



وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة لونيبي علي - البليدة 02 -
كلية العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية وعلوم التسيير
- الشهيد طالب عبد الرحمان -



قسم علوم: العلوم التجارية

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

موجهة لطلبة السنة الثانية ميدان العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية
وعلوم التسيير

من إعداد :

بوشنافة رضا

السنة الجامعية: 2023-2024

الفهرس

الصفحة	العنوان
02	المفهرس
04	المقدمة
06	الفصل الأول: قوانين التوزيعات الإحتمالية المستمرة
08	1. التوزيع الطبيعي
16	2. توزيع مربع كاي
20	3. توزيع ستيودنت
22	4. توزيع فيشر
25	5. تمارين محلولة
34	6. تمارين مقترحة
37	الفصل الثاني: توزيعات المعاينة الإحصائية
38	1. مفاهيم أساسية
40	2. الإطار النظري للمعاينة
46	3. توزيعات المعاينة
53	4. طبيعة توزيع المعاينة لمتوسطات العينة
58	5. توزيع المعاينة للفرق بين متوسطي عينتين
60	6. توزيع المعاينة لتباين العينة ولنسبة تباين العينتين
60	7. توزيع المعاينة للنسبة
63	8. توزيع المعاينة للفرق بين نسبتي
64	9. تمارين مقترحة
67	الفصل الثالث: نظرية التقدير
68	1. مفاهيم أساسية
72	2. فترة الثقة لمتوسط المجتمع
80	3. فترة الثقة للفرق بين متوسطين
84	4. فترة الثقة لتباين المجتمع

85	5. فترة الثقة للنسبة بين تبايني المجتمعين
87	6. فترة الثقة لنسبة المجتمع والفرق بين نسبتي
90	7. تمارين مقترحة
93	الفصل الرابع: اختبار الفرضيات
94	1. مفاهيم أساسية
101	2. اختبار الفرضيات لمتوسط المجتمع
105	3. اختبار الفرضيات للفرق بين متوسطي مجتمعين
109	4. اختبار الفرضيات لنسبة المجتمع والفرق بين نسبي مجتمعين
112	5. اختبار الفرضيات لتباين المجتمع
113	6. اختبار الفرضيات لنسبة تباين مجتمعين
114	7. تمارين مقترحة
116	قائمة المراجع
119	الملاحق
120	1. جدول التوزيع الطبيعي
122	2. جدول توزيع ستيودنت
123	3. جدول توزيع كاي مربع
124	4. جدول وزيع فيشر

مقدمة:

تمثل البيانات الإحصائية القاعدة الأساسية التي تعتمد عليها البحوث والدراسات ووسيلة هامة للتعبير الكمي والنوعي عن الظواهر والمشكلات المطروحة، كما تساهم في اتخاذ القرارات ضمن مستويات مختلفة وتحديد اتجاهات الظاهرة المدروسة مستقبلا بناء على تحليل موضوعي للبيانات المتاحة.

واستجابة لهذه الحاجة تسعى الجامعة الجزائرية إلى تحديث المقررات الدراسية للمقاييس الإحصائية وتنظيمها بهدف تسهيل استيعابها من قبل الطلبة مما يساعدهم مستقبلا عند إعداد مذكرة التخرج في القيام بإجراءات المسح الإحصائي وجمع البيانات وتحليلها مما اقتراح حلول لمشكلات ميدانية تعرقل السير الحسن للمؤسسات موضع التبرص للطلبة.

وبالحديث عن المسح الإحصائي وجمع البيانات؛ فيمكن تقسيم الدراسات والبحوث من حيث درجة الشمول لمفردات المجتمع الأصلي إلى بحوث شامة (أسلوب الحصر الشامل) وبحوث بطريقة العينات (أسلوب المعاينة). ويرتبط تحديد الأسلوب الإحصائي المناسب بهدف الدراسة وطبيعة المجتمع المدروس وإمكانات البحث، فأسلوب الحصر الشام يتعلق بدراسة حالة جميع أفراد المجتمع موضوع البحث إذا كان الغرض منه هو الحصر مثل: تعداد السكان... إلخ ويتطلب ذلك تكلفة كبيرة من الوقت والمال والجهد، أما أسلوب المعاينة فيتعلق بدراسة حالة جزء معين أو نسبة معينة من أفراد المجتمع الأصلي. ثم تعميم نتائج الدراسة على جميع أفراد المجتمع الإحصائي

وعلى هذا الأساس يعتبر أسلوب المعاينة الأكثر ملائمة مقارنة مع أسلوب الحصر الشامل في حالة كان الباحث بحاجة إلى تقليل الجهد والتكلفة، ومع ذلك يبقى لأسلوب المعاينة هامش خطأ إلا أننا لا يمكن أن نتعبه قليل الكفاءة بل إن نتائجه تتسم بالواقعية والدقة إلى حد كبير وهذا ما أثبتته الدراسات في عديد الميادين

إن هذه المطبوعة تهدف إلى تقديم بعض المفاهيم والمبادئ الأساسية في علم الإحصاء الإستدلالي والذي يعرف في المقررات الجامعية لطلبة ميدان العلوم الاقتصادية بالإحصاء 4، ولا شك أن التعرف على هذه المفاهيم هو امتداد لمحتوى الإحصاء 01 والإحصاء 02 والإحصاء 03؛ كما يعتبر إضافة لمساره التكويني الجامعي وهيئته لعالم الشغل.

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتقارير تطبيقية

وقد اشتملت الدروس المقدمة ضمن هذه المطبوعة على محاور تمثل جوهر مقياس إحصاء 4، بالإضافة إلى مجموعة من التمارين مدعمة بحلولها حتى يتسنى للطلاب الإمام بالجانبين النظري والتطبيقي للمقياس، وعليه تم تقسيم هذه المطبوعة إلى أربعة فصول أساسية:

حيث أن الفصل الأول جاء كتذكير حول بعض قوانين التوزيعات الإحتمالية المستمرة ممثلة في التوزيع الطبيعي وتوزيع كاي مربع بالإضافة الى توزيع ستيودنت وتوزيع فيشر؛ أما الفصل الثاني فيتناول توزيع المعاينة، وعن الفصل الثالث فأريد من خلاله توضيح وشرح مفاهيم نظرية التقدير وكيف يمكن تقدير مختلف معالم المجتمع انطلاقا من نتائج العينة وحسب كل حالة؛ أما الفصل الرابع فهو امتداد لنظرية التقدير من خلال اختبار فرضيات معالم المجتمع.

الفصل الأول:

قوانين التوزيعات الاحتمالية

المستمرة

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

تمهيد

تخضع مختلف الظواهر في المجال الاقتصادي على سبيل المثال لا الحصر في تغيراتها إلى قوانين احتمالية معينة، وهذه القوانين يمكن دراستها واستخدامها في دراسة تطور الظاهرة والتحكم بها وبتحديد علاقتها مع الظواهر الأخرى.

وإذا كانت الاحتمالات تتعلق بأحداث عشوائية غير أكيدة؛ فإنه يرافق نتائج التجربة العشوائية مقدار يسمى بالمتغير العشوائي والذي يأخذ قيما مختلفة حسب نتيجة التجربة العشوائية، فنعرف بذلك التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي على أنه دالة إحصائية في فضاء تجربة ما في مجموعة الأعداد الحقيقية تصف جميع القيم الممكنة والاحتمالات التي يمكن أن يأخذها المتغير العشوائي محصور بين الحد الأدنى والاعلى للقيم الممكنة.

وفي العموم يوجد نوعين من التوزيعات الاحتمالية والتي تخضع لطبيعة المتغير العشوائي: التوزيعات الاحتمالية المنقطعة والتوزيعات الاحتمالية المتصلة (المستمرة)، وهذه الأخيرة تستخدم مع المتغيرات العشوائية المستمرة (الطول؛ الوزن؛ العمر... إلخ)، وفي هذه المتغيرات لا يمكن تحديد قيم احتمالية معينة لكل قيمة من قيم المتغير العشوائي نظرا لكثرتها (حيث يوجد عدد غير منته من القيم في أي مجال من مجال تغيرها مهما كان هذا المجال صغيرا)، كما لا يمكن تمثيل الدالة الاحتمالية للمتغير المستمر بمدرج أو مضلع تكراري مثل الدالة الاحتمالية لمتغير منقطع. لذلك يمثل التوزيع الاحتمالي المستمر بمنحنى يعبر عنه بدالة تابعة لقيم المتغير العشوائي (X) من الشكل: $y = f(x)$ وهذه الدالة تسمى دالة الكثافة الاحتمالية، والاحتمالات المقابلة لقيم المتغير العشوائي تمثل المساحة التي تقع تحت المنحنى الذي تعبر عنه دالة الكثافة الاحتمالية¹.

لذلك سنتعرف في هذا الفصل على بعض التوزيعات الاحتمالية الأساسية المستمرة بداية بالتوزيع الطبيعي للتعرف على دالة كثافته الاحتمالية وخصائصه وكذا التوزيع الطبيعي المعياري، ثم توزيع كاي مربع وبعدها توزيع ستودنت وفي الأخير توزيع فيشر. وهذا كله مع أمثلة تطبيقية للمساعدة على فهم هذه التوزيعات الاحتمالية.

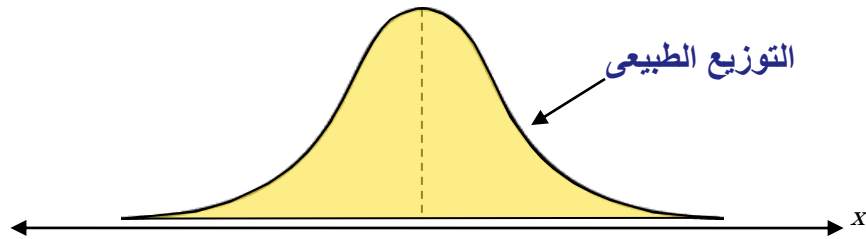
¹عبد الهادي الرفاعي، مقرر الإحصاء التطبيقي، كلية العلوم الإدارية، جامعة الشام، ص 04، أنظر الرابط: <http://www.aspu.edu.sy/lara> تاريخ الإطلاع: 2022/08/02.

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

1. التوزيع الطبيعي (Normal Distribution)

يعتبر التوزيع الطبيعي من أهم التوزيعات الاحتمالية المستمرة في علم الإحصاء، ويلعب دورا أساسيا في عملية المعاينة Sampling، كما يستخدم لدراسة سلوك المتغيرات العشوائية المتصلة مثل درجة الحرارة والطول والوزن والدخل والأخطاء العشوائية الناتجة عند تحليل الانحدار، ومن جهة أخرى يعتبر تقريب جيد لكثير من التوزيعات الاحتمالية (تقريب أغلب التوزيعات المنفصلة أو المتصلة إلى التوزيع الطبيعي) وله أهمية كبيرة في عملية الاستدلال الإحصائي. والشكل البياني الذي يأخذه التوزيع الطبيعي فهو على النحو التالي:

الشكل رقم (01-1): منحنى التوزيع الطبيعي



1.1 دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الطبيعي

إذا كان (X) متغير عشوائي مستمر يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسطه μ وتباين σ^2 فإن دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الطبيعي والتي من خلالها يمكن رسم المنحنى الاحتمالي للتوزيع الطبيعي وفق العلاقة التالية¹:

$$f(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

حيث أن:

- (X): متغير عشوائي حقيقي ($-\infty < X < +\infty$)

- (e): الأساس اللوغاريتمي الطبيعي (e=2.718)

¹التوزيع الطبيعي، ص 08، أنظر الرابط: <https://vb.ckfu.org/attachments.doc> ، تاريخ الإطلاع: 2022/08/06.

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

- π المقدار الثابت والذي يساوي 3,14؛

- σ الإنحراف المعياري؛

- μ المتوسط الحسابي.

ومنه نقول أن (X) متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط μ و تباين σ^2 . و يكتب اختصارا كما يلي:

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

2.1 خصائص التوزيع الطبيعي

يتميز التوزيع الطبيعي بمجموعة من الخصائص نذكرها في ما يلي:

❖ طرفا التوزيع تمتد من $-\infty$ إلى $+\infty$ ؛

❖ منحنى التوزيع الطبيعي منحنى متماثل حول متوسطه والذي يرمز له بالرمز μ . كما أن الدالة

$F(X)$ تأخذ القيمة نفسها في نقطتين متناظرتين بالنسبة للنقطة $\mu = x$ فإذا قمنا بحساب

$f(u+a)$ و $f(u-a)$ نجد:

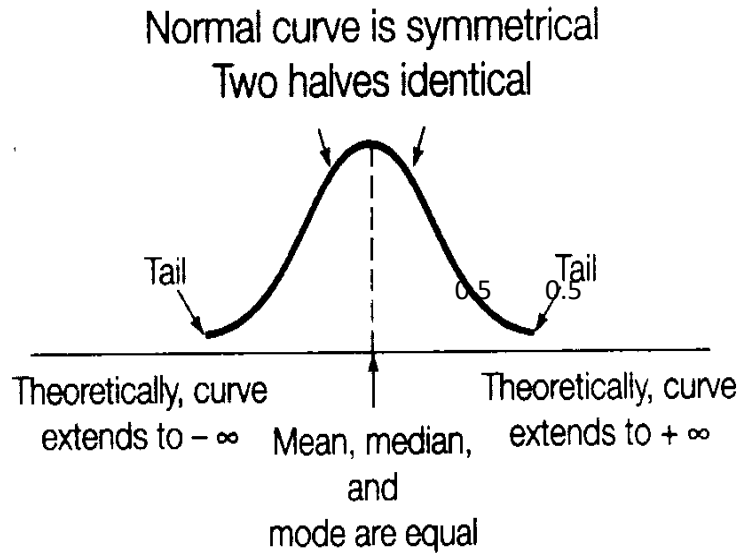
$$f(u+a) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u+a-\mu}{\sigma}\right)^2} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \ell^{-\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{\sigma^2}\right)}$$

$$f(u-a) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u-a-\mu}{\sigma}\right)^2} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \ell^{-\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{\sigma^2}\right)}$$

ومنه فإن النقطة ($X=u$) هي النقطة التي يتمركز عندها التوزيع الطبيعي حيث ($E(x)=u$) وينتشر على جانبيها بصورة متناظرة بقية القيم.

