أ) الخطوة الأولى: وضع العدم والفرضية البديلة (نضع $>$ في H_1) وتكون الفرضية كما يلي:

$$\begin{cases} H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2 \end{cases}$$

ب) الخطوة الثانية: حساب إحصائية الاختبار المتمثلة في χ_{cal}^2 بالعلاقة السابقة

ت) الخطوة الثالثة: استخراج القيم الحرجة، قيم (χ_{tab}^2) من جدول مربع كاي الموجود، بما أن الاختبار بجانب واحد من اليمين فإن: $P = 1 - \alpha$ ، ودرجة حرية $(v = n - 1)$

ث) الخطوة الرابعة: القرار المتخذ

- إذا كانت: $\chi_{cal}^2 \geq \chi_{(1-\alpha; n-1)}^2$ ، نرفض H_0 ونقبل H_1 ، وبالتالي: $\sigma^2 > \sigma_0^2$

- إذا كانت: $\chi_{cal}^2 < \chi_{(1-\alpha; n-1)}^2$ ، نقبل H_0 ونرفض H_1 ، وبالتالي: $\sigma^2 = \sigma_0^2$

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

3.7. الاختبار أحادي الجانب من اليسار (السفلي) ($H_1: <$): نقوم باتتباع الخطوات التالية :

(أ) الخطوة الأولى: وضع العدم والفرضية البديلة (نضع $<$ في H_1) وتكون الفرضية كما يلي:

$$\begin{cases} H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2 \end{cases}$$

(ب) الخطوة الثانية: حساب إحصائية الاختبار المتمثلة في χ_{Cal}^2 بالعلاقة السابقة

(ت) الخطوة الثالثة: استخراج القيم الحرجة، قيم (χ_{tab}^2) من جدول مربع كاي الموجود ، بما أن الاختبار بجانب واحد من اليسار فإن: $P = \alpha$ ، ودرجة حرية $(v = n - 1)$

(ث) الخطوة الرابعة: القرار المتخذ

- إذا كانت: $\chi_{Cal}^2 \geq \chi_{(n-1)}^2$ ، نقبل H_0 ونرفض H_1 ، وبالتالي: $\sigma^2 = \sigma_0^2$

- إذا كانت: $\chi_{Cal}^2 < \chi_{(n-1)}^2$ ، نرفض H_0 ونقبل H_1 ، وبالتالي: $\sigma^2 < \sigma_0^2$

مثال 45: معمل لإنتاج الأنابيب البلاستيكية يسوق انتاجه من هذه الأنابيب عندما يكون الانحراف المعياري في سمك جدار الأنبوب بحدود القيمة 0,003 ، قام مفتش الانتاج لهذا المعمل بسحب عينة عشوائية ليوم معين حجمها 15 أنبوب، ف لوحظ أن الانحراف المعياري في سمك جدار الأنبوب فيها 0,004 ، هل سيسمح مفتش الإنتاج لهذا المعمل بتسويق أنابيب ذلك اليوم، عند مستوى معنوية 10% ؟

الحل:

الاختبار بجانبين يتم بالخطوات التالية:

الخطوة الأولى: وضع العدم والفرضية البديلة: (نضع $\neq$ في H_1) وذلك كما يلي:

$$\begin{cases} H_0: \sigma^2 = (0,003)^2 \\ H_1: \sigma^2 \neq (0,003)^2 \end{cases}$$

الخطوة الثانية: حساب إحصائية مربع كاي (χ_{Cal}^2) حيث:

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

$$\chi_{Cal}^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{(15-1)(0,002)^2}{(0,003)^2} = 6,16$$

الخطوة الثالثة: استخراج القيم الحرجة، قيم (χ_{tab}^2) من جدول مربع كاي الموجود في الملاحق، بما أن الاختبار جانبيين و $(\alpha = 0,1)$ فإن: $\frac{\alpha}{2} = 0,05$ و $P = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,95$ ودرجة حرية $(v = 15 - 1 = 14)$ ومنه حسب جدول مربع كاي نجد :

$$\chi_{(0,05; 14)}^2 = 6,57 \text{ و } \chi_{(0,95; 14)}^2 = 23,7$$

الخطوة الرابعة: القرار المتخذ

نلاحظ أن: $\chi_{Cal}^2 = 6,16 \notin [6,57 ; 23,7]$ نرفض H_0 ونقبل H_1 ، وبالتالي:

$$\sigma^2 \neq (0,003)^2$$

مثال 46: نفس المثال السابق بحدود القيمة على الأكثر 0,003

الحل:

الاختبار جانبي واحد من اليمين يتم بالخطوات التالية:

الخطوة الأولى: وضع العدم والفرضية البديلة: (نضع $>$ في H_1) وذلك كما يلي:

$$\begin{cases} H_0: \sigma^2 = (0,003)^2 \\ H_1: \sigma^2 > (0,003)^2 \end{cases}$$

الخطوة الثانية: لا تتغير

$$\chi_{Cal}^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{(15-1)(0,002)^2}{(0,003)^2} = 6,16$$

الخطوة الثالثة: استخراج القيمة الحرجة، قيمة (χ_{tab}^2) ، بما أن الاختبار جانبي واحد من اليمين و $(\alpha = 0,1)$ فإن: $P = 1 - \alpha = 1 - 0,1 = 0,9$ ودرجة حرية $(v = 15 - 1 = 14)$ ومنه حسب جدول مربع كاي نجد : $\chi_{(0,9; 14)}^2 = 21,1$

الخطوة الرابعة: القرار المتخذ

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

نلاحظ أن: $\chi^2_{cal} = 6,16 < 21,1$ نقبل H_0 ونرفض H_1 ، وبالتالي:
 $\sigma^2 = (0,003)^2$

مثال 47: نفس المثال السابق بحدود القيمة على الأقل 0,003

الحل:

الاختبار بجانب واحد من اليسار يتم بالخطوات التالية:

الخطوة الأولى: وضع العدم والفرضية البديلة: (نضع $<$ في H_1) وذلك كما يلي:

$$\begin{cases} H_0: \sigma^2 = (0,003)^2 \\ H_1: \sigma^2 < (0,003)^2 \end{cases}$$

الخطوة الثانية: لا تتغير

$$\chi^2_{cal} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{(15-1)(0,002)^2}{(0,003)^2} = 6,16$$

الخطوة الثالثة: استخراج القيمة الحرجة، قيمة (χ^2_{tab}) ، بما أن الاختبار بجانب واحد من اليمين و $(\alpha = 0,1)$ فإن: $P = \alpha = 0,1$ ودرجة حرية $(v = 15 - 1 = 14)$ ومنه حسب جدول مربع كاي نجد : $\chi^2_{(0,1; 14)} = 7,79$

الخطوة الرابعة: القرار المتخذ

نلاحظ أن: $\chi^2_{cal} = 6,16 < 7,79$ نرفض H_0 ونقبل H_1 ، وبالتالي:
 $\sigma^2 < (0,003)^2$

8. اختبار فرضية النسبة بين تبايني مجتمعين مستقلين $\left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\right)$:

لدينا مجتمع أول يخضع للتوزيع الطبيعي وتباينه σ_1^2 مجهول، نسحب منه عينة عشوائية حجمها n_1 وتباينها S_1^2 ، ولدينا أيضا من جهة أخرى مجتمع ثان يخضع للتوزيع الطبيعي، تباينه σ_2^2 مجهول، نسحب منه عينة عشوائية حجمها n_2 وتباينها S_2^2 ، علما أن العينتين مستقلتين، فحينئذ توزيع فيشر (F) بدرجتي حرية: $(v_1 = n_1 - 1)$ و $(v_2 = n_2 - 1)$ هو التوزيع المناسب الذي يستعمله الإحصائيون في اختبار فرضية النسبة بين تبايني المجتمعين، وهذا الاختبار يتم كما يلي:

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

1.8. الاختبار من جانبين ($H_1: (\neq)$): نقوم باختبار النسبة بين تبايني المجتمعين وفقا للخطوات التالية:

(أ) **الخطوة الأولى:** وضع العدم والفرضية البديلة: (نضع $\neq$ في H_1) وذلك كما يلي:

$$\begin{cases} H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1 \\ H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1 \end{cases}$$

(ب) **الخطوة الثانية:** حساب إحصائية الاختبار المتمثلة في إحصائية فيشر (F_{cal}) حيث:

$$F_{cal} = \frac{S_1^2 \sigma_2^2}{S_2^2 \sigma_1^2}$$

(ت) **الخطوة الثالثة:** استخراج القيم الحرجة، قيم (F_{tab}) من جدول فيشر في الملاحق، بما أن الاختبار بجانبيين فإن: $P = 1 - \frac{\alpha}{2}$ ودرجتي الحرية: ($v_1 = n_1 - 1$) و ($v_2 = n_2 - 1$)

(ث) **الخطوة الرابعة:** القرار المتخذ

- إذا كانت: $F_{cal} \in \left[\left(\frac{\alpha}{2}; v_1; v_2 \right) ; F_{(1-\frac{\alpha}{2}; v_1; v_2)} \right]$ نقبل H_0 ونرفض H_1 ، وبالتالي: $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$

- إذا كانت: $F_{cal} \notin \left[\left(\frac{\alpha}{2}; v_1; v_2 \right) ; F_{(1-\frac{\alpha}{2}; v_1; v_2)} \right]$ نرفض H_0 ونقبل H_1 ، وبالتالي: $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$

2.8. الاختبار أحادي الجانب من اليمين (العلوي) ($H_1: (>)$): نقوم باتتباع الخطوات التالية :

(أ) **الخطوة الأولى:** وضع العدم والفرضية البديلة (نضع $>$ في H_1) وتكون الفرضية كما يلي:

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

$$\begin{cases} H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1 \\ H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > 1 \end{cases}$$

(ب) الخطوة الثانية: حساب إحصائية الاختبار المتمثلة في F_{Cal} بالعلاقة السابقة

(ت) الخطوة الثالثة: استخراج القيمة الحرجة، قيمة (F_{tab}) من جدول فيشر الموجود، بما أن الاختبار بجانب واحد من اليمين فإن: $P = 1 - \alpha$ ، ودرجتي الحرية: $(v_1 = n_1 - 1)$ و $(v_2 = n_2 - 1)$

(ث) الخطوة الرابعة: القرار المتخذ

- إذا كانت: $F_{Cal} \geq F_{(1-\alpha; v_1; v_2)}$ ، نرفض H_0 ونقبل H_1 ، وبالتالي: $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > 1$

- إذا كانت: $F_{Cal} < F_{(1-\alpha; v_1; v_2)}$ ، نقبل H_0 ونرفض H_1 ، وبالتالي: $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$

3.8. الاختبار أحادي الجانب من اليسار (السفلي) ($H_1: (<)$): نقوم باتتباع الخطوات التالية :

(أ) الخطوة الأولى: وضع العدم والفرضية البديلة (نضع $<$ في H_1) وتكون الفرضية كما يلي:

$$\begin{cases} H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1 \\ H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 1 \end{cases}$$

(ب) الخطوة الثانية: حساب إحصائية الاختبار المتمثلة في F_{Cal} بالعلاقة السابقة

(ت) الخطوة الثالثة: استخراج القيمة الحرجة، قيمة (F_{tab}) من جدول فيشر الموجود، بما أن الاختبار بجانب واحد من اليسار فإن: $P = \alpha$ ، ودرجتي الحرية: $(v_1 = n_1 - 1)$ و $(v_2 = n_2 - 1)$

(ث) الخطوة الرابعة: القرار المتخذ

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

- إذا كانت: $F_{cal} \geq F_{(1; v_2)}$ ، نقبل H_0 ونرفض H_1 ، وبالتالي: $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$

- إذا كانت: $F_{cal} < F_{(1; v_2)}$ ، نرفض H_0 ونقبل H_1 ، وبالتالي: $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 1$

مثال 48: ن سحب عينة عشوائية حجمها 8 تباينها 25 من مجتمع أول يتبع التوزيع الطبيعي، كما أننا ن سحب عينة أخرى حجمها 10 وتباينها 9 من مجتمع ثان يتوزع هو الآخر توزيعا طبيعيا ، اختبر بأن تباين المجتمع الأول يساوي ثلاث مرات تباين المجتمع الثاني عند مستوى معنوية 10%

الحل:

الاختبار بجانبين يتم بالخطوات التالية:

الخطوة الأولى: وضع العدم والفرضية البديلة: (نضع $\neq$ في H_1) وذلك كما يلي:

$$\begin{cases} H_0: \sigma_1^2 = 3\sigma_2^2 \\ H_1: \sigma_1^2 \neq 3\sigma_2^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 3 \\ H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 3 \end{cases}$$

الخطوة الثانية: حساب إحصائية الاختبار المتمثلة في إحصائية فيشر (F_{cal}) حيث:

$$F_{cal} = \frac{S_1^2 \sigma_2^2}{S_2^2 \sigma_1^2} = \frac{25}{9} \frac{1}{3} = 0,93$$

الخطوة الثالثة: استخراج القيم الحرجة، قيم (F_{tab}) من جدول فيشر في الملاحق، بما أن الاختبار بجانبين فإن: $P = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{0,1}{2} = 0,95$ ودرجتي الحرية: ($v_1 = 8 - 1 = 7$) و ($v_2 = 10 - 1 = 9$) ومنه:

$$F_{(0,05; 7; 9)} = \frac{1}{F_{(0,95; 9; 7)}} = \frac{1}{3,68} = 0,27 \quad \text{و} \quad F_{(0,95; 7; 9)} = 3,29$$

الخطوة الرابعة: القرار المتخذ

نلاحظ أن: $F_{cal} = 0,93 \in [0,27 ; 3,29]$ ، نقبل H_0 ونرفض H_1 ، وبالتالي:
 $\sigma_1^2 = 3\sigma_2^2$

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

مثال 49: نفس المثال السابق، اختبر بأن تباين المجتمع الأول أكبر من ثلاثة مرات تباين المجتمع الثاني عند مستوى معنوية 1%

الحل:

نحن أمام اختبار أحادي الجانب من اليمين

الخطوة الأولى: وضع العدم والفرضية البديلة (نضع $>$ في H_1) وتكون الفرضية كما يلي:

$$\begin{cases} H_0: \sigma_1^2 = 3\sigma_2^2 \\ H_1: \sigma_1^2 > 3\sigma_2^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 3 \\ H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > 3 \end{cases}$$

الخطوة الثانية: نفسها

$$F_{cal} = \frac{S_1^2 \sigma_2^2}{S_2^2 \sigma_1^2} = \frac{25}{9} \frac{1}{3} = 0,93$$

الخطوة الثالثة: استخراج القيمة الحرجة، قيمة (F_{tab}) ، بما أن الاختبار بجانب واحد فإن: $P = 1 - \alpha = 1 - 0,01 = 0,99$ ودرجتي الحرية: $(v_1 = 8 - 1 = 7)$ و $(v_2 = 10 - 1 = 9)$ ومنه:

$$F_{(0,01;7;9)} = \frac{1}{F_{(0,99;9;7)}} = \frac{1}{6,72} = 0,15 \quad \text{و} \quad F_{(0,99;7;9)} = 5,61$$

الخطوة الرابعة: القرار المتخذ

نلاحظ أن: $F_{cal} = 0,93 < 5,61$ ، نقبل H_0 ونرفض H_1 ، وبالتالي: $\sigma_1^2 = 3\sigma_2^2$