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

- ❖ المتوسط والوسيط والمنوال للتوزيع الطبيعي متساوية القيمة؛
 - ❖ المساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعي تساوى الواحد (1) وهذه المساحة تعبر عن مجموع الاحتمالات والخط الرأسى الساقط من قمة المنحنى على المحور الأفقى عند المتوسط يقسم المساحة إلى نصفين متساويين 50% من المساحة الكلية على يمين الخط العمودى ، 50 % من المساحة الكلية على يساره . وهو ما نلاحظه من الشكل التالي:
- الشكل رقم (1-02): منحنى التوزيع الطبيعي ومجموع الإحتمالات الموافقة لكل جزء



- ❖ إذا أسقطنا عمودين على المنحنى بعد انحراف معيارى واحد إلى يمين ويسار متوسط التوزيع فإن المساحة التى يحصرها هذين العمودين تمثل 68.26% تقريبا من المساحة الكلية تحت المنحنى. كذلك نجد أن المساحة التي يحصرها العمودان المقامان عند 2 انحراف معياري على جانبي متوسط التوزيع تمثل 95.44% تقريبا من المساحة الكلية تحت المنحنى . أما المساحة التي يحصرها العمودان المقامان عند 3 انحرافات معيارية على جانبي متوسط التوزيع فتمثل 99.74% تقريبا من المساحة الكلية تحت المنحنى . هذا ويمكن التعبير عما سبق رمزيا كالآتي :

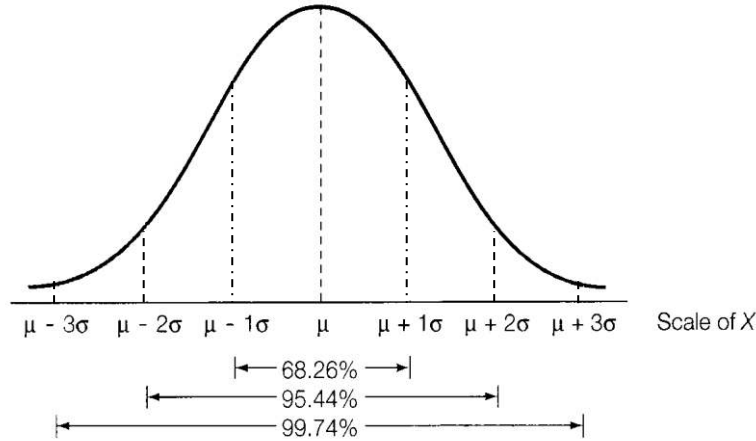
$$p (\mu - 1\sigma < x < \mu + 1\sigma) = 0.6826$$

$$p (\mu - 2\sigma < x < \mu + 2\sigma) = 0.9544$$

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

$$p(\mu - 3\sigma < x < \mu + 3\sigma) = 0.99.74$$

الشكل رقم: (03-1): منحنى التوزيع الطبيعي والمساحة الممثلة لتغيرات المتوسط والانحراف المعياري



3.1 التوزيع الطبيعي المعياري Standard Normal Distribution

إن استخدام دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الطبيعي لحساب الاحتمالات المختلفة تواجهها صعوبات رياضية كثيرة تعتمد بالدرجة الأولى على معرفة تامة بعلم التكامل لذلك يتم الاعتماد على النشر المحدود لسلسلة تايلور في جوار نقط متتالية.

كما أنه يوجد عدد لا نهائي من التوزيعات الطبيعية والتي تحدد كل منها قيم المعلمتين μ ، σ الذين يختلفان من متغير عشوائي إلى آخر، وبالتالي تكوين عدد لا نهائي من الجداول حسب قيم μ ، σ وهو ما يعد أمراً شبه مستحيل، إلا أنه يمكن تحويل أي توزيع طبيعي إلى توزيع طبيعي معياري له جدول خاص والذي من خلاله يتم حساب جميع الاحتمالات الممكنة.

1.3.1 دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الطبيعي المعياري

التوزيع الطبيعي المعياري هو توزيع طبيعي بمتوسط $\mu = 0$ وتباين $\sigma^2 = 1$. أي أن أي قيمة من قيم المتغير العشوائي (X) الذي يتبع التوزيع الطبيعي يمكن تحويلها إلى المتغير Z الذي يتبع التوزيع الطبيعي المعياري باستخدام العلاقة التالية:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

حيث أن:

$$Z \sim N(0, 1)$$

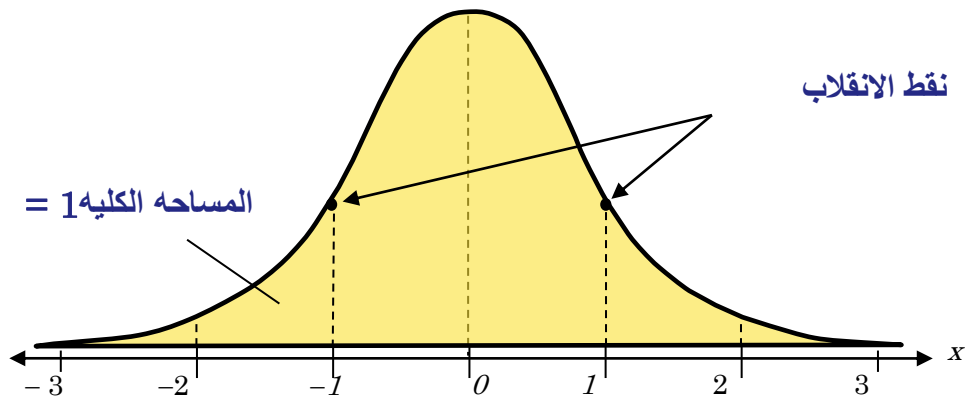
ودالة الكثافة الإحصائية لمتغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي المعياري تعطى كما يلي:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}},$$

حيث أن: $(-\infty < Z < +\infty)$

والشكل التالي يوضح المنحنى الاحتمالي للتوزيع الطبيعي المعياري

الشكل رقم: (1-04): المنحنى الاحتمالي للتوزيع الطبيعي المعياري



2.3.1 خصائص المنحنى الإحصائي للتوزيع الطبيعي المعياري

يتميز التوزيع الطبيعي المعياري بمجموعة من الخصائص نذكرها في ما يلي:

❖ طرفا التوزيع تمتد من $-\infty$ إلى $+\infty$ ؛❖ متماثل حول العمود الذي يمر بقمته أى عند $Z = \mu = 0$ لذلك فإن هذا العمود يجزئ المنحنى

الطبيعي القياسي إلى قسمين متماثلين في الشكل والمساحة؛

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

- ❖ المنحنى له نقطتا انقلاب عند $Z = \pm 1$ ؛
- ❖ المساحة الكلية تحت المنحنى تساوى الواحد الصحيح ؛
- ❖ نظرا لتطابق جانبيه وتوسط تفرطحه فإن مقاييس النزعة المركزية الثلاثة (الوسط الحسابي والوسيط والمنوال) تلتقي في نقطه واحده (في منتصف التوزيع) أي أن الوسط الحسابي = الوسيط = المنوال = 0؛
- ❖ نلاحظ أن 99.7% من قيم المتغير تقع تقريبا في الفترة (-3, 3) أي أنه نادرا ما نجد قيمه من قيم X خارج هذه الفترة . كما أن 95.5% من قيم المتغير Z تقع في الفترة (-2, 2) وأن 68 % منها تقع في الفترة (-1,1)

ومنه يمكن حساب احتمال وقوع الحدث Z في أي فتره نريدها وذلك بإيجاد قيمه تكامل داله الكثافة الاحتمالية في هذه الفترة أي بإيجاد المساحة المحصورة تحت منحنى هذه الدالة داخل هذه الفترة ولأن متوسط التوزيع الطبيعي المعياري دائما يساوى صفر وتباينه يساوى واحد فقد تم عمل جدول يعطى احتمالات وقوع المتغير Z في فتره معينه .

3.3.1 القيم المميزة للتوزيع الطبيعي المعياري

- التوقع الرياضي: $E(Z) = 0$
- التباين: $V(Z) = 1$
- الإنحراف المعياري: $\delta = 1$

4.3.1 خاصية حساب الاحتمالات للتوزيع الطبيعي المعياري

لمعرفة كيف نحسب مختلف الاحتمالات المطلوبة بالإعتماد على جدول التوزيع الطبيعي نعتمد على العلاقات التالية:

- $P(Z < 0) = P(Z > 0)$
- $P(Z > A) = 1 - P(Z < A)$
- $P(Z < -A) = P(Z > A)$
- $P(A < Z < B) = P(Z < B) - P(Z < A)$

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

$$\begin{aligned} \blacksquare P(-A < Z < A) &= P(Z < A) - P(Z < -A) \\ &= P(Z < A) - (1 - P(Z < A)) = 2P(Z < A) - 1 \end{aligned}$$

مثال 01:

إذا كانت نقاط الطلبة في مقياس الإحصاء 3 تخضع للتوزيع الطبيعي بمتوسط 14 وتباين 1,44، أوجد نسبة الطلبة الذين تقل نقاطهم عن 16,5 في مادة الإحصاء 3

الحل:

$$\text{لدينا: } x \sim N(\mu; \sigma^2) \Rightarrow x \sim (14; 1.44)$$

ولإيجاد نسبة الطلبة الذين تقل نقاطهم 16,5 علينا أن نتقل من التوزيع الطبيعي إلى التوزيع الطبيعي المعياري (Z)، وفق العلاقة الرياضية التالية:

$$P(X < 16.5) = P\left(Z < \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}\right)$$

لدينا:

$$\begin{aligned} P\left(Z < \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}\right) &= P\left(Z < \frac{16.5 - 14}{1.2}\right) \\ &= P(Z < 2.08) \end{aligned}$$

ومنه:

$$P(X < 16.5) = P(Z < 2,08)$$

بالإستعانة بجدول التوزيع الطبيعي المعياري الموجود في الملحق نجد:

$$P(Z < 2,08) = 0,9812$$

وبالتالي فإنه نسبة الطلبة الذين تقل نقاطهم عن 16,5 هي 98,12%.

4.1 شرح كيفية استخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

جدول التوزيع الطبيعي المعياري يشمل سطرين؛ السطر العمودي والسطر الأفقي، حيث أن السطر العمودي يمثل الجزء الصحيح والرقم الأول بعد الفاصلة من قيمة (Z)، أما السطر الأفقي فيمثل الرقم الثاني

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

بعد الفاصلة من قيمة (Z). وفي حالة مثالنا فإن قيمة (Z=2.08)، فعند تقاطع السطر والعمود المكون للقيمة 2,08 نجد الإحتمال 0.9812. كما هو موضح فيما يلي:

الجدول رقم (1-01): منهجية استخراج القيم الجدولية للتوزيع الطبيعي المعياري

Z	0.00	0.01	0.02		0.08	0.09
0.0						
0.1						
.						
2.0					09812	
.						
3						

مثال 02:

تم تركيب بطارية في إحدى الهواتف؛ عمرها الافتراضي يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط 2,6 سنة وانحراف معياري 0,64 ، فما هو احتمال أن يكون العمر الافتراضي لهذه البطارية أكبر من 1,6؟

الحل:

لدينا: $x \sim N(2,6; 0.64)$

كما أن:

$$P(X > 1,6) = P(Z > \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma})$$

لدينا:

$$P\left(Z > \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}\right) = P\left(Z > \frac{1,6 - 2,6}{0,8}\right) = P(Z > -1,25)$$

ومنه:

$$P(X > 1,6) = P(Z > -1,25)$$

وبالاستعانة بجدول التوزيع الطبيعي المعياري الموجود في الملحق نجد:

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

$$P(Z > -1,25) = P(Z < 1,25) = 0,8944$$

وبالتالي فإن احتمال أن يكون العمر الافتراضي لهذه البطارية أكبر من 1,6 هو 89,44%.

2. توزيع مربع كاي Chi-square Distribution

قام العالم Karl Person سنة 1900 بوضع أسس اختبار معنوية البيانات العددية Enumeration Data حيث يسجل هذا الاختبار عدد الأفراد أو الحالات التي تقع داخل قسم معين أطلق عليها مربع كاي ورمز له بالرمز $(X^2)^1$.

ويعد توزيع مربع كاي من التوزيعات الإحصائية المستمرة المهمة في علم الإحصاء كونه يستخدم في اختبار الفرضيات ذات الصلة بتباين مجتمع طبيعي، ومدى توافق النتائج التي يتحصل عليها الباحث فعليا من التجربة أو البحث (القيمة المشاهدة Observed Value) بالنتائج المتوقعة الحصول عليها نظريا طبقا لنظرية فرضية محددة بدرجة احتمال معينة (Expected Value). بالإضافة إلى اختبارات التجانس والإستقلالية بين الظواهر... إلخ².

1.2 تعريف توزيع مربع كاي

ليكن (X) متغير عشوائي ضمن فضاء احتمالي معين $[\Omega, A, P]$ ، فعندئذ يقال عن (X) انه خاضع لتوزيع كاي مربع بمعلمة $(v \in N)$ والتي تسمى درجات الحرية إذا كانت دالة كثافته الإحصائية معطاة على النحو التالي³:

¹ محمد عبد الحميد، إحصاء متقدم، جامعة الزقازيق، مصر، ص03، أنظر الرابط: <https://sciences-library.blogspot.com/2018/01/Principles-of-Statistics-and-Probability-pdf.html> تاريخ الإطلاع:

2022/08/22

² حميد عويد مشرف العلوك، عبيد جفين جليغم القحطاني: الإحصاء والاحتمالات (نظرية وتطبيقات)، دار جامعة الملك سعود للنشر، 2019، ص335.

³ علي عبد السلام العماري، علي حسين العجيلي: الإحصاء والاحتمالات النظرية والتطبيق، ط4، دار الحكمة للطباعة والنشر والتوزيع، طرابلس، ليبيا، 2013، ص387.

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

$$\begin{cases} \frac{1}{2^{v/2}\Gamma(v/2)} X^{\frac{v}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} & X > 0 \\ 0 & X \leq 0 \end{cases}$$

ويرمز لذلك عادة بالرمز $X \sim \chi^2(v)$ وإن:

$$E(X) = v$$

$$V(X) = 2v$$

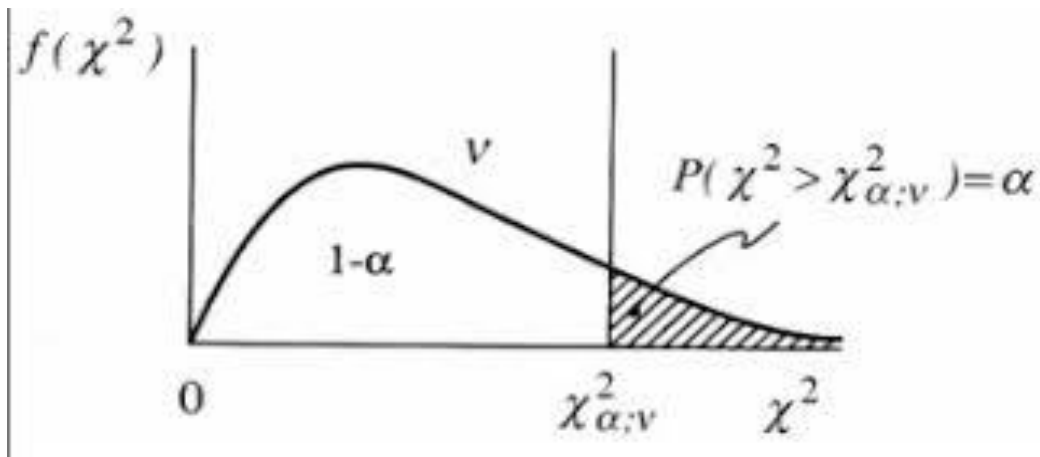
إن دالة الكثافة الإحصائية لتوزيع كاي مربع تعتمد على v ، وبالتالي لكل قيمة من درجة الحرية سيكون لهذه الدالة شكل خاص بها، ولهذا السبب وضعت جداول خاصة بهذا التوزيع لقيم $(v=1,2,3, \dots)$ وذلك لحساب الإحتمالات تحت منحنى هذا التوزيع وهي معطاة بالجدول رقم (02) في الملحق.

وبتعريف $\chi^2_{(\alpha,v)}$ القيمة المعنوية لمتغير مربع كاي بدرجات حرية تساوي (v) بحيث أن احتمال $\chi^2(v)$ أكبر من هذه القيمة يساوي α ، أي أن:

$$p(\chi^2(v) > \chi^2_{(\alpha,v)}) = \int_{\chi^2_{(\alpha,v)}}^{\infty} f_X(X) dx = \alpha$$

وهذا الاحتمال موضح في المنطقة المظللة في الشكل التالي:

الشكل رقم (1-05): يوضح دالة الكثافة الإحصائية لتوزيع كاي مربع



أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

من الشكل رقم (1-05) يتضح أن توزيع كاي مربع ملتوي ناحية اليمين وله منوال واحد، كما أنه يأخذ أشكالاً مختلفة حسب قيمة درجة الحرية (v) والتي كلما كبرت اقترب توزيع كاي مربع من التوزيع الطبيعي.

2.2 نظريات تطبيقية على توزيع مربع كاي

نظرية 01: إذا كانت المتغيرات العشوائية ($X_1; X_2; \dots; X_v$) مستقلة وتتبع التوزيع الطبيعي بتوقع يساوي الصفر وتباين يساوي الواحد، فإن المتغير العشوائي $X^2 = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_v^2$ يتوزع وفق توزيع مربع كاي بدرجات حرية تساوي (v)

نظرية 02: إذا كانت المتغيرات العشوائية المستقلة ($U_1; U_2; \dots; U_k$) كل منها تتبع توزيع كاي مربع بدرجات حرية ($v_1; v_2; \dots; v_k$) على الترتيب فإن المتغير العشوائي ($W = U_1 + U_2 + \dots + U_k$) يتبع توزيع كاي مربع بدرجات حرية تساوي ($V = v_1 + v_2 + \dots + v_k$)

3.2 استخدامات توزيع كاي مربع

لتوزيع كاي مربع العديد من الاستخدامات في المجال الإحصائي تتمثل فيما يلي:

- ❖ الاختبارات المتعلقة بتباين المجتمع؛
- ❖ الاختبار حول تساوي عدة تباينات؛
- ❖ اختبار حسن المطابقة (جودة التوفيق)؛
- ❖ اختبار الاستقلالية.

مثال 03:

إذا كان χ^2_v يرمز لمتغير عشوائي يتبع توزيع مربع كاي بدرجات حرية (v) من جدول توزيع كاي أوجد ما يلي: $\chi^2_{(0.25,6)}$ ؛ $\chi^2_{(0.05,20)}$ ؛ $\chi^2_{(0.90,25)}$

الحل:

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

من جدول توزيع كاي مربع؛ وبالنظر في عمود درجات الحرية عند ($V=6$) وبمستوى معنوية ($\alpha=0.25$) نجد أن التقاطع بينهما عند القيمة 7.84 أي أن:

$$x^2_{(0.25,6)} = 7.84$$

ولتوضيح كيفية استخراج هذه القيمة من جدول توزيع مربع كاي نعتمد على الجدول التالي:

الجدول رقم (02-1): منهجية استخراج القيم الجدولية لتوزيع كاي مربع

v	0.001			0.25	
1					
.					
.					
6				7.84	

➤ $x^2_{(0.05, 20)} = 40$

➤ $x^2_{(0.90,25)} = 16.47$

مثال (04):

إذا كان $x^2_{(v)}$ يرمز لمتغير عشوائي يتبع توزيع مربع كاي.

■ أوجد ما يلي: $P(X^2 > 12.55)$

$P(X^2 < 20.48)$, $P(15.99 < X^2 < 29.59)$

الحل:

لايجاد القيم الاحتمالية المطلوبة نعتمد على جدول توزيع كاي مربع ونقوم بالبحث عن هذه القيم الاحتمالية فنجدها عند درجة حرية ($V=10$) ومنه:

➤ $P(X^2 > 12.55) = 0.25$

➤ $P(X^2 < 20.48) = 1 - P(X^2 < 20.48)$

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

$$= 1 - 0.025$$

$$\Rightarrow P(X^2 < 20.48) = 0.975$$

$$\Rightarrow P(15.99 < X^2 < 29.59) =$$

$$\begin{aligned} & P(X^2 < 29.59) - P(X^2 < 15.99) \\ &= [1 - P(X^2 > 29.59)] - [1 - P(X^2 > 15.99)] \\ &= (1 - 0.001) - (1 - 0.1) = 0.099 \\ &\Rightarrow P(15.99 < X^2 < 29.59) = 0.099 \end{aligned}$$

3. توزيع ستيودنت The Student Distribution

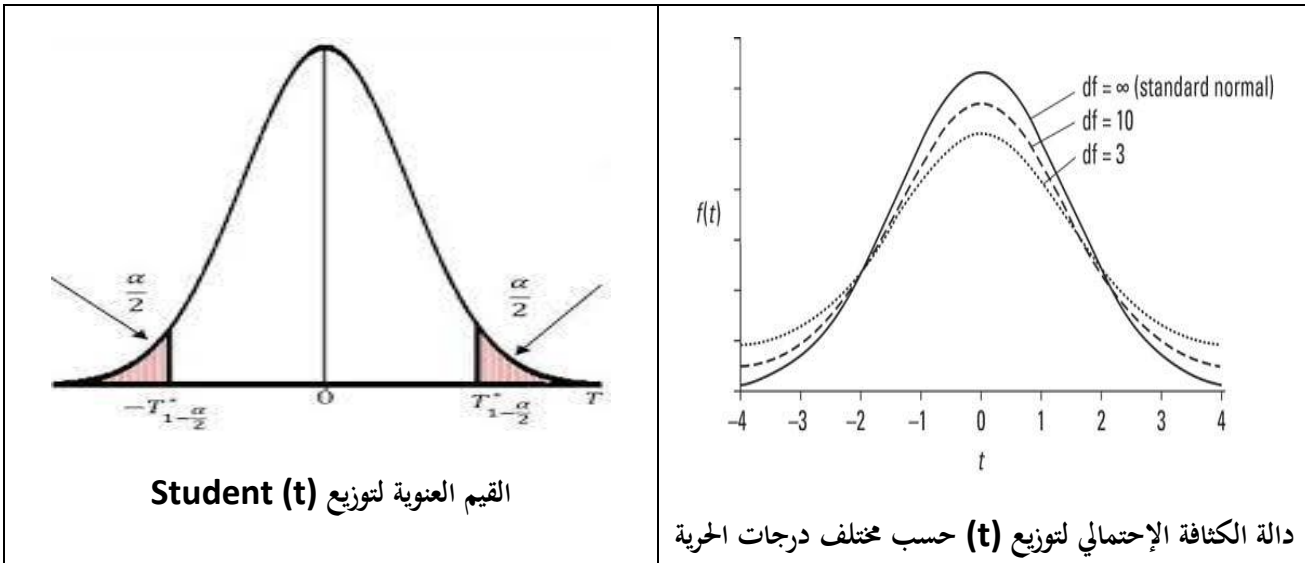
يعتبر توزيع ستيودنت كذلك من أهم التوزيعات الاحتمالية المستخدمة في اختبار الفرضيات وخاصة عندما يكون حجم العينة أقل من (30) مشاهدة والانحراف المعياري للمجتمع الإحصائي غير معروف، ونقول عن المتغير العشوائي أن له توزيع (t) إذا كانت دالة كثافته الاحتمالية على النحو التالي¹:

$$f_x(X) = \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\sqrt{v\pi} \times \Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \times \left(1 + \frac{X^2}{v}\right)^{-\frac{v+1}{2}} ; \forall x \in R$$

حيث أن: v: تمثل درجة الحرية، وتساوي حجم العينة ناقص 1، أي: (v=n-1)

ويعبر عن المتغير العشوائي (X) الذي يتبع توزيع ستيودنت بالرمز $X \sim t(n)$ ، والتمثيل البياني لدالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع ستيودنت نجده من أجل قيم مختلفة لعدد درجات الحرية (v) وهو موضح في الشكل التالي:

الشكل رقم (01-06): دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع ستيودنت عند مختلف درجات الحرية



¹ شوم إيزي: الإحتمالات والإحصاء، الدار الدولية للإستثمارات الثقافية، مصر، 2004، ص 138.

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

من الشكلين أعلاه يتضح دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع (t) متماثلة أي أن $f(t) = f(-t)$ ولها شكل يشبه شكل التوزيع الطبيعي، كما أنها تقترب من الصفر كلما كانت T تقترب من مالا نهاية، وعندما تكون n كبيرة فإن توزيع ستيودنت يقترب من التوزيع الطبيعي.

ملاحظة:

إن التعامل مع هذه الصيغة الرياضية في الحسابات صعب جدا، لذلك تستخدم جداول لحساب قيم دالة توزيع (t) ، وهو الجدول رقم (03) الموجود في قائمة الملاحق؛

وإن جدول توزيع ستيودنت يعطي قيما لدالة الكثافة الاحتمالية من أجل قيم مختلفة لدرجات الحرية وقيما محددة للإحتمالات التي تأخذها دالة توزيع هذه القيم، فعلى سبيل المثال من أجل $v=4$ و $P(X>x)=0,025$ فإن قيمة x الموافقة لهذا الإحتمال 2,776، بمعنى أن x هنا هي تلك القيمة على المحور الأفقي (X) التي يقع على يمينها وتحت منحنى دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع ستيودنت ذو 4 درجات حرية مساحة قدرها 0.025.

1.3 خصائص توزيع ستيودنت

لتوزيع ستيودنت مجموعة من الخصائص نوجزها فيما يلي:

- ❖ يلعب هذا التوزيع دورا هاما في العينات الصغيرة ($N < 30$) وكذا اختبار الفروض؛
- ❖ يوجد عدد غير محدود من توزيعات ستيودنت والتي يمكن التعرف على كل منها باستخدام واحدة من درجات الحرية (V) ؛
- ❖ تحدد درجات الحرية شكل التوزيع، فكلما زادت درجة الحرية كلما نقصت قيمة التباين وكانت قيم المتغير أكثر تجانسا؛
- ❖ كلما زادت درجة الحرية اقترب التباين من الواحد الصحيح فيكون توزيع ستيودنت اشبه بالتوزيع الطبيعي المعياري.

مثال (05):

بالاعتماد على جدول توزيع ستيودنت أوجد القيم التالية: $t(0.05 ; 20)$; $t(0.025 ; 10)$;

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

الحل:

من جدول توزيع (T) فإن :

$$\text{➤ } t_{(0.05,20)} = 1.725$$

$$\text{➤ } t_{(0.025,10)} = 2.228$$

مثال 06:أوجد قيمة (α) في كل مما يلي :

$$t_{(\alpha;21)}=1.988; /2 \text{ ؛ } t_{(\alpha;18)}=1.330; /1$$

الحل:1- بالبحث في جدول توزيع ستيودنت فإن تقاطع صف درجات الحرية $(df=18)$ مع جميع قيم α عند القيمة 1.330 نجدها تقابل القيمة $(\alpha = 0.1)$

2- بنفس الطريقة السابقة نجد:

$$t_{(\alpha,21)} = 1.988 \Rightarrow \alpha = 0.03$$

4. توزيع فيشر

لقد اكتشف هذا التوزيع من قبل العالم الإنجليزي (Ronald Rylmer Fisher) حوالي سنة 1920 وسماه توزيع (Z) ولا يقصد به التوزيع الطبيعي المعياري، ثم بعد ذلك حوله (Snedecor) إلى توزيع (F). ويستخدم توزيع فيشر لاجراء العديد من اختبارات الفروض المتعلقة بتحليل التباين وتصميم التجارب واختبار معنوية خطوط الانحدار¹.

1.4 طبيعة توزيع فيشر

يعرف توزيع (F) بأنه النسبة بين توزيعين مستقلين من توزيعات مربع كاي بعد قسمة كل منهما على درجات حريته²، فإذا كان المتغيرين العشوائيين (X) و (Y) يتبعان توزيع مربع كاي بدرجات حرية (v_1) و (v_2) على التوالي فإن المتغير العشوائي :

¹علي عبد السلام العماري، علي حسين العجيلي، مرجع سابق ص393.

²نفس المرجع ص393.

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

$$F = \frac{X/v_1}{Y/v_2}$$

له توزيع فيشر (f) بدرجات حرية (v_1) و (v_2) ورمز له بالرمز $f(v_1; v_2)$ ودالة كثافته الاحتمالية تعطى بالصيغة التالية:

$$f(x) \begin{cases} \frac{\Gamma(\frac{v_1+v_2}{2})}{\Gamma(\frac{v_1}{2})\Gamma(\frac{v_2}{2})} \cdot (V_1)^{\frac{v_1}{2}} \cdot (V_2)^{\frac{v_2}{2}} \cdot (X)^{\frac{(v_1)}{2}-1} \cdot (V_1 + V_2 X)^{-\frac{(v_1+v_2)}{2}} & X > 0 \\ 0 & X \leq 0 \end{cases}$$

حيث أن:

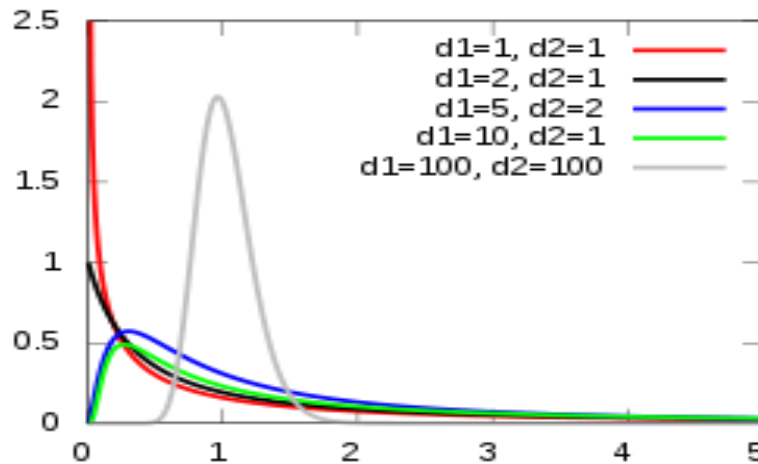
$$(V_1 = n_1 - 1)$$

$$(V_2 = n_2 - 1)$$

2.4 الشكل البياني لتوزيع فيشر

وإن الرسم البياني لدالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع Fisher يتغير بتغير قيم درجات الحرية، والشكل التالي مختلف المنحنيات من أجل قيم مختلفة لكل من (v_1) و (v_2) .