مثال 50: نفس المثال السابق، اختبر بأن تباين المجتمع الأول أقل من ثلاثة مرات تباين المجتمع الثاني عند مستوى معنوية 1%

الحل:

نحن أمام اختبار أحادي الجانب من اليسار

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

الخطوة الأولى: وضع العدم والفرضية البديلة (نضع $<$ في H_1) وتكون الفرضية كما يلي:

$$\begin{cases} H_0: \sigma_1^2 = 3\sigma_2^2 \\ H_1: \sigma_1^2 < 3\sigma_2^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 3 \\ H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 3 \end{cases}$$

الخطوة الثانية: نفسها

$$F_{Cal} = \frac{S_1^2 \sigma_2^2}{S_2^2 \sigma_1^2} = \frac{25}{9} \frac{1}{3} = 0,93$$

الخطوة الثالثة: استخراج القيمة الحرجة، قيمة (F_{tab}) ، بما أن الاختبار بجانب واحد فإن: $P = \alpha = 0,01$ ودرجتي الحرية: $(v_1 = 8 - 1 = 7)$ و $(v_2 = 10 - 1 = 9)$ ومنه:

$$F_{(0,01;7;9)} = \frac{1}{F_{(0,99;9;7)}} = \frac{1}{6,72} = 0,15$$

الخطوة الرابعة: القرار المتخذ

نلاحظ أن: $F_{Cal} = 0,93 \geq 0,15$ ، نقبل H_0 ونرفض H_1 ، وبالتالي: $\sigma_1^2 = 3\sigma_2^2$

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

9. تمارين مقترحة حول الفصل الثالث:

التمرين الأول: اختيرت عينة عشوائية قوامها 64 مشاهدة من مجتمع يخضع للتوزيع الطبيعي بتباين 25 ، وقد لوحظ أن مجموع قيم مشاهدات العينة هو 1280 ، هل تعتقد أن متوسط المجتمع يقل عن 23 عند مستوى معنوية 1% ؟

التمرين الثاني: إنتاج شركة لقطع معدنية أسطوانية الشكل يتوزع بشكل طبيعي وبانحراف معياري 0,8 سم ، أخذت عينة عشوائية حجمها 9 قطع متوسط قطرها 10,4 سم، ادعى صاحب هذه الشركة أن متوسط قطر الأسطوانة هو 10 سم، اختبر صحة هذا الادعاء عند مستوى معنوية 1%

التمرين الثالث: ادعت إدارة مستشفى معين أن متوسط وقت انتظار المريض لتلقي خدمة العلاج على الأكثر 20 دقيقة، اختيرت عينة عشوائية من مرضى هذا المستشفى حجمها 64 مريض فكان متوسط وقت انتظار المريض 22 دقيقة بانحراف معياري 10 دقائق، اختبر صحة إدعاء إدارة المستشفى عند مستوى معنوية 5%

التمرين الرابع: للتحقق من معدل الاستهلاك الشهري العائلي للحوم البيضاء في منطقة معينة، أخذت عينة عشوائية حجمها 10 عائلات من هذه المنطقة فكان هذا المعدل فيها 7,5 كغ بانحراف معياري 2,42 كغ، هل ترى أن معدل الاستهلاك الشهري العائلي من اللحوم البيضاء في المنطقة المعنية يختلف معنويا عن 8 كغ عند مستوى معنوية 10% ؟

التمرين الخامس: لدينا مجتمع أول يخضع للتوزيع الطبيعي حجمه 640 وتباينه 16، اختيرت منه عينة عشوائية حجمها 64 ومتوسطها 5 ، ولدينا من جهة أخرى مجتمع ثان يخضع هو الآخر للتوزيع الطبيعي حجمه 360 وتباينه 9، اختيرت منه عينة عشوائية حجمها 36 ومتوسطها 3، هل يمكن الاستنتاج بأن متوسط المجتمع الأول يختلف عن متوسط المجتمع الثاني عند مستوى معنوية 1%

التمرين السادس: للمقارنة بين رواتب الأساتذة من نفس الدرجة في مدرستين خاصتين والتي تخضع فيها الرواتب للتوزيع الطبيعي، اختيرت عينة عشوائية من المدرسة الخاصة الأولى حجمها 50 أستاذ فكان متوسط رواتبهم 1000 أورو بانحراف معياري قدره 50 أورو كما اختيرت عينة عشوائية من المدرسة الخاصة الثانية حجمها 60 أستاذ فكان متوسط رواتبهم 1200 أورو بانحراف معياري قدره 60 أورو، هل يمكن الاستنتاج بأن متوسط رواتب أساتذة المدرسة الخاصة الأولى يقل عن متوسط رواتب أساتذة المدرسة الخاصة الثانية عند مستوى معنوية 5% ؟

التمرين السابع: لغرض معرفة أوزان الأطفال حديثي الولادة في إحدى مستشفيات، سحبت عينتين حسب الجنس، وتم حساب المؤشرات الإحصائية الموضحة في الجدول التالي:

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

الجنس	حجم العينة	متوسطها (كغ)	تباينها (كغ)
ذكور	10	3,5	1,2
إناث	12	2,7	1,3

- هل ترى أن متوسط أوزان الأطفال حديثي الولادة الذكور يزيد على متوسط أوزان الأطفال حديثي الولادة عند مستوى معنوية 1%؟ (علما أن تبايني المجتمعين غير متساويين)

التمرين الثامن: أجريت دراسة في كلية الطب البيطري لمعرفة تأثير مصل جديد قصد تخفيض مستوى الكولسترول في الدم، فأخذت عينة عشوائية حجمها ثمان من حيوان معين للاختبار، والجدول أدناه يوضح مستوى الكولسترول في الدم قبل وبعد إعطاء الجرعة من المصل:

210	211	248	196	295	222	232	235	الكولسترول قبل المعالجة (ملغ) X
202	285	268	234	327	230	261	230	الكولسترول بعد المعالجة (ملغ) Y

- هل يمكن القول بأن استخدام المصل الجديد قد ساهم في تخفيض مستوى الكولسترول في الدم عند مستوى معنوية 5%؟

التمرين التاسع: ادعت إحدى شركات إنتاج الأجهزة الالكترونية أن نسبة الأجهزة التالفة في إنتاجها على الأكثر 4% ، قام أحد الوكلاء المعتمدين لهذه الشركة باختيار عينة عشوائية حجمها 500 جهاز من الإنتاج الكلي للشركة البالغ 11000 جهاز ، وتم فحصها فتبين للوكيل أن عدد الأجهزة التالفة 45 جهاز، هل الشركة صادقة في ادعائها عند مستوى المعنوية 5% ؟

التمرين العاشر: أخذت عينة عشوائية حجمها 700 طالب منها 340 طالبة ، وقد لوحظ أن عدد الطلبة الذكور الذين يدخلون 50 طالب وعدد الطالبات اللواتي يدخلن 30 طالبة، هل نسبة الذكور الذين يدخلون أعلى منها عند الإناث (مستوى المعنوية 10%) ؟

التمرين الحادي عشر: لوحظ أن الانحراف المعياري لعمر المصاييح المنتجة في أحد المصانع بلغ 30 ساعة، بعد مرور فترة معينة طلب مدير المصنع التأكد من أن تشتت عمر المصاييح لم يتأثر بالرغم من قدم عمر الماكينات المستخدمة في الإنتاج، لغرض تنفيذ طلب المدير اختيرت عينة عشوائية من الإنتاج حجمها 31 مصباح، وبعد إجراء فحص مصاييح هذه العينة تبين أن انحرافها المعياري 35 ساعة، هل فعلا لم يتأثر تشتت عمر هذه المصاييح (مستوى المعنوية 10%)؟