الشكل رقم (01-07): توزيع فيشر حسب درجات الحرية



أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

3.4 خصائص توزيع فيشر:

ومن خصائص توزيع (F) أن متوسطه هو:

$$U = \frac{V_2}{V_2 - 2} ; V_2 > 2$$

أما تباين توزيع (F) فهو:

$$\sigma^2 = \frac{2v_2^2(v_1 + v_2 + 2)}{v_1(v_2 - 4) \cdot (v_2 - 2)^2}$$

كما أن للتوزيع (F) منوال وحيد في القيمة:

$$F_{mode} = \left(\frac{v_1 - 2}{v_1} \right) \cdot \left(\frac{v_2}{v_2 + 2} \right)$$

ونظرا لأهمية توزيع (F) فقد وضعت جداول خاصة به عند قيم مختلفة لكل من (v_1) ، (v_2) و (α) كما هو موضح في الجدول رقم في الملحق.

ملاحظة:

هناك بعض قيم α غير موجودة في جداول توزيع F وفي مثل هذه الحالات نستخدم العلاقة التالية:

$$F_{(\alpha, v_1, v_2)} = \frac{1}{F_{(1-\alpha, v_2, v_1)}}$$

مثال 07:

أوجد قيمة كل مما يلي:

$$F_{(0.05, 4, 10)} \quad -1$$

$$F_{(0.01, 4, 10)} \quad -2$$

$$F_{(0.99, 5, 15)} \quad -3$$

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

$$F_{(0.95,8,21)} -4$$

الحل:

بالبحث في جدول توزيع فيشر نجد:

$$1- F_{(0.05,4,10)} = 3.48$$

$$2- F_{(0.01,4,10)} = 5.99$$

$$3- F_{(0.99,5,15)} = \frac{1}{F_{(0.01,15,5)}} = \frac{1}{9.72} = 0.1029$$

$$4- F_{(0.95,8,24)} = \frac{1}{F_{(0.05,24,8)}} = \frac{1}{5.28} = 0.1893$$

5. تمارين محلولة:

التمرين الأول:

- عرف المتغير العشوائي المستمر
- ما المقصود بدالة الكثافة الاحتمالية؟
- ما هي شروط الدالة الاحتمالية للمتغير المستمر؟

الحل:

- 1- المتغير العشوائي المستمر: هو المتغير الذي يمكن أن يأخذ عددا غير منته من القيم في مجال تغيره؛ مثل (الوزن؛ الطول؛ الزمن... إلخ).
- 2- دالة الكثافة الاحتمالية: هي الدالة الممثلة للتوزيع الاحتمالي المستمر عن طريق التكامل.
- 3- شروط الدالة الاحتمالية للمتغير المستمر: هناك شرطين للدالة الاحتمالية للمتغير المستمر معرفة كما يلي:

$$\begin{cases} f(X) \geq 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(X)dx = 1 \end{cases}$$

التمرين الثاني:

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

إذا كان (X) متغير عشوائي مستمر يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط 60 وتباين 16.

المطلوب:

- 1- اكتب دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي (X)
- 2- أوجد احتمال $P(x < 65)$ باستخدام دالة الكثافة الاحتمالية
- 3- أوجد الاحتمال السابق باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري
- 4- أوجد الاحتمالات التالية: $P(X < 55)$; $P(X > 58)$; $P(55 < X < 65)$; $P(58 \leq X \leq 67)$

الحل

من المعطيات لدينا: $X \sim N(60, 16)$

➤ كتابة دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير المستمر (X)

إن دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير المستمر (X) تعطى كما يلي:

$$f(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

ومنه:

$$f(X) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{X-60}{4}\right)^2}$$

➤ حساب احتمال باستخدام دالة الكثافة الاحتمالية

$$P(X < 65) = \int_{-\infty}^{65} f(X)dx = \int_{-\infty}^{65} \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{X-60}{4}\right)^2}$$

إن استخدام دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الطبيعي لحساب احتمال $P(X < 65)$ تواجهه صعوبات كبيرة تعتمد بالدرجة الأولى على معرفة تامة بعلم التكامل، لهذا نلجأ إلى استخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري.

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

➤ إيجاد احتمال $P(X < 65)$ باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري

لدينا:

$$P(X < 65) = P\left(Z < \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}\right) = P\left(z < \frac{65 - 60}{4}\right) = P(z < 1.25)$$

بالاعتماد على جدول التوزيع الطبيعي المعياري فإن:

$$(X < 65) = P(z < 1.25) = 0.8943$$

ومنه فإن احتمال أن يأخذ المتغير العشوائي (x) قيمة أقل من 65 هو 89.43%.

➤ حساب الاحتمالات التالية:

$$P(X > 62) = P\left(Z > \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}\right) = P\left(z > \frac{62 - 60}{4}\right) = P(z > 0.5)$$

بالاعتماد على خصائص حساب احتمالات التوزيع الطبيعي المعياري فإن:

$$P(X > 62) = P(z > 0.5) = 1 - P(z < 0.5)$$

$$= 1 - P(z < 0.5) = 1 - 0.69146 = 0.3085$$

$$P(X < 55) = P\left(z < \frac{55 - 60}{4}\right) = P(z < -1.25)$$

$$= P(z > 1.25) = 1 - P(z < 1.25)$$

ومنه:

$$P(X < 55) = 1 - 0.8943 = 0.1057$$

$$P(56 < X < 64) = P\left(\frac{56 - 60}{4} < Z < \frac{64 - 60}{4}\right) = P(-1 < z < 1)$$

$$= 2P(Z < 1) - 1$$

$$= 2P(Z < 1) - 1 = 2(0.8413) - 1 = 0.6826$$

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

ومنه احتمال أن يأخذ المتغير العشوائي (X) قيمة محصورة بين (56 و64) هو 68.26%.

التمرين الثالث:

إذا كان (X) متغير عشوائي يتبع التوزيع بمتوسط 100 وتباين 25 وكان $P(X < a) = 0.95$

المطلوب:

1- أوجد قيمة a.

2- إذا كانت $P(X < b) = 0.05$ فأوجد قيمة b

الحل:

لدينا: $\mu = 100, \sigma^2 = 25, \sigma = 5$ ومنه فإن

$$X \sim N(100, 25)$$

بناء على قانون التوزيع الطبيعي المعياري يكون:

$$P(X < a) = 0.95 \Rightarrow P\left(Z < \frac{a - \mu}{\sigma}\right) = 0.95$$

ومنه:

$$P(X < a) = P\left(Z < \frac{a - 100}{5}\right) = 0.95$$

0.95 هي القيمة المجدولة والتي نبحث عنها داخل جدول التوزيع الطبيعي المعياري أو أقرب قيمة مساوية لها كما هو موضح في الجدول التالي:

Z	0.00	0.01	0.02		0.04	0.05		
0.0								
0.1								
.								
1.6					0.9495	0.9505		

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

نلاحظ من خلال جدول التوزيع الطبيعي المعياري أن القيمتين المجدولتين 0.9495 و 0.9505 هما الأقرب للقيمة المجدولة 0.95 ولكنهما تبعدان بنفس المسافة هي 0.0005 في هذه الحالة نقوم بحساب قيمة (Z) كما يلي:

$$Z = \frac{0.9495 + 0.9505}{2} \Rightarrow Z = \frac{1.64 + 1.65}{2} = 1.645$$

ومنه:

$$\frac{a - 100}{5} = 1.645 \Rightarrow a = 108.225$$

إيجاد قيمة b:

$$P(X < b) = 0.05 \Rightarrow P\left(Z < \frac{b - 100}{5}\right) = 0.05$$

0.05 غير موجودة ضمن القيم المجدولة لجدول التوزيع الطبيعي المعياري؛ لذا سنبحث عن القيمة التي تعطينا احتمال 0.05 وفق العلاقة التالية:

$$1 - \left[-\left(\frac{b - 100}{5}\right)\right] = 0.05$$

ومنه:

$$\frac{-b + 100}{5} = 0.95$$

إن قيمة الموافقة لاحتمال 0.95 ضمن القيم المجدولة هي 1.645 والتي كنا قد بحثنا عنها في السؤال السابق، وبالتالي: فإن:

$$\frac{-b + 100}{5} = 0.95 \Rightarrow b = 91.775$$

التمرين الرابع:

إذا كان العمر الافتراضي لبطاريات سيارة Symbol والمنتجة من طرف شركة Renault تتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط 1000 شهر وانحراف يساوي 100 شهر، فإذا تم اختيار سيارة من المصنع بطريقة عشوائية، فأوجد احتمال أن يكون عمرها الافتراضي:

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

- 1- أقل من 930 شهر؛
- 2- أكثر من 780 شهر؛
- 3- أكثر من 1000 شهر؛
- 4- ما بين 700 و 1150 شهر؛
- 5- ما بين 800 و 950 شهر.

الحل:

لدينا: $X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow X \sim N(1000, 10000)$

➤ إيجاد احتمال أن يكون العمر الافتراضي لبطارية السيارة أقل من 930 شهر:

$$P(X < 930) = P\left(Z < \frac{930 - 1000}{100}\right) = P(Z < -0.7)$$

$$\begin{aligned} P(Z < -0.7) &= P(Z > 0.7) = 1 - P(Z < 0.7) \\ &= 1 - 0.7580 = 0.242 \end{aligned}$$

ومنه احتمال أن يكون العمر الافتراضي لبطارية السيارة أقل من 930 شهر هو 24.2%.

➤ احتمال أن يكون العمر الافتراضي لبطارية السيارة أكثر من 780 شهر:

$$P(X > 780) = P\left(Z > \frac{780 - 1000}{100}\right) = P(Z > -2.2)$$

$$= P(Z > -2.2) = P(Z < 2.2) = 0.9867$$

ومنه احتمال أن يكون العمر الافتراضي لبطارية السيارة أكثر من 780 شهر هو 98.67%.

➤ احتمال أن يكون العمر الافتراضي لبطارية السيارة أكثر من 1000 شهر:

$$P(X > 1000) = P\left(Z > \frac{1000 - 1000}{100}\right) = P(Z > 0)$$

$$= P(Z > 0) = P(Z < 0) = 0.5$$

ومنه احتمال أن يكون العمر الافتراضي لبطارية السيارة أكثر من 1000 شهر هو 50%.

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

➤ احتمال أن يكون العمر الافتراضي لبطارية السيارة محصورا بين 700 و 1150 شهر:

$$\begin{aligned} P(700 < X < 1150) &= P\left(\frac{700 - 1000}{100} < Z < \frac{1150 - 1000}{100}\right) \\ &= P(-3 < Z < 1.5) = P(Z < 1.5) - P(Z < -3) \\ &= P(Z < 1.5) - [1 - P(Z < 3)] \\ &= 0.93319 - [1 - 0.99865] = 0.93184 \end{aligned}$$

ومنه احتمال أن يكون العمر الافتراضي لبطارية السيارة محصورا بين 700 و 1150 شهر هو 93.184%.

➤ احتمال أن يكون العمر الافتراضي لبطارية السيارة محصورا بين 899 و 950 شهر:

$$\begin{aligned} P(800 < X < 950) &= P\left(\frac{800 - 1000}{100} < Z < \frac{950 - 1000}{100}\right) \\ &= P(-2 < Z < -0.5) = P(Z < -0.5) - P(Z < -2) \\ &= [1 - P(Z < 0.5)] - [1 - P(Z < 2)] \\ &= [1 - 0.69146] - [1 - 0.97725] = 0.28579 \end{aligned}$$

ومنه احتمال أن يكون العمر الافتراضي لبطارية السيارة محصورا بين 899 و 950 شهر هو 28.57%.

التمرين الخامس:

إذا كان المتغير العشوائي (X) له توزيع كاي مربع بدرجات حرية 10، فالمطوب:

- 1- كتابة شكل دالة الكثافة الاحتمالية لهذا المتغير
- 2- أوجد احتمال $P(X \leq 3.94)$
- 3- أوجد قيمة $X^2_{(0.99; 10)}$
- 4- من أجل $v=5$ أوجد : $X^2_{(0.99; 5)}$ و $X^2_{(0.995; 5)}$
- 5- من أجل $v=12$ أوجد : $X^2_{(0.025; 12)}$ ، $X^2_{(0.975; 12)}$ و $X^2_{(0.99; 12)}$

الحل:

بما أن: $X \sim \chi^2_v$ فإن دالة كثافته الاحتمالية تعطى على النحو التالي:

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

$$\begin{cases} \frac{1}{2^{v/2}\Gamma(v/2)} X^{\frac{v}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} & X > 0 \\ 0 & X \leq 0 \end{cases}$$

وبما أن $(v=5)$ فإن دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير (X) تكون كما يلي:

$$\begin{cases} \frac{1}{2^{5/2}\Gamma(5/2)} X^{\frac{5}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} & X > 0 \\ 0 & X \leq 0 \end{cases}$$

➤ إيجاد الاحتمال $P(X \leq 3.94)$.

$$P(X < 3.94) = \int_0^{3.94} f(x) dx = \int_0^{3.94} \frac{1}{2^{5/2}\Gamma(5/2)} X^{\frac{5}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx$$

بما أن الاحتمال صعب ايجاده عن طريق التكامل نعلم على جدول التوزيع الإحصائي لتوزيع كاي

مربع فنجد:

v	0.005	0.01	0.05	0.1	
1					
.					
10			3.94		

من خلال الجدول أعلاه فإن قيمة احتمال $P(X \leq 3.94)$ هو 5%.