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

التمرين الثاني عشر: نريد دراسة حجم الإنفاق على المواد الغذائية في منطقتين معينتين، فأخذنا عينة أولى حجمها 12 أسرة من المنطقة الأولى فكان تباين الإنفاق فيها 160 وحدة نقدية، وأخذنا عينة ثانية حجمها 10 أسر من المنطقة الثانية فكان الانحراف المعياري للإنفاق 12 وحدة نقدية، هل تباين حجم الإنفاق على المواد الغذائية في المنطقة الأولى أكبر منه في المنطقة الثانية عند مستوى المعنوية 1%؟

قائمة المراجع

الإحصاء 4: محاضرات مدعمة بأمثلة تطبيقية

قائمة المراجع:

الكتب:

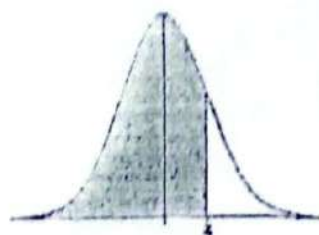
1. السقاف أحمد علي، الإحصاء الوصفي والاستدلالي، المركز الديمقراطي العربي، برلين، الطبعة الأولى، 2020
2. القوسي محمد مفيد ، الإحصاء الوصفي والاستدلالي، مركز الكتاب الأكاديمي، عمان ، الطبعة الأولى، 2013
3. بني هاني عبد الرزاق، الاقتصاد القياسي المبادئ الرياضية والإحصائية، دار وائل للنشر، الأردن، الطبعة الأولى، 2014
4. سبيغل موراي، ترجمة عبد القادر حمدو، الإحصاء والاحتمال (شوم)، أكاديمية أنترناشيونال، بيروت، 2001
5. طعمة حسن ياسين، الاختبارات الإحصائية أسس وتطبيقات، دار صفاء للنشر، عمان، الطبعة الأولى، 2011
6. موساوي عبد النور وبركان يوسف، الإحصاء2، دار العلوم للنشر والتوزيع، عنابة، الجزائر، 2010

المطبوعات البيداغوجية:

1. عابد علي، الإحصاء3 (الإحصاء الاستنتاجي أو الاستدلالي) ، كلية العلوم الاقتصادية التجارية وعلوم التسيير، جامعة ابن خلدون، تيارت، الجزائر، 2018/2017
2. كيجل عبد الباقي، محاضرات في الإحصاء الاستدلالي (الإحصاء03) ، كلية العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية وعلوم التسيير، جامعة أحمد بن يحيى الونشريسي تيسمسيلت، الجزائر، 2021/2020

الملاحق

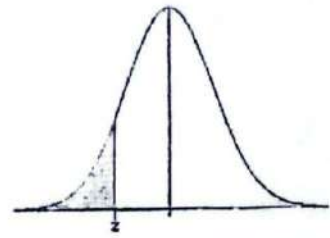
Standard Normal Cumulative Probability Table



Cumulative probabilities for POSITIVE z-values are shown in the following table:

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

Standard Normal Cumulative Probability Table



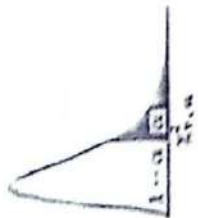
Cumulative probabilities for NEGATIVE z-values are shown in the following table:

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
-3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
-3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
-3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
-3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
-3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
-2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
-2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
-2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
-2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
-2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
-2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
-2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
-2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
-2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
-2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
-1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
-1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
-1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
-1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
-1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
-1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
-1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
-1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
-1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
-0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
-0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
-0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
-0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
-0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
-0.4	0.3448	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
-0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
-0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
-0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641

Critical Values for Student's *t*-Distribution.


df	Upper Tail Probability: $Pr(T > t)$									
	0.2	0.1	0.05	0.04	0.03	0.025	0.02	0.01	0.005	0.0025
1	1.376	3.078	6.314	7.910	10.570	12.706	15.895	31.821	63.657	127.321
2	1.001	1.886	2.920	3.320	3.898	4.303	4.849	6.965	9.525	12.706
3	0.978	1.638	2.353	2.605	2.951	3.182	3.482	4.541	5.841	7.453
4	0.941	1.533	2.132	2.333	2.601	2.776	2.999	3.747	4.604	5.510
5	0.920	1.470	2.015	2.191	2.422	2.571	2.757	3.365	4.032	4.759
6	0.900	1.440	1.943	2.104	2.313	2.447	2.612	3.143	3.707	4.353
7	0.890	1.415	1.895	2.048	2.241	2.365	2.517	2.998	3.499	4.045
8	0.883	1.397	1.860	2.004	2.189	2.305	2.449	2.895	3.355	3.941
9	0.883	1.383	1.833	1.973	2.160	2.262	2.398	2.821	3.290	3.881
10	0.879	1.372	1.812	1.948	2.120	2.228	2.359	2.764	3.189	3.827
11	0.876	1.363	1.796	1.928	2.096	2.201	2.328	2.718	3.106	3.767
12	0.873	1.356	1.782	1.912	2.076	2.179	2.303	2.681	3.055	3.718
13	0.870	1.350	1.771	1.899	2.060	2.160	2.282	2.650	3.012	3.671
14	0.868	1.345	1.761	1.887	2.046	2.145	2.264	2.624	2.977	3.626
15	0.866	1.341	1.753	1.878	2.034	2.131	2.249	2.602	2.947	3.583
16	0.865	1.337	1.746	1.869	2.024	2.120	2.235	2.583	2.921	3.541
17	0.863	1.333	1.740	1.862	2.015	2.110	2.224	2.567	2.898	3.500
18	0.862	1.330	1.734	1.855	2.007	2.101	2.214	2.552	2.878	3.462
19	0.861	1.328	1.729	1.850	2.000	2.093	2.205	2.539	2.861	3.426
20	0.860	1.325	1.725	1.844	1.994	2.088	2.197	2.528	2.845	3.390
21	0.859	1.323	1.721	1.840	1.988	2.080	2.189	2.518	2.831	3.356
22	0.858	1.321	1.717	1.835	1.983	2.074	2.183	2.508	2.819	3.322
23	0.858	1.319	1.714	1.832	1.978	2.069	2.177	2.500	2.807	3.289
24	0.857	1.318	1.711	1.828	1.974	2.064	2.172	2.492	2.797	3.256
25	0.856	1.316	1.708	1.825	1.970	2.060	2.167	2.485	2.787	3.224
26	0.856	1.315	1.706	1.822	1.967	2.056	2.162	2.479	2.779	3.192
27	0.855	1.314	1.703	1.819	1.963	2.052	2.158	2.473	2.771	3.160
28	0.855	1.313	1.701	1.817	1.960	2.048	2.154	2.467	2.763	3.128
29	0.854	1.311	1.699	1.814	1.957	2.045	2.150	2.462	2.756	3.096
30	0.854	1.310	1.697	1.812	1.955	2.042	2.147	2.457	2.750	3.064
31	0.853	1.309	1.695	1.810	1.952	2.040	2.144	2.453	2.744	3.032
32	0.853	1.309	1.694	1.808	1.950	2.037	2.141	2.449	2.738	3.000
33	0.853	1.308	1.692	1.806	1.948	2.035	2.138	2.445	2.733	2.968
34	0.852	1.307	1.691	1.805	1.946	2.032	2.136	2.441	2.728	2.936
35	0.852	1.306	1.690	1.803	1.944	2.030	2.133	2.438	2.724	2.904
36	0.852	1.305	1.688	1.802	1.942	2.028	2.131	2.434	2.719	2.872
37	0.851	1.305	1.687	1.800	1.940	2.026	2.129	2.431	2.715	2.840
38	0.851	1.304	1.685	1.799	1.939	2.024	2.127	2.429	2.712	2.808
39	0.851	1.304	1.685	1.798	1.937	2.023	2.125	2.426	2.708	2.776
40	0.851	1.303	1.684	1.796	1.936	2.021	2.123	2.423	2.704	2.744
41	0.850	1.303	1.683	1.795	1.934	2.020	2.121	2.421	2.701	2.712
42	0.850	1.302	1.682	1.794	1.933	2.018	2.120	2.418	2.698	2.680
43	0.850	1.302	1.681	1.793	1.932	2.017	2.118	2.416	2.695	2.648
44	0.850	1.301	1.680	1.792	1.931	2.015	2.116	2.414	2.692	2.616
45	0.850	1.301	1.679	1.791	1.929	2.014	2.115	2.412	2.690	2.584
46	0.850	1.300	1.678	1.790	1.928	2.013	2.114	2.410	2.687	2.552
47	0.849	1.300	1.678	1.789	1.927	2.012	2.112	2.408	2.685	2.520
48	0.849	1.299	1.677	1.789	1.926	2.011	2.111	2.407	2.682	2.488
49	0.849	1.299	1.677	1.788	1.925	2.010	2.110	2.405	2.680	2.456
50	0.849	1.299	1.676	1.787	1.924	2.009	2.109	2.403	2.678	2.424
60	0.848	1.296	1.671	1.781	1.917	2.000	2.099	2.390	2.660	2.400
70	0.847	1.294	1.667	1.776	1.912	1.994	2.093	2.381	2.643	2.376
80	0.846	1.292	1.664	1.773	1.908	1.990	2.088	2.374	2.639	2.352
90	0.846	1.291	1.662	1.771	1.905	1.987	2.084	2.368	2.632	2.328
100	0.846	1.290	1.660	1.769	1.902	1.984	2.081	2.364	2.626	2.304
120	0.845	1.289	1.658	1.766	1.899	1.980	2.076	2.358	2.617	2.280
140	0.844	1.288	1.656	1.763	1.896	1.977	2.073	2.353	2.611	2.256
160	0.844	1.286	1.653	1.761	1.893	1.973	2.069	2.347	2.603	2.232
200	0.843	1.284	1.650	1.758	1.890	1.970	2.065	2.341	2.597	2.208
500	0.842	1.283	1.648	1.754	1.885	1.965	2.059	2.334	2.586	2.184
1000	0.842	1.282	1.646	1.752	1.883	1.962	2.056	2.330	2.581	2.160
∞	0.842	1.282	1.645	1.751	1.881	1.960	2.054	2.326	2.576	2.136
	80%	80%	90%	92%	94%	95%	96%	98%	99%	99.9%
	Confidence Level									

Note: $t(\infty)_{\alpha/2} = Z_{\alpha/2}$ in our notation.



Percentage Points of the χ^2 Distribution; $\chi^2_{v, \alpha}$

$$P(\chi^2 > \chi^2_{v, \alpha}) = \alpha$$

v	0.001	0.005	0.010	0.025	0.050	0.100	0.250	0.500	0.750	0.900	0.950	0.975	0.990	0.995	0.999
1	10.83	7.88	6.63	5.02	3.84	2.71	1.32	0.45	0.10	0.02					
2	13.82	10.60	9.21	7.38	5.99	4.61	2.77	1.39	0.58	0.21	0.10	0.05	0.02	0.01	
3	16.27	12.84	11.34	9.35	7.81	6.25	4.11	2.37	1.21	0.58	0.35	0.22	0.11	0.07	0.02
4	18.47	14.86	13.28	11.14	9.49	7.78	5.39	3.36	1.92	1.06	0.71	0.48	0.30	0.21	0.09
5	20.52	16.75	15.09	12.83	11.07	9.24	6.63	4.35	2.67	1.61	1.15	0.83	0.55	0.41	0.21
6	22.46	18.55	16.81	14.45	12.59	10.64	7.84	5.35	3.45	2.20	1.64	1.24	0.87	0.68	0.38
7	24.32	20.28	18.48	16.01	14.07	12.02	9.04	6.35	4.25	2.83	2.17	1.69	1.24	0.99	0.60
8	26.12	21.95	20.09	17.53	15.51	13.36	10.22	7.34	5.07	3.48	2.73	2.18	1.65	1.34	0.86
9	27.88	23.59	21.67	19.02	16.92	14.68	11.39	8.34	5.90	4.17	3.33	2.70	2.09	1.73	1.15
10	29.59	25.19	23.21	20.48	18.31	15.99	12.55	9.34	6.74	4.87	3.94	3.25	2.56	2.16	1.48
11	31.26	26.76	24.72	21.92	19.68	17.28	13.70	10.34	7.58	5.58	4.57	3.82	3.05	2.60	1.83
12	32.91	28.30	26.22	23.34	21.03	18.55	14.85	11.34	8.44	6.30	5.23	4.40	3.57	3.07	2.21
13	34.53	29.82	27.69	24.74	22.36	19.81	15.98	12.34	9.30	7.04	5.89	5.01	4.11	3.57	2.62
14	36.12	31.32	29.14	26.12	23.68	21.06	17.12	13.34	10.17	7.79	6.57	5.63	4.88	4.07	3.04
15	37.70	32.80	30.58	27.49	25.00	22.31	18.25	14.34	11.04	8.55	7.26	6.26	5.55	4.60	3.48
16	39.25	34.27	32.00	28.85	26.30	23.54	19.37	15.34	11.91	9.31	7.96	6.91	6.31	5.14	3.94
17	40.79	35.72	33.41	30.19	27.59	24.77	20.49	16.34	12.79	10.09	8.67	7.56	6.41	5.70	4.42
18	42.31	37.16	34.81	31.53	28.87	25.99	21.60	17.34	13.68	10.86	9.39	8.23	7.01	6.26	4.90
19	43.82	38.58	36.19	32.85	30.14	27.20	22.72	18.34	14.56	11.65	10.12	8.91	7.65	6.84	5.41
20	45.31	40.00	37.57	34.17	31.41	28.41	23.83	19.34	15.45	12.44	10.85	9.59	8.25	7.43	5.92
21	46.80	41.40	38.93	35.48	32.67	29.62	24.93	20.34	16.34	13.24	11.59	10.28	8.90	8.03	6.45
22	48.27	42.80	40.29	36.78	33.92	30.81	26.04	21.34	17.24	14.04	12.34	10.98	9.54	8.64	6.98
23	49.73	44.18	41.64	38.08	35.17	32.01	27.14	22.34	18.14	14.85	13.09	11.69	10.20	9.26	7.53
24	51.18	45.56	42.98	39.36	36.42	33.20	28.24	23.34	19.04	15.66	13.85	12.40	10.86	9.89	8.08
25	52.62	46.93	44.31	40.65	37.65	34.38	29.34	24.34	19.94	16.47	14.61	13.12	11.52	10.52	8.63
30	59.70	53.67	50.89	46.98	43.77	40.56	34.80	29.34	24.48	20.66	18.49	16.79	14.85	13.79	11.59
40	75.40	66.77	63.69	59.34	55.76	51.81	45.62	39.34	33.66	28.05	26.51	24.45	22.16	20.71	17.92
50	85.66	79.49	76.15	71.42	67.50	63.17	56.33	49.33	42.94	37.69	34.76	32.36	29.71	27.99	24.67
60	99.61	91.95	88.38	83.30	79.08	74.40	66.98	59.33	52.29	46.46	43.19	40.48	37.49	35.56	31.74
70	112.52	104.21	100.43	95.02	90.53	85.53	77.58	69.33	61.70	55.55	51.74	48.76	45.44	43.25	39.04
80	124.84	116.32	112.33	106.63	101.88	96.58	88.15	79.33	71.14	64.26	60.39	57.15	53.54	51.17	46.52
90	137.21	128.30	124.12	118.14	113.15	107.57	98.65	89.33	80.62	73.26	69.15	65.65	61.75	59.20	54.16
100	149.45	140.17	135.81	129.56	124.34	118.50	109.14	99.33	90.15	82.56	77.85	74.23	70.16	67.35	61.92