➤ إيجاد قيمة $X^2_{(0.99;10)}$

$X^2_{(0.99;10)}$ تعني قيمة المتغير (X) الذي أقل منه 99% من القيم أي التي تحقق الاحتمال:

$$P(X \leq X) = 0.99$$

وبدرجة حرية 10؛ ومن جدول توزيع كاي مربع نجد:

$$X^2_{(0.99,10)} = 23.21$$

➤ من أجل $(V=5)$:

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

$$X^2_{(0.99,5)} = 15.09$$

$$X^2_{(0.995,5)} = 16.75$$

➤ من أجل (V=12):

$$X^2_{(0.975,12)} = 23.34$$

$$X^2_{(0.99,12)} = 26.22$$

$$X^2_{(0.025,12)} = 5.01$$

التمرين السادس:

1- بالاعتماد على جدول توزيع ستيودنت أوجد القيم التالية: $t_{(0.05;27)}$; $t_{(0.02;13)}$

2- أوجد قيمة (α) في كل مما يلي:

$$t_{(\alpha;19)} = 3.883 \quad \blacksquare$$

$$t_{(\alpha;28)} = 0.855 \quad \blacksquare$$

الحل:

1- من جدول توزيع (T) فإن :

$$t_{(0.02,13)} = 2.282 \quad \text{➤}$$

$$t_{(0.05,27)} = 1.703 \quad \text{➤}$$

2- بالبحث في جدول توزيع ستيودنت فإن تقاطع صف درجات الحرية (df=19) مع جميع قيم

α عند القيمة 3.883 نجد أنها تقابل القيمة $(\alpha = 0.0005)$

3- بنفس الطريقة السابقة نجد:

$$t_{(\alpha,28)} = 0.855 \Rightarrow \alpha = 0.02$$

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

التمرين الثامن:

بالاعتماد على جداول توزيع فيشر أوجد قيمة كل مما يلي:

$$F_{(0.05,12,10)} \quad -1$$

$$F_{(0.01,8,20)} \quad -2$$

$$F_{(0.99,7,15)} \quad -3$$

$$F_{(0.95,4,6)} \quad -4$$

الحل:

بالبحث في جدول توزيع فيشر نجد:

$$1- F_{(0.05,12,10)} = 2.75$$

$$2- F_{(0.01,8,20)} = 3.56$$

3- لايجاد قيمة $F_{(0.99,7,15)}$ نعتمد على العلاقة التالية:

$$F_{(0.99,7,15)} = \frac{1}{F_{(0.01,15,7)}} = \frac{1}{6.31} = 0.1584$$

4- بنفس الطريقة السابقة نبحث عن قيمة $F_{(0.95,4,6)}$

$$F_{(0.95,4,6)} = \frac{1}{F_{(0.05,6,4)}} = \frac{1}{6.16} = 0.1623$$

6. تمارين مقترحة

التمرين الأول:

أجب على الأسئلة التالية:

- ماهي اهم استخدامات توزيع كاي مربع
- أذكر أهم خصائص توزيع ستيودنت
- ما هي خصائص توزيع فيشر

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

التمرين الثاني:

إذا كان دخل مجموعة من العائلات يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط 20000 دج وانحراف معياري 3000 دج؛ فإذا اخترنا عائلة عشوائيا؛ فأوجد احتمال أن يكون دخلها

1- أقل من 20000 دج

2- محصورا بين 19000 و 23000 دج

3- أكبر من 21000 دج

التمرين الثالث:

بافتراض أن (Z) متغير عشوائي مستمر يتبع التوزيع الطبيعي المعياري؛ أحسب ما يلي:

$$P(Z < 1.72) ; P(Z < -0.54) ; P(Z \geq 0.29) ; P(-1.91 < Z < 1.45)$$

التمرين الرابع:

إذا كان المتغير العشوائي (X) له توزيع كاي مربع بدرجات حرية 15، فالمطوب:

1- كتابة شكل دالة الكثافة الإحتمالية لهذا المتغير

2- أوجد احتمال $P(X \leq 7.261)$

3- أوجد قيمة $X^2_{(0.99; 12)}$

4- من أجل $v=18$ أوجد : $X^2_{(0.99; 18)}$ $X^2_{(0.99; 18)}$ $X^2_{(0.995; 18)}$

5- من أجل $v=21$ أوجد: $X^2_{(0.99; 21)}$ $X^2_{(0.975; 21)}$ $X^2_{(0.025; 21)}$

6- من أجل $v=27$ أوجد: $X^2_{(0.99; 27)}$ $X^2_{(0.975; 27)}$ $X^2_{(0.025; 27)}$

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

التمرين الخامس:

بالاعتماد على جدول توزيع ستودنت أوجد القيم التالية: $t_{(0.01; 28)}$; $t_{(0.05; 12)}$

التمرين السادس:

1- من أجل $v_1=3$ و $v_2=4$ وعند مستوى احتمال $P=0.95$ أوجد قيمة فيشر المجدولة

2- أوجد القيم المجدولة لاحصائية فيشر الآتية:

$$F_{(3,4)}^{0.01}; F_{(6,5)}^{0.05}$$

الفصل الثاني:

توزيعات المعاينة

الإحصائية

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

تمهيد:

تعد نظرية العينات جزءا لا يتجزأ من العلوم الإحصائية المختلفة، خاصة بعد أن أصبح لها أسس علمية رياضية، وهي من الناحية التطبيقية تتمتع بمكانة متميزة بين هذه العلوم، فطبيعة المجتمعات الإحصائية التي نقوم بدراساتها والبيانات المطلوبة تفرض على الباحث استخدام أسلوب الحصر الشامل؛ أو أسلوب الحصر الجزئي، فإنه لا اعتبارات مادية وبشرية يرى الباحثون تنفيذ كثير من البحوث باستخدام أسلوب المعاينة.

وفي دراستنا لهذا الفصل الخاص بتوزيعات المعاينة الإحصائية؛ سوف نستعرض أهم المفاهيم الأساسية المرتبطة بالمعاينة الإحصائية، ثم توزيعات المعاينة، وأخيرا طبيعة توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي والفرق بين متوسطي مجتمعين وكذا توزيع المعاينة للنسبة والفرق بين نسبتي.

1. مفاهيم أساسية في الإحصاء

1.1 المجتمع الإحصائي:

يعرف المجتمع الإحصائي على أنه جميع الوحدات أو العناصر التي تشكل مجال دراسة معينة، تجمعها خاصية أو خصائص عامة مشتركة تميزها عن غيرها من المجتمعات، تمثل الظاهرة موضوع الدراسة، وقد يكون المجتمع محدود إذ نستطيع حصر جميع مفرداته (مجتمع نهائي)؛ كما قد يكون غير محدود (مجتمع لا نهائي) وبالتالي لا يمكن للباحث حصر جميع مفرداته، ويعبر عن حجم المجتمع الإحصائي بالرمز (N).

2.1 الوحدة الإحصائية:

هي المفردة الأساسية التي تشكل المجتمع الإحصائي ولا يمكن تجزئتها.

3.1 معالم المجتمع

معالم المجتمع هي أي مقياس إحصائي تحسب قيمته من بيانات جميع مفردات المجتمع دون استثناء، حيث تستخدم المعالم لوصف المجتمع محل الدراسة؛ مثل مقاييس النزعة المركزية كمتوسط المجتمع (μ)، ومقاييس التشتت مثل تباين المجتمع (σ^2) وانحرافه المعياري (σ)، ومقاييس الشكل¹. حيث أن:

➤ متوسط المجتمع بالرمز μ :

¹ بلحنيش عبد الرحمان، مطبوعة محاضرات مقياس إحصاء 3، كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، جامعة البويرة، ص10.

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

$$\mu = \frac{\sum x_i}{N}$$

➤ أما تباين المجتمع سنرمز له بـ: σ^2 :

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \mu)^2}{N}$$

➤ وبخصوص الانحراف المعياري للمجتمع والذي يرمز له بالرمز σ :

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

4.1 العينة

تعرف العينة على أنها جزء أو عدد محدود من إجمالي مفردات المجتمع الإحصائي، ويشترط أن تكون ممثلة تمثيلاً دقيقاً لهذا المجتمع، وبالتالي فالعينة هي مجموعة جزئية من المجتمع الإحصائي تعكس خصائصه من حيث الحجم وتشتت الوحدات. ويتشكل حجم العينة من عدد وحدات العينة المسحوبة ويرمز له بالرمز (n) ، ويمكن تقسيم العينات من حيث الحجم إلى¹:

❖ **عينات صغيرة ($n < 30$):** وهي العينة التي يكون حجمها أو عدد مفرداتها أقل من 30 مفردة

وهذا النوع له أساليب تحليل إحصائية خاصة به.

❖ **عينات كبيرة ($n \geq 30$):** وهي العينات التي يزيد أو يساوي عدد مفرداتها 30.

وكلما كان حجم العينة كبيراً كانت النتائج أكثر دقة وكان بالإمكان استخدام الكثير من أساليب التحليل الإحصائي.

أما عدد العينات الممكن سحبها من المجتمع فإنها تتحدد وفق حجم العينة وحجم المجتمع وطريقة سحب عناصر العينة وتميز بين ثلاثة طرق:

❖ **السحب بالإرجاع:** تسحب وحدات العينة مع إرجاع الوحدة المسحوبة في كل مرة (العينة

المستقلة)، وبمعنى أدق أن الوحدة يمكن أن تظهر أكثر من مرة في العينة، وبالتالي يكون عدد العينات

الممكن سحبها من المجتمع مع مراعاة الترتيب (ترتيبة بالإعادة) هو: N^n

¹ قيس ناجي عبد الجبار، أصول الإحصاء والطرق الإحصائية، ط1، دار المناهج للنشر والتوزيع، عمان، 2002 ص18.

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

❖ **السحب بدون إرجاع:** يتم فيه سحب وحدات العينة دون ارجاع الوحدة المسحوبة (العينة غير مستقلة) بمعنى أن الوحدة المسحوبة لا تظهر إلا مرة واحدة في العينة. وبالتالي يكون عدد العينات الممكن سحبها من المجتمع كما يلي:

■ مع مراعاة الترتيب (ترتيبية دون إعادة) هو:

$$A_N^n = \frac{N!}{(N - n)!}$$

■ مع إهمال الترتيب (توفيقية) هو:

$$C_N^n = \frac{N!}{n! (N - n)!}$$

2. الإطار النظري للمعينة (نظرية العينات)

نتطرق في هذا الجانب الى العناصر الأساسية لنظرية العينات والمتمثلة في مفهوم المعينة؛ وماهي مراحل تصميم المعينة بالإضافة الى أنواع العينات

1.2 مفهوم المعينة

نظرية العينات هي دراسة للعلاقة القائمة بين المجتمع الإحصائي المطلوب دراسته والعينات المسحوبة منه. وهذه لها أهمية كبيرة في عديد الجوانب الإحصائية، فمثلا: تساهم في تقدير الكميات غير المعلومة في المجتمع المدروس، كمتوسط ذلك المجتمع أو تباينه أو انحرافه المعياري... والتي تدعى بوسطاء المجتمع وذلك من خلال المعلومات التي تقدمها العينة المسحوبة منه (كمتوسط العينة أو تباينها أو انحرافها المعياري)، والتي تدعى بالإحصائيات المستخرجة من العينة¹

بصفة عامة؛ يقصد بالمعينة الحصول على عينات من مجمع إحصائي بطريقة علمية بهدف دراسة وتحليل خصائص العينة لتعميمها على المجتمع الإحصائي، فأسلوب المعينة هو عملية اختيار جزء من وحدات المجتمع الإحصائي والذي يطلق عليه اسم المجتمع المرجعي أو المجتمع الهدف بطريقة محددة للاستدلال على خواص المجتمع. ويسمى الجزء المختار بالعينة وتسمى عملية الاختيار بالمعينة، ويشترط في العينة أن تكون ممثلة للمجتمع أي تعكس الصورة الحقيقة أو الخواص المميزة له.

¹ محمد صبح، عدنان عمورة، عزات قاسم: نظرية العينات، منشورات جامعة دمشق، سوريا، 2001، ص 09.

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

2.2 مراحل تصميم خطة المعاينة:

تصميم خطة المعاينة يحدد مختلف الخطوات أو تفاصيل العمليات التي يتضمنها تنفيذ هذا النوع من الدراسات، فخطة المعاينة هي وصف لتفاصيل الإجراءات المنهجية الخاصة بكيفية تنفيذ كل مرحلة من مراحل المعاينة والتي يمكن توضيحها من خلال النقاط التالية:

- ❖ **تحديد مشكلة وهدف الدراسة:** هذه المرحلة تمكن من تحديد متغيرات الدراسة وطبيعة وحجم البيانات المطلوبة وكذا المجتمع الإحصائي المستهدف.
- ❖ **تحديد وتعريف مجتمع الدراسة:** فيجب تحديد المجتمع المراد معاينته وعناصره تسمية وحدة المعاينة التي سيتناولها البحث وتحديد الفترة الزمنية المراد فيها إجراء هذه الدراسة والتأكد من خاصية التجانس¹.
- ❖ **تحديد البيانات المطلوبة لإجراء الدراسة واستخراج النتائج:** تتطلب هذه المرحلة تحديد طبيعة وحجم البيانات المطلوبة للدراسة وفقا لموضوعها وهدفها وفرضياتها.
- ❖ **تحديد طريقة المعاينة:** في هذه المرحلة يتم تحديد أسلوب المعاينة الذي سيستخدم لاختيار وحدات العينة سواء عن طريق المعاينة الإحصائية (العشوائية) أو المعاينة غير الإحصائية (غير العشوائية).
- ❖ **تحديد حجم العينة وتكاليفها:** يعتمد تحديد حجم العينة على خبرة الباحث وعلى الدراسات السابقة وكذا تبيق بعض القواعد الإحصائية الخاصة بنظرية المعاينة.
- ❖ **إجراء اختبار أولي:** تهدف هذه المرحلة إلى البحث عن بعض النواحي التي قد تكون غامضة في البدء وذلك لإدخالها في موضوع الدراسة.
- ❖ **تلخيص وتحليل البيانات:** من خلال تبويب البيانات المتاحة للظاهرة حتى يتسنى دراستها وتحليلها.
- ❖ **تقدير معالم المجتمع:** يتم تقدير معالم المجتمع انطلاقا من إحصاءات العينة، بحيث يتم دراسة الإحصاء وتحليلها للاستدلال على خصائص المجتمع.

3.2 أنواع المعاينة

تصنف المعاينة بناءا على كيفية سحب العينة إلى نوعين رئيسيين هما: المعاينة العشوائية (الإحصائية) حيث تسحب وحداتها بطرق عشوائية وتخضع بالتالي لقوانين الاحتمالات؛ والمعاينة غير العشوائية (الاحتمالية) حيث مبدأ ظهور أفرادها لا يخضع لقوانين موضوعية.

¹ صبح، عمورة، عزات، مرجع سابق، ص13.

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

1.3.2 المعاينة العشوائية (الإحتمالية):

يعتمد هذا النوع من المعاينة على نظرية الإحتمالات بحيث يكون لكل مفردة فرصة أو احتمال معلوم للظهور في العينة، فكلمة عشوائية لا تعني أنها عينة سحب بطريقة اعتباطية، بل تعني إتاحة فرصة الاختيار لجميع وحدات أو عناصر الظاهرة المدروسة¹. وعموماً نميز بين أربع طرق للمعاينة العشوائية الإحتمالية:

1.1.3.2 المعاينة العشوائية البسيطة:

هي طريقة اختيار عينة مكونة من (n) وحدة من بين (N) وحدة من وحدات المجتمع محل الدراسة، بحيث يكون لكل عينة من العينات الممكنة ذات الحجم (n) احتمال مساو في الظهور. بمعنى يكون لكل مفردات المجتمع نفس فرصة التواجد في العينة، وتستعمل هذه الطريقة عندما يكون المجتمع متجانس. وتخضع لطريقتين من السحب: السحب بالإرجاع والسحب بدون إرجاع.