F Distribution Table

d.f.N. = degrees of freedom in numerator
d.f.D. = degrees of freedom in denominator

		$\alpha = 0.05$																d.f.N.	
d.f.D.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	162.11	200.00	216.15	225.00	230.56	234.37	237.15	239.25	240.91	242.24	244.26	246.30	248.36	249.40	250.44	251.48	252.53	253.59	254.65
2	198.5	199.0	199.2	199.2	199.3	199.3	199.4	199.4	199.4	199.4	199.4	199.4	199.4	199.5	199.5	199.5	199.5	199.5	199.5
3	55.55	49.80	47.47	46.19	45.39	44.84	44.43	44.13	43.88	43.65	43.39	43.08	42.78	42.62	42.47	42.31	42.15	41.99	41.83
4	31.33	26.28	24.26	23.15	22.46	21.97	21.62	21.35	21.14	20.97	20.70	20.44	20.17	20.03	19.89	19.75	19.61	19.47	19.32
5	22.78	18.31	16.53	15.56	14.94	14.51	14.20	13.96	13.77	13.62	13.38	13.15	12.90	12.78	12.66	12.53	12.40	12.27	12.14
6	18.63	14.54	12.92	12.03	11.45	11.07	10.79	10.57	10.39	10.25	10.03	9.81	9.59	9.47	9.36	9.24	9.12	9.00	8.88
7	15.24	12.40	10.88	10.05	9.52	9.16	8.89	8.68	8.51	8.38	8.18	7.97	7.75	7.65	7.53	7.42	7.31	7.19	7.08
8	14.69	11.04	9.60	8.81	8.30	7.95	7.69	7.50	7.34	7.21	7.01	6.81	6.61	6.50	6.40	6.29	6.18	6.06	5.95
9	13.61	10.11	8.72	7.96	7.47	7.13	6.88	6.69	6.54	6.42	6.23	6.03	5.83	5.73	5.62	5.52	5.41	5.30	5.19
10	12.83	9.43	8.08	7.34	6.87	6.54	6.30	6.12	5.97	5.85	5.66	5.47	5.27	5.17	5.07	4.97	4.85	4.75	4.64
11	12.23	8.91	7.60	6.88	6.42	6.10	5.86	5.68	5.54	5.42	5.24	5.05	4.86	4.76	4.65	4.55	4.44	4.34	4.23
12	11.75	8.51	7.23	6.52	6.07	5.76	5.52	5.35	5.20	5.09	4.91	4.72	4.53	4.43	4.33	4.23	4.12	4.01	3.90
13	11.37	8.19	6.93	6.23	5.79	5.48	5.25	5.08	4.94	4.82	4.64	4.46	4.27	4.17	4.07	3.97	3.87	3.76	3.65
14	11.06	7.92	6.68	6.00	5.56	5.26	5.03	4.86	4.72	4.60	4.43	4.25	4.07	3.97	3.88	3.79	3.68	3.57	3.46
15	10.80	7.70	6.48	5.80	5.37	5.07	4.85	4.67	4.54	4.42	4.25	4.07	3.92	3.73	3.64	3.54	3.44	3.33	3.22
16	10.58	7.51	6.30	5.64	5.21	4.91	4.69	4.52	4.38	4.27	4.10	3.92	3.79	3.61	3.51	3.41	3.31	3.21	3.10
17	10.38	7.35	6.16	5.50	5.07	4.78	4.56	4.39	4.25	4.14	3.97	3.79	3.68	3.50	3.40	3.30	3.20	3.10	2.99
18	10.22	7.21	6.03	5.37	4.95	4.66	4.44	4.28	4.14	4.03	3.86	3.68	3.50	3.40	3.31	3.21	3.11	3.00	2.89
19	10.07	7.09	5.92	5.27	4.85	4.56	4.34	4.18	4.04	3.93	3.76	3.59	3.40	3.31	3.22	3.12	3.02	2.92	2.81
20	9.94	6.99	5.82	5.17	4.76	4.47	4.26	4.09	3.96	3.85	3.68	3.50	3.32	3.22	3.13	3.03	2.93	2.83	2.73
21	9.83	6.89	5.73	5.09	4.68	4.39	4.18	4.01	3.88	3.77	3.60	3.43	3.24	3.15	3.05	2.95	2.85	2.75	2.65
22	9.73	6.81	5.65	5.02	4.61	4.32	4.11	3.94	3.81	3.70	3.54	3.36	3.18	3.08	2.98	2.88	2.77	2.67	2.57
23	9.63	6.73	5.58	4.95	4.54	4.26	4.05	3.88	3.75	3.64	3.47	3.30	3.12	3.02	2.92	2.82	2.71	2.61	2.51
24	9.55	6.66	5.52	4.89	4.49	4.20	3.99	3.83	3.69	3.59	3.42	3.25	3.06	2.97	2.87	2.77	2.66	2.55	2.45
25	9.48	6.60	5.46	4.84	4.43	4.15	3.94	3.78	3.63	3.54	3.37	3.20	3.01	2.92	2.82	2.72	2.61	2.50	2.39
26	9.41	6.54	5.41	4.79	4.38	4.10	3.89	3.73	3.60	3.49	3.33	3.15	2.97	2.87	2.77	2.67	2.56	2.45	2.33
27	9.34	6.49	5.36	4.74	4.34	4.06	3.85	3.69	3.56	3.45	3.28	3.11	2.93	2.83	2.73	2.63	2.52	2.41	2.29
28	9.28	6.44	5.32	4.70	4.30	4.02	3.81	3.65	3.52	3.41	3.25	3.07	2.89	2.79	2.69	2.59	2.48	2.37	2.25
29	9.23	6.40	5.28	4.66	4.26	3.98	3.77	3.61	3.48	3.38	3.21	3.04	2.86	2.76	2.66	2.56	2.45	2.33	2.24
30	9.18	6.35	5.24	4.62	4.23	3.95	3.74	3.58	3.45	3.34	3.18	3.01	2.82	2.73	2.63	2.52	2.42	2.30	2.18
40	8.83	6.07	4.98	4.37	3.99	3.71	3.51	3.35	3.22	3.12	2.95	2.78	2.60	2.50	2.40	2.30	2.18	2.06	1.93
60	8.49	5.79	4.73	4.14	3.76	3.49	3.29	3.13	3.01	2.90	2.74	2.57	2.39	2.29	2.19	2.08	1.96	1.83	1.69
120	8.18	5.54	4.50	3.92	3.55	3.28	3.09	2.93	2.81	2.71	2.54	2.37	2.19	2.09	1.98	1.87	1.75	1.61	1.43
∞	7.88	5.30	4.28	3.72	3.35	3.09	2.90	2.74	2.62	2.52	2.36	2.19	2.00	1.90	1.79	1.67	1.53	1.36	1.00