مثال 01:

ليكن لدينا المجتمع التالي [2، 4، 6]؛ أوجد عدد العينات ذات الحجم (n=2) الممكن سحبها في حالة السحب بدون إرجاع وفي حالة السحب بالإرجاع:

الحل:

1- في حالة السحب بالإرجاع: ($N^n = 3^2 = 9$) ومنه العينات الممكنة في هذه الحالة هي (09)

عينات كما يلي: (2,2); (2,4); (2,6); (4,2); (4,4); (4,6); (6,2); (6,4); (6,6)

2- في حالة السحب بدون إرجاع: في هذه الحالة المثال لم يتطرق للترتيب (مع أو بدون في السحب)

فإننا نأخذ بمبدأ إهمال الترتيب فعدد العينات الممكن سحبها يكون وفق قانون التوفيقية أي:

$$C_N^n = \frac{N!}{n!(N-n)!} \Rightarrow C_9^2 = \frac{9!}{2!(9-2)!} = 3$$

تحصلنا على ثلاث عينات وهي كما يلي: (2,4); (2,6); (6,4)

¹مقيش نزيهة، أهمية أسلوب المعاينة في الدراسات الإحصائية دراسة تطبيقية حول الحوكمة في الجامعة الجزائرية من خلال سير للأراء جامعة فرحات عباس سطيف، مذكرة ماجستير، جامعة فرحات عباس، سطيف، الجزائر، 2009-2010، ص 30

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

2.1.3.2 المعاينة العشوائية المنتظمة

هذه العينات ليست عشوائية بشكل كلي لا، فيها نوع من الانتظام راجع الى تركيب وحدات العينة في إطار تصنيف أو نظام معين ولهذا سميت بالمنتظمة، ويتم اختيار العينة العشوائية من مجتمع متجانس وتمتاز بأنها تعتمد على العشوائية في اختيار العنصر الأول من العينة الذي يعتمد عليه تحديد باقي عناصر العينة.

يتم اختيار وحدات العينة من الإطار بطريقة بطريقة منتظمة وفقا لمتتالية حسابية أساسها (k) والذي يسمى بمدى المعاينة، وذلك وفقا للخطوات التالية¹:

- ترقيم جميع وحدات المجتمع من 1 إلى N؛
- تحديد حجم العينة المطلوبة وليكن n؛
- حساب مدى العينة (أساس المتتالية k) والذي يمثل مسافة الاختيار بين عنصرين متتالين ويحسب وفقا للقاعدة التالية:

$$k = \frac{N}{n}$$

- تحديد أول رقم عشوائي من بين 1 و k فنحصل على رقم وحدة المعاينة الأولى ولتكن (i)، وبناءا عليها يتم تحديد باقي الوحدات وفقا لأساس المتتالية k ، والجدول التالي يوضح وحدات العينة في المجتمع والتي يتم اختيارها بطريقة منتظمة:

جدول رقم (01-02): ترتيب وحدات العينة المنتظمة

الوحدة في العينة	1	2	3	4	...	n
رقم الوحدة في المجتمع	i	i+k	i+2k	i+3k	...	i+(n-1)k

المصدر: سليمان محمد طشطوش، أساسيات المعاينة الإحصائية، ط1، دار الشروق للنشر والتوزيع، عمان، 2001، ص94.

3.1.3.2 العينة الطبقة

إن هذا النوع من العينات يقوم على الأسس التالية²:

¹مقيش نزيهة، مرجع سابق، ص32.

²حميد عويد مشرف العلكة، عبيد جفين جليغم القحطاني، الإحصاء والإحتمالات (نظرية وتطبيقات)، دار جامعة الملك سعود للنشر، السعودية، 2019، ص445.

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

- 1- تقسيم المجتمع إلى فئات بتكون عناصر هذه الفئات متجانسة قدر الإمكان وبهذا تسمى كل فئة طبقة
- 2- سحب عينة عشوائية بسيطة من كل طبقة من هذه الطبقات حيث يمكن النظر إلى كل طبقة على أنها مجتمع جزئي متجانس تقريبا، وأما حجم هذه العينات البسيطة فيحدد وفقا لمعايير مختلفة من أهمها:
 - أن يكون وفقا لنسبة مئوية محددة من تعداد عناصر كل طبقة
 - أن يكون للطبقات ذات التفاوت الأكبر بين عناصرها حجم عينة أكبر
 - أن يكون للعينات ذات التكلفة الأكبر حجم أصغر والعكس صحيح.

4.1.3.1 العينة العنقودية

وهي من أنواع المعاينة العشوائية البسيطة، إلا أنه في هذه العينات يقع الاختيار على مجموعات (عناقيد)، ويقوم الباحث بتكوين العينة في هذا النوع من العينات على عدة مراحل وذلك على النحو التالي:

- 1- تقسيم المجتمع إلى فئات متجانسة قدر الإمكان (افتراضيا أو مفروضا حسب طبيعة الدراسة)
 - 2- تقسيم الفئات السابقة إلى فئات جزئية. (افتراضيا أو مفروضا حسب طبيعة الدراسة)
 - 3- أخذ عينة عشوائية (بسيطة أو منظمة) من كل فئة من هذه الفئات الجزئية الأخيرة.
 - 4- دمج العينات الأخيرة في عينة واحدة لتشكيل العينة المطلوبة.
- ومما تجدر الإشارة إليه أن العينة العشوائية العنقودة تتميز عن الطبقية في كون كل عنقود يعكس الخصائص الموجودة في المجتمع في حين أن الطبقية تعكس خاصية معينة تختلف عن الطبقات الأخرى.

2.3.2 العينات غير الاحتمالية¹: Non Probability Sample

يضطر الباحث لاستخدام هذا النوع من العينات عندما يصبح تحديد مجتمع الدراسة أمرا صعبا لعدة أسباب. مثل حساسية مجتمع الدراسة كدراسة مجتمعات المجرمين ، ومهربي المخدرات وكذلك صعوبة تحديد مفردات مجتمع الدراسة كإحصاء سكان قرية ما لا توجد لهم قوائم تنظم توزيعاتهم بالإضافة إلى هدف الدراسة يكون مقتصرًا على فئة معينة من الأشخاص . ولهذا فإن من عيوب هذه المعاينة مايلي:

- 1- لا يتم إتباع قواعد حسابية في اختيارها.

¹عبد الكاظم لفته ماضي، العينة- أنواعها وكيفية اختيارها ومشاكلها، الجامعة المستنصرية، بغداد، العراق، ص08، أنظر الرابط: https://uomustansiriyah.edu.iq/media/lectures/13/13_2018_10_9_PM.doc، تاريخ الإطلاع: 2022/08/28.

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

2- لا يمكن تحديد حساب فرصة ظهور كل وحدة في المجتمع ضمن عينة الدراسة .

وبالتالي فإن الباحث يعتمد إلى اختيار وحدات معينة لادخالها في العينة على اعتبار أنها تمثل المجتمع المدروس تمثيلا جيدا وذلك يرجع إلى خبراته ورأيه وتجاربه العلمية في نظرية المعاينة، ومن أكثر الطرق استخداما في المعاينة غير العشوائية ما يلي:

1.2.3.2: العينة العمدية (الملائمة أو الوصلية)

وتعني أن أساس الاختيار خبرة الباحث ومعرفته بأن هذه المفردة أو تلك تمثل مجتمع البحث. فالباحث عندما يختار المدارس التي يعرفها لتمثيل جميع المدارس يعد اختيارا عمديا. ويُصحح الباحث عندما يضطر إلى تطبيق هذا الأسلوب أن يبرره تبريرا علميا حتى لا يتهم بالتحيز)) ومن ابرز عيوب هذه الطريقة:

➤ لا يوجد طريقة إحصائية عامة لمعرفة وقياس دقة النتائج في المعاينة العمدية وذلك لأنها معاينه غير عشوائية.

➤ لا يمكن التخلص من التحيز في المعاينة العمدية وذلك لعدم معرفة احتمال أي وحدة في العينة.

2.2.3.3 العينة الحصصية

وسميت بالحصصية لأن مجتمع الدراسة يُقسم إلى فئات طبقا لصفاته الرئيسية، وتمثل كل فئة في العينة بنسبة وجودها في المجتمع. فمثلاً إذا كان مجتمع البحث طلاب الجامعة فيصنفون أولاً طبقاً لتخصصاتهم، ثم يقرر الباحث النسبة المئوية المطلوب سحبها من كل تخصص، ويبدأ بسحبها، وبهذا يتدرج حجم العينة طبقاً لعدد الطلاب في كل تخصص. فالتخصصات ذات الأعداد الكبيرة يكون تمثيلها في العينة أكبر من تمثيل التخصصات ذات الأعداد الصغيرة

3.2.3.2 : عينة الصدفة (القطعية)

يتم اختيار أفراد العينة في هذا النوع بطريقة عرضية ، فمثلا إذا أراد الباحث التعرف على اتجاه أفراد المجتمع نحو ممارسة الرياضة فيقوم باختيار عينة بحثه من أول أفراد يصادفهم في المجتمع ولكن في هذه الحالة لا يستطيع الباحث أن يعمم نتائج بحثه لأن هذه العينة لا تمثل إلا مجموعة الأفراد المكونة منها.

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

3. توزيعات المعاينة

إن توزيع المعاينة هو عبارة عن توزيع احتمالي للمقياس المدروس والمحسوب من العينة والمقصود به هنا الإحصاءة، فإحصاءات العينة $(\bar{X}; \sigma^2; \sigma)$ ، ستأخذ صفة المتغير العشوائي، وبالتالي فإن لهذا المتغير توزيع تكراري أو احتمالي (سلوك). وطبيعة هذا التوزيع الإحصائي للإحصاءة التي سحبت قيمها المختلفة من كل العينات العينية العشوائية ذات الحجم المتساوي (n) والممكن سحبها من نفس المجتمع الإحصائي المدروس نسميها توزيع المعاينة الإحصائية (متوسط العينة، تباين العينة.... الخ)¹.

ويمكن إعطاء تعريف شامل لتوزيع المعاينة: على أنه التوزيع الإحصائي الذي يحدد الاحتمالات الممكنة لقيم إحصائية العينة، وتوزيع المعاينة لإحصائية ما يعتمد على عدد مشاهدات حجمها (n) وهو التوزيع الإحصائي لهذه الإحصائية الناتج عن تكرار سحب العينات ذات الحجم (n) ، وكل مرة نخلص إلى قيمة ما لهذه الإحصائية

1.3 توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة $\bar{X}$

عند أخذ عينات متكررة من مجتمع إحصائي ذات الحجم (n) وقمنا بحساب متوسطات هذه العينات نجد أن هذه المتوسطات تختلف عن بعضها البعض، وبالتالي فهي تأخذ صفة المتغير العشوائي نرسم له بالرمز $\bar{X}_i$ حيث $(\bar{X}_i; \bar{x}_1; \bar{x}_2; \dots \dots \bar{x}_k)$ هذا المتغير له توزيع احتمالي يعرف بتوزيع المعاينة لمتوسط العينة، وهذا المتغير $\bar{X}$ يمكن تحديد خصائصه العددية من متوسط وتباين وانحراف معياري $(\mu_{\bar{X}}; \sigma_{\bar{X}}^2; \sigma_{\bar{X}})$

وعليه؛ فتوزيع المعاينة للمتوسطات الحسابية هو عبارة عن التوزيع التكراري للمتوسطات الحسابية لعدد كبير من العينات العشوائية المتساوية الحجم ومن مجتمع إحصائي واحد².

1.1.3 متوسط توزيع المعاينة للمتوسطات

إذا كان μ يمثل متوسط مجتمع ما و $\bar{X}_i$ يمثل متوسط عينة مسحوبة من ذات المجتمع، فإن متوسط أوساط العينة الذي يرمز له بالرمز $\mu_{\bar{X}}$ يعطى بالعلاقة التالية:

¹ بلحنيش عبد الرحمان، مرجع سابق، ص 12.

² خليفة الحاج، دروس وأعمال موجهة في الإحصاء 3، جامعة عبد الحميد بن باديس - مستغانم، الجزائر، 2018-2019، ص 04.

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

$$\mu_{\bar{x}} = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{x}_i}{n}$$

حيث أن: $\mu_{\bar{x}}$: متوسط أوساط العينات؛

$\bar{x}_i$: متوسط العينة (i)؛

(n): عدد العينات المسحوبة.

ملاحظة: متوسط أوساط العينات $\mu_{\bar{x}}$ يكون دائما مساو لمتوسط المجتمع μ الذي سحبت منه هذه العينات ($\mu = \mu_{\bar{x}}$) وأي اختلاف بين القيمتين يعني وجود خطأ أو تحيز في إحدى خطوات اختيار عناصر العينات.

2.1.3 تباين توزيع المعاينة للمتوسطات (تباين أوساط العينات $\sigma_{\bar{x}}^2$):

التباين هو أحد مقاييس التشتت؛ والذي يعبر عن تباعد القيم $\bar{x}$ عن متوسطها $\mu_{\bar{x}}$ ويحسب بإحدى

الطرق التالية:

الطريقة الأولى:

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sum (x_i - \mu_{\bar{x}})^2}{n}$$

$\mu_{\bar{x}}$: متوسط أوساط العينات؛

$\bar{x}_i$: متوسط العينة (i)؛

(n): عدد العينات المسحوبة.

الطريقة الثانية:

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \sum (x_i - \mu_{\bar{x}})^2 \cdot P(\bar{x}_i)$$

حيث أن:

$\mu_{\bar{x}}$: متوسط أوساط العينات؛

$\bar{x}_i$: متوسط العينة (i)؛

(n): عدد العينات المسحوبة.

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

1.2.1.3 العلاقة بين تباين المجتمع وتباين أوساط العينات (تباين توزيع المعاينة للمتوسطات)

لتحديد طبيعة العلاقة بين تباين المجتمع σ^2 وتباين توزيع المعاينة للمتوسطات $\sigma_{\bar{x}}^2$ فإننا نميز بين حالتين من السحب؛ السحب بالإرجاع والسحب بدون إرجاع.

الحالة الأولى السحب بالإرجاع:

إذا كان μ يمثل متوسط مجتمع ما و σ^2 يمثل تباينه، وتم سحب جميع العينات الممكنة من ذات المجتمع بالإرجاع، فإن تباين توزيع المعاينة للمتوسطات بدلالة تباين المجتمع يكون كما يلي:

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

حيث: n يمثل حجم العينة .