F Distributic Table

2

d.f.D.		d.f.N.																			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞			
1	4052	4999.5	5403	5525	5764	5859	5928	5982	6022	6056	6106	6157	6209	6261	6313	6361	6399	6466			
2	98.50	99.00	99.17	99.25	99.30	99.33	99.36	99.37	99.39	99.40	99.42	99.43	99.45	99.47	99.48	99.49	99.50	99.50			
3	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.35	27.23	27.05	26.87	26.69	26.60	26.52	26.32	26.22	26.15			
4	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.93	14.80	14.66	14.55	14.57	14.20	14.02	13.93	13.84	13.65	13.56	13.46			
5	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16	10.05	9.89	9.72	9.55	9.47	9.38	9.29	9.11	9.02			
6	13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.72	7.56	7.40	7.31	7.23	7.06	6.97	6.88			
7	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.47	6.31	6.16	6.07	5.99	5.82	5.74	5.65			
8	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.67	5.52	5.36	5.28	5.12	5.03	4.95	4.86			
9	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.11	4.96	4.81	4.73	4.65	4.48	4.40	4.31			
10	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.71	4.56	4.41	4.33	4.25	4.08	4.00	3.91			
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.40	4.25	4.10	4.02	3.94	3.78	3.69	3.60			
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.16	4.01	3.86	3.78	3.70	3.62	3.54	3.46			
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	3.95	3.80	3.65	3.58	3.51	3.43	3.35	3.27			
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.45	4.28	4.14	4.03	3.94	3.80	3.65	3.51	3.43	3.35	3.27	3.18	3.09			
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.67	3.52	3.37	3.29	3.21	3.13	3.05	2.97			
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.55	3.41	3.26	3.18	3.10	3.02	2.93	2.85			
17	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.45	3.31	3.16	3.08	3.00	2.92	2.83	2.75			
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.37	3.23	3.08	3.00	2.92	2.84	2.75	2.66			
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.65	3.52	3.43	3.30	3.15	3.00	2.92	2.84	2.76	2.67	2.58			
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.58	3.46	3.37	3.23	3.09	2.94	2.86	2.78	2.69	2.61	2.52			
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40	3.31	3.17	3.03	2.88	2.80	2.72	2.64	2.55	2.46			
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.12	2.98	2.83	2.75	2.67	2.58	2.50	2.41			
23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3.21	3.07	2.93	2.78	2.70	2.62	2.54	2.45	2.36			
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.03	2.89	2.74	2.66	2.58	2.49	2.40	2.31			
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.85	3.63	3.46	3.32	3.21	3.12	2.98	2.85	2.70	2.62	2.54	2.45	2.36	2.27			
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18	3.09	2.95	2.82	2.67	2.59	2.50	2.41	2.32	2.23			
27	7.68	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.15	3.06	2.92	2.79	2.64	2.56	2.47	2.38	2.29	2.20			
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12	3.03	2.89	2.76	2.61	2.53	2.44	2.35	2.26	2.17			
29	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.09	3.00	2.87	2.73	2.57	2.49	2.40	2.31	2.22	2.13			
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.84	2.70	2.55	2.47	2.38	2.29	2.20	2.11			
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.66	2.52	2.37	2.29	2.20	2.11	2.02	1.93			
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.50	2.35	2.20	2.12	2.03	1.94	1.85	1.76			
120	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47	2.34	2.19	2.04	1.96	1.87	1.78	1.69	1.60			
∞	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	2.19	2.04	1.89	1.81	1.72	1.63	1.54	1.45			

F Distribution Table

3

d.f.N.	$\alpha = 0.025$																		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	647.8	799.5	864.2	899.6	921.8	937.1	948.2	956.7	963.3	968.6	976.7	984.9	993.1	997.2	1001	1006	1010	1014	1018
2	38.51	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.39	39.40	39.41	39.43	39.45	39.46	39.46	39.47	39.48	39.49	39.50
3	17.44	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47	14.42	14.34	14.25	14.17	14.12	14.08	14.04	13.99	13.95	13.90
4	12.22	10.65	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84	8.75	8.66	8.56	8.51	8.46	8.41	8.36	8.31	8.26
5	10.01	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62	6.52	6.43	6.33	6.28	6.23	6.18	6.12	6.07	6.02
6	8.81	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46	5.37	5.27	5.17	5.12	5.07	5.01	4.96	4.90	4.85
7	8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76	4.67	4.57	4.47	4.42	4.36	4.31	4.25	4.20	4.14
8	7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30	4.20	4.10	4.00	3.95	3.89	3.84	3.78	3.73	3.67
9	7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03	3.96	3.87	3.77	3.67	3.61	3.56	3.51	3.45	3.39	3.33
10	6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72	3.62	3.52	3.42	3.37	3.31	3.26	3.20	3.14	3.08
11	6.72	5.26	4.63	4.28	4.04	3.88	3.76	3.66	3.59	3.53	3.43	3.33	3.23	3.17	3.12	3.06	3.00	2.94	2.88
12	6.55	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37	3.28	3.18	3.07	3.02	2.96	2.91	2.85	2.79	2.72
13	6.41	4.97	4.35	4.00	3.77	3.60	3.48	3.39	3.31	3.25	3.15	3.05	2.95	2.89	2.84	2.78	2.72	2.66	2.60
14	6.30	4.86	4.24	3.89	3.66	3.50	3.38	3.29	3.21	3.15	3.05	2.95	2.84	2.79	2.73	2.67	2.61	2.55	2.49
15	6.20	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12	3.06	2.96	2.86	2.76	2.70	2.64	2.59	2.52	2.46	2.40
16	6.12	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12	3.05	2.99	2.89	2.79	2.68	2.63	2.57	2.51	2.45	2.38	2.32
17	6.04	4.62	4.01	3.66	3.44	3.28	3.16	3.06	2.98	2.92	2.82	2.72	2.62	2.56	2.50	2.44	2.38	2.32	2.25
18	5.98	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.93	2.87	2.77	2.67	2.56	2.50	2.44	2.38	2.32	2.26	2.19
19	5.92	4.51	3.90	3.56	3.33	3.17	3.05	2.96	2.88	2.82	2.72	2.62	2.51	2.45	2.39	2.33	2.27	2.20	2.13
20	5.87	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77	2.68	2.57	2.46	2.41	2.35	2.29	2.22	2.16	2.09
21	5.83	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.80	2.73	2.64	2.53	2.42	2.37	2.31	2.25	2.18	2.11	2.04
22	5.79	4.38	3.78	3.44	3.22	3.05	2.93	2.84	2.76	2.70	2.60	2.50	2.39	2.33	2.27	2.21	2.14	2.08	2.00
23	5.75	4.35	3.75	3.41	3.18	3.02	2.90	2.81	2.73	2.67	2.57	2.47	2.36	2.30	2.24	2.18	2.11	2.04	1.97
24	5.72	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70	2.64	2.54	2.44	2.33	2.27	2.21	2.15	2.08	2.01	1.94
25	5.69	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.68	2.61	2.51	2.41	2.30	2.24	2.18	2.12	2.05	1.98	1.91
26	5.66	4.27	3.67	3.33	3.10	2.94	2.82	2.73	2.65	2.59	2.49	2.39	2.28	2.22	2.16	2.09	2.03	1.95	1.88
27	5.63	4.24	3.65	3.31	3.08	2.92	2.80	2.71	2.63	2.57	2.47	2.36	2.25	2.19	2.13	2.07	2.00	1.93	1.85
28	5.61	4.22	3.63	3.29	3.06	2.90	2.78	2.69	2.61	2.55	2.45	2.34	2.23	2.17	2.11	2.05	1.98	1.91	1.83
29	5.59	4.20	3.61	3.27	3.04	2.88	2.76	2.67	2.59	2.53	2.43	2.32	2.21	2.15	2.09	2.03	1.96	1.89	1.81
30	5.57	4.18	3.60	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51	2.41	2.31	2.20	2.14	2.07	2.01	1.94	1.87	1.79
40	5.42	4.05	3.46	3.13	2.90	2.74	2.62	2.53	2.45	2.39	2.29	2.18	2.07	2.01	1.94	1.88	1.80	1.72	1.64
60	5.29	3.93	3.34	3.01	2.79	2.63	2.51	2.41	2.33	2.27	2.17	2.06	1.94	1.88	1.82	1.74	1.67	1.58	1.48
120	5.15	3.80	3.23	2.89	2.67	2.52	2.39	2.30	2.22	2.16	2.05	1.94	1.82	1.76	1.69	1.61	1.53	1.43	1.31
∞	5.02	3.69	3.12	2.79	2.57	2.41	2.29	2.19	2.11	2.05	1.94	1.83	1.71	1.64	1.57	1.48	1.39	1.27	1.00

F Distribution Table

4

d.f.D.	$\alpha = 0.05$ d.f.N.																			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	50	60	70	∞
1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	235.8	236.9	237.9	238.9	240.5	241.9	243.9	245.9	248.0	249.1	250.1	251.1	252.2	253.3
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.41	19.43	19.45	19.46	19.47	19.48	19.49	19.50	19.51	19.52
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53	8.51
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63	5.61
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.36	4.35
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67	3.65
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23	3.21
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97	2.93	2.91
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71	2.69
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54	2.52
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40	2.38
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.38	2.34	2.30	2.28
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.45	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21	2.19
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.45	2.39	2.35	2.31	2.27	2.22	2.18	2.13	2.11
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35	2.28	2.25	2.21	2.16	2.12	2.07	2.05
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.45	2.38	2.31	2.23	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01	1.99
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.31	2.23	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.97	1.95
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.91
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88	1.86
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84	1.82
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.81	1.79
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78	1.76
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.13	2.05	2.01	1.96	1.91	1.86	1.81	1.75	1.73
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79	1.73	1.71
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77	1.71	1.69
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.15	2.07	1.99	1.95	1.90	1.85	1.80	1.75	1.69	1.67
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20	2.13	2.05	1.97	1.93	1.88	1.84	1.79	1.73	1.67	1.65
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.12	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.77	1.71	1.65	1.63
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.10	2.03	1.94	1.90	1.85	1.81	1.75	1.70	1.64	1.62
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68	1.62	1.60
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.64	1.58	1.51	1.49
60	4.00	3.15	2.76	2.52	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59	1.53	1.47	1.39	1.37
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.17	2.09	2.02	1.95	1.91	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.50	1.43	1.35	1.25	1.23
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.39	1.32	1.22	1.10	1.08

F Distribution Table

5

d.f.D.	$\alpha = 0.10$ d.f.N.																		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	39.86	49.50	53.59	55.83	57.24	58.20	58.91	59.44	59.86	60.19	60.71	61.22	61.74	62.00	62.26	62.53	62.79	63.06	63.33
2	8.53	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.38	9.39	9.41	9.42	9.44	9.45	9.46	9.47	9.47	9.48	9.49
3	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.24	5.23	5.22	5.20	5.18	5.18	5.17	5.16	5.15	5.14	5.13
4	4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.94	3.92	3.90	3.87	3.84	3.83	3.82	3.80	3.79	3.78	3.76
5	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.32	3.30	3.27	3.24	3.21	3.19	3.17	3.16	3.14	3.12	3.10
6	3.78	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.96	2.94	2.90	2.87	2.84	2.82	2.80	2.78	2.76	2.74	2.72
7	3.59	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78	2.75	2.72	2.70	2.67	2.63	2.59	2.58	2.56	2.54	2.51	2.49	2.47
8	3.46	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62	2.59	2.56	2.54	2.50	2.46	2.42	2.40	2.38	2.36	2.34	2.32	2.29
9	3.36	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47	2.44	2.42	2.38	2.34	2.30	2.28	2.25	2.23	2.21	2.18	2.16
10	3.29	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.35	2.32	2.28	2.24	2.20	2.18	2.16	2.13	2.11	2.08	2.06
11	3.23	2.86	2.66	2.54	2.45	2.39	2.34	2.30	2.27	2.25	2.21	2.17	2.12	2.10	2.08	2.05	2.03	2.00	1.97
12	3.18	2.81	2.61	2.48	2.39	2.33	2.28	2.24	2.21	2.19	2.15	2.10	2.06	2.04	2.01	1.99	1.96	1.93	1.90
13	3.14	2.76	2.56	2.43	2.35	2.28	2.23	2.20	2.16	2.14	2.10	2.05	2.01	1.98	1.96	1.93	1.90	1.88	1.85
14	3.10	2.73	2.52	2.39	2.31	2.24	2.19	2.15	2.12	2.10	2.05	2.01	1.96	1.94	1.91	1.89	1.86	1.83	1.80
15	3.07	2.70	2.49	2.36	2.27	2.21	2.16	2.12	2.09	2.06	2.02	1.97	1.92	1.90	1.87	1.85	1.82	1.79	1.76
16	3.05	2.67	2.46	2.33	2.24	2.18	2.13	2.09	2.06	2.03	1.99	1.94	1.89	1.87	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72
17	3.03	2.64	2.44	2.31	2.22	2.15	2.10	2.06	2.03	2.00	1.96	1.91	1.86	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72	1.69
18	3.01	2.62	2.42	2.29	2.20	2.13	2.08	2.04	2.00	1.98	1.93	1.89	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72	1.69	1.66
19	2.99	2.61	2.40	2.27	2.18	2.11	2.06	2.02	1.98	1.96	1.91	1.86	1.81	1.79	1.76	1.73	1.70	1.67	1.63
20	2.97	2.59	2.38	2.25	2.16	2.09	2.04	2.00	1.96	1.94	1.89	1.84	1.79	1.77	1.74	1.71	1.68	1.64	1.61
21	2.96	2.57	2.36	2.23	2.14	2.08	2.02	1.98	1.95	1.92	1.87	1.83	1.78	1.75	1.72	1.69	1.66	1.62	1.59
22	2.95	2.56	2.35	2.22	2.13	2.06	2.01	1.97	1.93	1.90	1.86	1.81	1.76	1.73	1.70	1.67	1.64	1.60	1.57
23	2.94	2.55	2.34	2.21	2.11	2.05	1.99	1.95	1.92	1.89	1.84	1.80	1.74	1.72	1.69	1.66	1.62	1.59	1.55
24	2.93	2.54	2.33	2.19	2.10	2.04	1.98	1.94	1.91	1.88	1.83	1.78	1.73	1.70	1.67	1.64	1.61	1.57	1.53
25	2.92	2.53	2.32	2.18	2.09	2.02	1.97	1.93	1.89	1.87	1.82	1.77	1.72	1.69	1.66	1.63	1.59	1.56	1.52
26	2.91	2.52	2.31	2.17	2.08	2.01	1.96	1.92	1.88	1.86	1.81	1.76	1.71	1.68	1.65	1.61	1.58	1.54	1.50
27	2.90	2.51	2.30	2.17	2.07	2.00	1.95	1.91	1.87	1.85	1.80	1.75	1.70	1.67	1.64	1.60	1.57	1.53	1.49
28	2.89	2.50	2.29	2.16	2.06	2.00	1.94	1.90	1.87	1.84	1.79	1.74	1.69	1.66	1.63	1.59	1.56	1.52	1.48
29	2.89	2.50	2.28	2.15	2.06	1.99	1.93	1.89	1.86	1.83	1.78	1.73	1.68	1.65	1.62	1.58	1.55	1.51	1.47
30	2.88	2.49	2.28	2.14	2.05	1.98	1.93	1.88	1.85	1.82	1.77	1.72	1.67	1.64	1.61	1.57	1.54	1.50	1.46
40	2.84	2.44	2.23	2.09	2.00	1.93	1.87	1.83	1.79	1.76	1.71	1.66	1.61	1.57	1.54	1.51	1.47	1.42	1.38
60	2.79	2.39	2.18	2.04	1.95	1.87	1.82	1.77	1.74	1.71	1.66	1.60	1.54	1.51	1.48	1.44	1.40	1.35	1.29
120	2.75	2.35	2.13	1.99	1.90	1.82	1.77	1.72	1.68	1.65	1.60	1.55	1.48	1.45	1.41	1.37	1.32	1.26	1.19
∞	2.71	2.30	2.08	1.94	1.85	1.77	1.72	1.67	1.63	1.60	1.55	1.49	1.42	1.38	1.34	1.30	1.24	1.17	1.00