أما الانحراف المعياري:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

الحالة الثانية السحب بدون إرجاع:

وفي حالة السحب بدون إرجاع فإن تبيان توزيع المعاينة للمتوسطات بدلالة تباين المجتمع يعطى بالعلاقة التالية:

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} \left(\frac{N-n}{N-1} \right)$$

حيث: (n) : حجم العينة؛

(N) : حجم المجتمع؛

$\left(\frac{N-n}{N-1} \right)$: يمثل معامل الإرجاع

وصيغة الانحراف المعياري في هذه الحالة كالتالي:

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}$$

ملاحظة:

للتفرقة بين السحب بالإرجاع وبدون إرجاع يعتمد الاحصائيون على معدل الاستقصاء $\left(\frac{n}{N}\right)$ حيث إذا كان:

- $\left(\frac{n}{N} > 0,05\right)$: فإن عملية السحب تتم بدون إرجاع

- $\left(\frac{n}{N} \leq 0,05\right)$: فإن عملية السحب تتم بالإرجاع.

والجدول التالي يوضح المعالم الإحصائية لتوزيع المعاينة للمتوسطات

الجدول رقم (2-02): المعالم الإحصائية لتوزيع المعاينة للمتوسطات في حالة السحب بالإرجاع وبدون إرجاع

المعالم الإحصائية	حالة السحب بالارجاع	حالة السحب بدون ارجاع
عدد العينات المسحوبة والممكنة	N^n	C_N^n
متوسط المعاينة للمتوسطات	$\mu_{\bar{x}} = \frac{\sum \bar{x}_i}{N^n}$	$\mu_{\bar{x}} = \frac{\sum \bar{x}_i}{C_N^n}$
التباين لتوزيع المعاينة للمتوسطات	$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$	$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} \left(\frac{N-n}{N-1}\right)$
الانحراف المعياري لتوزيع المعاينة للمتوسطات	$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}$
متوسط المجتمع و متوسط توزيع المعاينة للمتوسطات في حالتي السحب بالارجاع وبدون ارجاع	$\mu_{\bar{x}} = \mu$	

المصدر: من إعداد الباحث

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

مثال 02:

ليكن لدينا المجتمع المتكون من المفردات التالية : 2؛3؛4، نسحب جميع العينات الممكنة بحجم مشاهدتين.

المطلوب:

- (1) أحسب معالم المجتمع.
- (2) إذا علمت أن السحب بالإرجاع فأوجد مايلي:
 - متوسط توزيع المعاينة للمتوسطات
 - تباين توزيع المعاينة للمتوسطات
 - الانحراف المعياري لتوزيع المعاينة للمتوسطات
 - متوسط توزيع المعاينة للمتوسطات وتباينها وانحرافها المعياري اعتمادا على معلومات المجتمع
- (3) إذا كان السحب بدون ارجاع أجب على الأسئلة السابقة

الحل:

من المعطيات لدينا : $n=2$, $N=3$

1- حساب معالم المجتمع :

■ حساب متوسط المجتمع μ :

$$\mu = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{2 + 3 + 4}{3} = 3$$

■ حساب تباين المجتمع σ^2 :

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \mu)^2}{N} = \frac{(2 - 3)^2 + (3 - 3)^2 + (4 - 3)^2}{3}$$

$$\sigma^2 = 0,66$$

■ الانحراف المعياري للمجتمع :

$$\sigma = 0.8124$$

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

2- توزيع المعاينة للمتوسط في حالة السحب بالارجاع :

من بيانات المثال نستخرج عدد العينات الممكنة وفق العلاقة التالية: $N^n = 3^2 = 9$ ؛ وعليه فإن عدد العينات المسحوبة هو (9) والعينات الممكنة سحبها من هذا المجتمع نوضحها في الجدول التالي:

عدد الحالات الممكنة في حالة السحب بالارجاع		
(2,2)	(2,3)	(2,4)
(3,2)	(3,3)	(3,4)
(4,2)	(4,3)	(4,4)

من الجدول أعلاه نلاحظ أن المتوسط الحسابي للعينات كمتغير عشوائي يأخذ مجال من القيم (مجال تعريفه):

$$\bar{x} = 2, 2.5, 3, 3.5, 4$$

وكل قيمة من هذه القيم بالاحتمال المقابل لها؛ والجدول التالي يوضح كيفية استخراج متوسط كل عينة مسحوبة من هذا المجتمع

متوسطات كل عينة		
2	2.5	3
$3+2/2=2.5$	3	3.5
3	3.5	4

■ استخراج متوسط المعاينة للمتوسطات $\mu_{\bar{x}}$ من خلال العلاقة التالية:

$$\mu_{\bar{x}} = \frac{\sum \bar{x}_i}{N^n} = \frac{2 + 2.5 + 3 + 2.5 + 3 + 3.5 + 3 + 3.5 + 4}{9} = \frac{27}{9}$$

$$\mu_{\bar{x}} = 3$$

■ حساب تبيان توزيع المعاينة للمتوسطات $\sigma_{\bar{x}}^2$ من خلال العلاقة التالية:

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sum (x_j - \mu_{\bar{x}})^2}{N^n}$$

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

انطلاقاً من جدول متوسط العينة:

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{(2-3)^2 + (2.5-3)^2 + (3-3)^2 + (2.5-3)^2 + (3-3)^2 + (3.5-3)^2 + (3-3)^2 + (3.5-3)^2 + (4-3)^2}{9}$$

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{3}{9} = 0.33$$

■ اختبار العلاقات: في هذه الحالة يتم حساب متوسط أوساط العينات وتباينها وانحرافها المعياري بالإعتماد على معلمات المجتمع كما يلي:

• في حالة السحب بالإرجاع فان متوسط توزيع المعاينة للمتوسطات يساوي متوسط المجتمع.

$$\mu_{\bar{x}} = \mu = 3$$

• في حالة السحب بالإرجاع فان تباين توزيع المعاينة للمتوسطات يجمعه العلاقة التالية مع تباين المجتمع:

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{3}{9} = 0.33$$

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{0.66}{2} = 0.33$$

3- توزيع المعاينة للمتوسط في حالة السحب بدون ارجاع:

في هذه الحالة عدد العينات الممكن سحبها تخضع العلاقة التالية

$$C_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!2!} = 3 = C_N^n$$

والعينات الممكن سحبها من هذا المجتمع نوضحها في الجدول التالي:

عدد الحالات الممكنة في حالة السحب بدون ارجاع	
(2,3)	
(4,2)	(4,3)

■ متوسط المعاينة للمتوسطات $\mu_{\bar{x}}$ من خلال العلاقة التالية كمايلي:

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

$$\mu_{\bar{x}} = \frac{\sum \bar{x}_i}{C_N^n} = \frac{2.5 + 3 + 3.5}{3} = \frac{9}{3}$$

$$\mu_{\bar{x}} = 3$$

■ حساب تباين توزيع المعاينة للمتوسطات $\sigma_{\bar{x}}^2$ من خلال العلاقة التالية كما يلي:

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sum (x_j - \mu_{\bar{x}})^2}{Nn}$$

انطلاقاً من جدول متوسط العينة :

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{(2.5 - 3)^2 + (3 - 3)^2 + (3.5 - 3)^2}{3}$$

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{0.5}{3} = 0.1666$$

■ اختبار العلاقتين: اختبار العلاقتين: في هذه الحالة يتم حساب متوسط أوساط العينات وتباينها

وانحرافها المعياري بالإعتماد على معلمات المجتمع كما يلي:

- في حالة السحب بدون ارجاع فان متوسط توزيع المعاينة للمتوسطات يساوي متوسط المجتمع .

$$\mu_{\bar{x}} = \mu = 3$$

- في حالة السحب بدون ارجاع فان تباين توزيع معاينة متوسطات تجمعه العلاقة التالية مع تباين المجتمع:

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} \left(\frac{N - n}{N - 1} \right) = \frac{0.66}{2} \left(\frac{3 - 2}{3 - 1} \right) = 0.1666$$

4. طبيعة توزيع المعاينة لمتوسطات العينة

كل ما عرضنا إليه سابقاً هو كيفية حساب المتوسط الحسابي وتباين توزيع المعاينة للمتوسطات، حيث لم نتعرض لتوزيع مجتمع المتوسطات الحسابية المحسوب من أخذ جميع العينات، فشكل التوزيع الإحتمالي لمتوسط توزيع المعاينة للمتوسطات يعتمد على توزيع المجتمع الأصلي المسحوب منه العينات، وعليه سنستعرض مختلف النظريات الإحصائية التي تعطي التوزيع الإحتمالي لمجتمع المتوسطات الحسابية.

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

1.4 توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي في حالة مجتمع طبيعي

إذا كان المجتمع يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط μ وتباين σ^2 معلوم القيمة، وكان $\bar{x}$ يمثل المتوسط الحسابي للعينة ذات الحجم (n) والمحصوبة من هذا المجتمع؛ فإن متوسط العينة المسحوبة منه دائما يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط $\mu_{\bar{x}} = \mu$ وتباين: $\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$ ونكتب إختصارا في حالة السحب بالارجاع كما يلي:

$$X \sim N(\mu; \sigma^2 \text{ المعلومة القيمة})$$

$$\bar{x} \sim N(\mu_{\bar{x}} = \mu; \sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n})$$

أما في حالة السحب بدون ارجاع فإن:

$$\bar{x} \sim N(\mu_{\bar{x}} = \mu; \sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} \left(\frac{N-n}{N-1} \right))$$

مثال 03:

سحبت عينة عشوائية حجمها 12 بدون ارجاع من مجتمع ما يخضع للتوزيع الطبيعي بمتوسط 60 وتباين 52؛ فأوجد:

■ طبيعة توزيع المعاينة للمتوسطات المسحوبة

الحل:

إن إيجاد طبيعة توزيع المعاينة يقتضي منا إيجاد المتوسط الحسابي للعينة؛ تباين العينة والانحراف المعياري للعينة، وعليه بناءا على معطيات المثال فإنه لدينا:

$$X \sim N(\mu = 60; \sigma^2 = 52)$$

وبما أن المجتمع يتبع التوزيع الطبيعي وكذا تباين المجتمع معلوم، فإن المتوسط الحسابي للعينة يتبع التوزيع الطبيعي ونكتب إختصارا ما يلي:

$$\bar{x} \sim N\left(\mu_{\bar{x}} = 60; \sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{52}{16} = 3.25\right)$$

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

2.4 توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي في حالة مجتمع غير طبيعي (نظرية النهاية المركزية)

لتحديد طبيعة توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي في حالة مجتمع غير طبيعي نعتمد على نظرية النهاية المركزية؛ والتي تنص على أنه إذا كان المجتمع الذي سحبت منه العينة ذو متوسط μ وتباين σ^2 قيمته مجهولة لكن لا يتبع التوزيع الطبيعي فإن المتغيرة المعيارية لـ: $\bar{X}$ أي: $Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}$ تقوّل إلى التوزيع الطبيعي المعياري عندما تكون $(n \geq 30)$ ، بمتوسط $\mu_{\bar{x}} = \mu$ وتباين: $\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$ في حالة السحب بالإرجاع أما في حالة السحب بدون إرجاع فإن التباين هو: $\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} \left(\frac{N-n}{N-1} \right)$

أما عندما يكون $(n < 30)$ فإن المتغيرة المعيارية لـ: $\bar{X}$ تقوّل إلى توزيع ستيودنت أي:

$$T = \frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \sim t_{(n-1)}$$

بمتوسط $\mu_{\bar{x}} = \mu$ وتباين: $\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$ في حالة السحب بالإرجاع أما في حالة السحب بدون إرجاع فإن التباين هو: $\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} \left(\frac{N-n}{N-1} \right)$

مثال 04:

إذا سحبت عينة عشوائية حجمها 20 من مجتمع يقدر حجمه 300 متوسطه 45 وتباينه 420.

1. أوجد طبيعة توزيع المعاينة لمتوسط العينات المسحوبة
2. أوجد احتمال أن يكون الوسط الحسابي للعينة أكبر أو يساوي 58

الحل:

1. إيجاد طبيعة توزيع المعاينة لمتوسط العينات المسحوبة

قبل البحث في طبيعة توزيع المعاينة لمتوسط العينات المسحوبة نحدد طبيعة السحب وذلك من خلال

العلاقة التالية:

$$\frac{n}{N} = \frac{30}{300} = 0.666 > 0,05$$

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

وبالتالي فإن طريقة السحب في هذه الحالة تتم بدون إرجاع

وبما أن توزيع المجتمع لا يتبع التوزيع الطبيعي (مجهول) كما أن حجم العينة أكبر أو يساوي 30 وحسب نظرية النهاية المركزية فإن:

- متوسط أوساط العينات المسحوبة يساوي متوسط المجتمع أي : $\mu_{\bar{x}} = \mu \Rightarrow \mu_{\bar{x}} = 45$
- تباين أوساط العينات المسحوبة يعطى كما يلي:

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} \left(\frac{N-n}{N-1} \right) \Rightarrow \sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{420}{20} \left(\frac{300-20}{300-1} \right) = 19.66$$

- الانحراف المعياري لأوساط العينات المسحوبة يساوي:

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\sigma_{\bar{x}}^2} \Rightarrow \sigma_{\bar{x}} = \sqrt{19.66} = 4.43$$

2. احتمال أن يكون الوسط الحسابي للعينة أكبر من 58؛ لدينا:

$$P(X > 60) = P(Z > 60) = P\left(Z > \frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n} \left(\frac{N-n}{N-1} \right)}}\right) \Rightarrow P\left(Z > \frac{58 - 45}{\sqrt{19.66}}\right) = P(Z > 2.93)$$

ومنه:

$$P(X > 58) = P(Z > 2.93) = 1 - P(Z < 2.93)$$

وبالاعتماد على جدول التوزيع الطبيعي المعياري نجد:

$$P(X > 58) = 1 - 0.9983 = 0.0017$$

وعليه؛ فإن احتمال أن يكون الوسط الحسابي للعينة أكبر من 58 هو 0,17 %.

مثال 05:

سحبت عينة عشوائية حجمها 36 من مجتمع إحصائي متوسطه وانحرافه المعياري 65 و 9 على التوالي؛ فأوجد احتمال أن يكون متوسط العينة أقل من 68 علما أن السحب تم بالإرجاع.

الحل:

1- إيجاد احتمال أن يكون متوسط العينة أقل من 68

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

بما أن السحب تم بالإرجاع فإنه يكون لدينا:

$$\mu_{\bar{x}} = \mu = 65$$

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{81}{36} = 2.25 \Rightarrow \sigma_{\bar{x}} = \sqrt{2.25} = 1.5$$

وبما أن حجم العينة ($n=36>30$) فإن:

$$\bar{x} \sim N(\mu_{\bar{x}} = 65; \sigma_{\bar{x}}^2 = 2.25)$$

ومنه:

$$P(X < 68) = P\left(Z < \frac{68 - 65}{1.5}\right) = P(Z < 2) = 0.9010$$

مثال 06:

سحبت عينة عشوائية حجمها 28 من مجتمع إحصائي تباينه مجهول متوسطها 65 وانحرافها المعياري 1.7، فأوجد احتمال أن يكون متوسط العينة أقل من 68.

الحل:

بما أن حجم العينة ($n<30$) فإن توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة يخضع لتوزيع ستودنت فيكون لدينا:

$$\mu_{\bar{x}} = \mu = 65$$

$$\sigma_{\bar{x}} = 1.7$$

ومنه احتمال ان يكون متوسط العينة أقل من 68 هو:

$$P(X < 68) = P\left(t < \frac{68 - 65}{1.7}\right) = P(t < 1.76) = 0.9010$$

3.4 توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي في حالة تباين المجتمع مجهول (معالم المجتمع مجهولة):

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

في حالة كان تباين المجتمع مجهول $\sigma^2 = ?$ ، ففي هذه الحالة حجم العينة هو المحدد لطبيعة توزيع المعاينة لمتوسط العينة $\bar{X}$ ، سواء كان توزيع المجتمع معلوماً أو مجهولاً، فإن توزيع المعاينة للمتوسط لا يتبع توزيع المجتمع لأننا لا نستعمل في هذه الحالة معالم المجتمع وليكن التباين في حالتنا هذه، وإنما نأخذ تباين العينة $\sigma_{\bar{x}}^2$ كبديل لتباين المجتمع σ^2 ويكون ذلك كما يلي:

▪ $(n \geq 30)$ فإن توزيع المعاينة للمتوسط يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط $\mu_{\bar{x}} = \mu$ وتباين: $\sigma_{\bar{x}}^2 =$

$$\frac{\sigma_{\bar{x}}^2}{n} \quad \text{في حالة السحب بالإرجاع أما في حالة السحب بدون إرجاع فإن التباين هو:}$$

$$\frac{\sigma_{\bar{x}}^2}{n} \left(\frac{N-n}{N-1} \right)$$

▪ $(n < 30)$ فإن توزيع المعاينة للمتوسط يتبع توزيع ستودنت بمتوسط $\mu_{\bar{x}} = \mu$ وتباين: $\sigma_{\bar{x}}^2 =$

$$\frac{\sigma_{\bar{x}}^2}{n} \quad \text{في حالة السحب بالإرجاع أما في حالة السحب بدون إرجاع فإن التباين هو:}$$

$$\frac{\sigma_{\bar{x}}^2}{n} \left(\frac{N-n}{N-1} \right)$$

5. توزيع المعاينة للفرق بين متوسطي عينتين

1.5 توزيع المعاينة للفرق بين متوسطين: المجتمعين طبيعيين وتباين المجتمعين معلومين

إذا سحبت عينة عشوائية من حجمها (n_1) من مجتمع طبيعي متوسطه (μ_1) وتباينه (σ_1^2) ؛ وعينة ثانية حجمها (n_2) من مجتمع طبيعي متوسطه (μ_2) وتباينه (σ_2^2) ؛ والعينتان مستقلتان؛ فإذا كان $\bar{x}_1$ يمثل متوسط العينة الأولى؛ و $\bar{x}_2$ متوسط العينة الثانية فإن توزيع المعاينة للفرق بين متوسطيهما $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$ يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط:

$$\mu(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) = \mu_1 - \mu_2$$

أما التباين:

$$V(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) = V_{\bar{x}_1} + V_{\bar{x}_2} = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$$

ويصبح الانحراف المعياري:

$$\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

ويكون توزيع المعاينة للفرق بين متوسطي المجتمعين وفق الشكل التالي:

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \sim N(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2})$$

وبالتالي:

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

ملاحظة:

إذا كان توزيع المجتمعين غير طبيعيين وتباينهما معلومين، وكان حجم العينتين المحسوبتين كبير جدا فإن توزيع المعاينة للفرق بين متوسطهما $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$ يخضع للتوزيع الطبيعي بمتوسط وتباين كما يلي:

$$\begin{aligned} \mu_{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)} &= \mu_1 - \mu_2 \\ V_{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)} &= V_{\bar{x}_1} + V_{\bar{x}_2} = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2} \end{aligned}$$

وبالتالي:

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

مثال 07:

لمعرفة الفرق بين متوسطي الأجور للعمال؛ سحبت عينتين عشوائيتين من مؤسستين مختلفتين؛ فكانت

النتائج كما يلي:

المعالم	المجتمع الاول	المجتمع الثاني
التباين	$\sigma_1^2=25$	$\sigma_2^2=16$
المتوسط	$\mu_1=180$	$\mu_2=142$
حجم العينة	$n_1=3$	$n_2=35$

1- أوجد احتمال أن يكون الفرق بين متوسطي $(X_1 - X_2)$ الأجور للعمال أكبر من 40

الحل:

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

بما أن حجم العينة أكبر من 30 وتباين المجتمعين معلومين، فإن التوزيع المتبع هو التوزيع الطبيعي:

$$P(\bar{x}_1 - \bar{x}_2 > 40) = P\left(Z > \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\right) = P\left(Z > \frac{40 - (180 - 142)}{\sqrt{\frac{25}{30} + \frac{16}{35}}}\right)$$

$$= P(Z > 1.76) = 1 - P(Z < 1.76) = 1 - 0.9608 = 0.0392$$

6. توزيع المعاينة لتباين العينة ولنسبة تباين العينتين

1.6 توزيع المعاينة لتباين العينة

إذا سحبت عينة عشوائية من حجمها (n) من مجتمع طبيعي متوسطه (μ) وتباينه (σ²) معلوم، فإن تباين العينة كان σ_{x̄}² يتبع توزيع كاي مربع بدرجة حرية (V=n-1) أي:

$$X^2 = \frac{(n-1)\sigma_{\bar{x}}^2}{\sigma^2}$$

2.6 توزيع المعاينة لنسبة تباين عينتين

إذا كان σ_{x̄1}² و σ_{x̄2}² تباين عينتين مستقلتين مسحوبتين من مجتمعين يتبعان التوزيع الطبيعي تباينهما (σ₁²) و (σ₂²) على التوالي فإن توزيع المعاينة لنسبة تباين العينتين يخضع لتوزيع فيشر كما يلي:

$$F = \frac{\frac{\sigma_{\bar{x}_1}^2}{\sigma_1^2}}{\frac{\sigma_{\bar{x}_2}^2}{\sigma_2^2}} \sim F_{(n_1-1, n_2-1, \alpha)}$$

7. توزيع المعاينة للنسبة ونوع توزيع المعاينة للنسبة

1.7 توزيع المعاينة للنسبة

يحتاج الباحث في أغلب الدراسات لمعرفة نسبة ظاهرة معينة في المجتمع المدروس، مثلاً نسبة الإنتاج الفاسد من مجموع الإنتاج الراسبون؛ ففي كل الحالات نجد أن المجتمع محل الدراسة ينقسم إلى قسمين، قسم تتوفر فيه الظاهرة المدروسة وقسم لا يحقق هذه الظاهرة حيث يتعامل الباحث في هذا النوع من الدراسات مع نسبة الظاهرة محل الدراسة في المجتمع ويرمز لها بالرمز P ونكتب:

$$P = \frac{N_p}{N} \Rightarrow q = \frac{N_q}{N}$$

حيث أن:

N_p : عدد مفردات المجتمع التي تحقق الظاهرة؛

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

N : العدد الكلي لمفردات المجتمع؛

N_q : عدد مفردات المجتمع التي لا تحقق الظاهرة.

ويرمز لمتوسط نسبة المجتمع بالرمز μ_p وهي نفسها نسبة المجتمع $\mu_p = P$ ويرمز لتباين نسبة المجتمع بالرمز $\sigma_p^2 = P \cdot q$

ويمكن اللجوء إلى أسلوب المعاينة لاختيار عينة عشوائية من مجتمع يتيح تحديد نسبة الظاهرة المدروسة في العينة المحسوبة عشوائيا من المجتمع وتسمى اختصارا نسبة العينة ويرمز لها بالرمز $\hat{P}$ ونكتب:

$$\hat{P} = \frac{n_p}{n} \Rightarrow q = \frac{n_q}{n} = 1 - \hat{P}$$

حيث:

n_p : عدد مفردات العينة التي تحقق الظاهرة؛

n : العدد الكلي للعينات؛

2.7 نوع توزيع المعاينة للنسبة (P) في العينة

إذا كانت P تمثل النسبة في المجتمع تحقق خاصية ما و $\bar{P}$ تمثل النسبة في العينة التي تحقق نفس الخاصية فان توزيع المعاينة يقترب من التوزيع الطبيعي وفق نظرية النهاية المركزية لما $(n \geq 30)$ مع $n(1 - P) > 5$.

■ ففي حالة السحب بالإرجاع: تكون الملاحظات الاحصائية كالتالي:

نسبة المعاينة لتوزيع الحسابي المتوسط : $\mu_p = P$

$$\sigma_p^2 = \frac{P(1 - p)}{n} \text{ : التباين}$$

$$\sigma_{\bar{p}} = \sqrt{\frac{P(1 - p)}{n}} \text{ : الانحراف المعياري}$$

وتكون الكتابة الاحصائية:

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

$$\bar{P} \sim N\left(P, \frac{P(1-P)}{n}\right)$$

■ أما في حالة السحب دون ارجاع: تكون الملاحظات الاحصائية كالتالي:

$$\sigma_{\bar{p}}^2 = \frac{P(1-p)}{n} \left(\frac{N-n}{N-1} \right) \text{ : التباين}$$

$$\sigma_{\bar{p}} = \sqrt{\frac{P(1-p)}{n} \left(\frac{N-n}{N-1} \right)} \text{ : الانحراف المعياري}$$

مثال 08:

ينتج أحد المصانع يوميا 700 مكيف هوائي؛ من بينهم 125 مكيف به عطب في؛ اذا سحبنا عينة من 32 جهاز بدون ارجاع.

1- ماهي طبيعة توزيع المكيفات الفاسدة في العينة؟

2- ما هو احتمال ان تكون نسبة المكيفات الفاسدة في العينة أقل من 30%.

الحل :

$$n=32, N=700, P = \frac{N_a}{N} = \frac{125}{700} = 0.1785$$

ان حجم العينة ($n=32 \geq 30$) وعليه فان توزيع المعاينة النسبة $\bar{P}$ يقترب من التوزيع الطبيعي

حسب نظرية النهاية المركزية مع:

$$n(1-P) = 32 \times (1 - 0.1785) = 26.288 > 5$$

وبما اننا في حالة السحب بدون ارجاع تكون الكتبة الاحصائية كالتالي:

$$\bar{P} \sim N\left(P, \frac{P(1-P)}{n} \left(\frac{N-n}{N-1} \right)\right)$$

مع:

$$\mu_p = P = 0.1785$$

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

$$\sigma_{\bar{p}} = \sqrt{\frac{P(1-p)}{n}} \sqrt{\left(\frac{N-n}{N-1}\right)} = \sqrt{\frac{0.1785(1-0.1785)}{32}} \sqrt{\left(\frac{700-32}{700-1}\right)}$$

$$= 0.066$$

$$\bar{P} \sim N(0.1785, 0.066)$$

2- نسبة المصابين بمرض مزمن في العينة أقل من 30%:

$$P(\bar{P} < 0.3) = P\left(Z < \frac{0.3-0.1785}{0.066}\right)$$

$$= P(Z < 1.84) = 0.9671$$

1. توزيع المعاينة للفرق بين نسبتي:

إذا أخذت عينتان عشوائيتان حجمهما n_1 و n_2 من مجتمعين مستقلين يخضع الأول لتوزيع بيرنولي (ذو الحدين $B(1; P_1)$ و الثاني يخضع لتوزيع ذي الحدين $B(1; P_1)$ فان الفرق بين النسبتين من العينتين

و تباينه: $P_1 - P_2$ يخضع تقريبا للتوزيع الطبيعي وسطه $(\bar{P}_1 - \bar{P}_2)$

$$\sigma_{\bar{p}_1}^2 + \sigma_{\bar{p}_2}^2 = \frac{P(1-P_1)}{n_1} + \frac{P_2(1-P_2)}{n_2}$$

وهذا لما تكون حجم العينة كبير أي $(n_1; n_2) \geq 30$ و نكتب :

$$(\bar{P}_1 - \bar{P}_2) \sim (P_1 - P_2), \frac{P(1-P_1)}{n_1} + \frac{P_2(1-P_2)}{n_2}$$

وبالتالي:

$$Z = \frac{(\bar{P}_1 - \bar{P}_2) - (P_1 - P_2)}{\sqrt{\frac{P(1-P_1)}{n_1} + \frac{P_2(1-P_2)}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

مثال 09:

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

إذا كانت نسبة النجاح في امتحان توجيهي في مدرسة للبنات P هي 0.7 و كانت نسبة النجاح في ذلك الامتحان في مدرسة للذكور (ب) هي 0.65 أخذت عينة عشوائية حجمها $n_1=70$ من المدرسة (ا) و أخذت عينة عشوائية حجمها $n_2=35$ من المدرسة (ب) فما احتمال ان تزيد نسبة النجاح في المدرسة (ا) على نسبة النجاح في المدرسة (ب) بمقدار 0.10 على الاكثر ؟

$$-1 \quad \text{أوجد: } P(\bar{P}_1 - \bar{P}_2 < 0.10)$$

الحل :

بما أن حجم العينتين أكبر من 30 فإنه حسب نظرية النهاية المركزية توزيع النسبة للمعاينة يتبع التوزيع الطبيعي

$$\begin{aligned} P(\bar{P}_1 - \bar{P}_2 < 0.10) &= P\left(Z < \frac{(\bar{P}_1 - \bar{P}_2) - (P_1 - P_2)}{\sqrt{\frac{P(1-P_1)}{n_1} + \frac{P_2(1-P_2)}{n_2}}}\right) \\ &= P\left(Z < \frac{0.10 - (0.70 - 0.65)}{\sqrt{\frac{0.7(1-0.7)}{70} + \frac{0.1(1-0.65)}{35}}}\right) \\ &= P\left(Z < \frac{0.05}{0.097}\right) \\ &= P(Z < 0.51) = 0.6950 \end{aligned}$$

9. تمارين مقترحة

التمرين الأول:

أجب على الأسئلة التالية:

- 1- أذكر الفرق بين المعلمة والإحصاءة.
- 2- ماهي مراحل تصميم خطة المعاينة.

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

- 3- ما المقصود بالمعينة العشوائية المنتظمة.
- 4- متى نستعمل نظرية النهاية المركزية.
- 5- ماهي مراحل المعينة العشوائية المنتظمة

التمرين الثاني:

ليكن مجتمع ما مكون من المفردات التالية: 2.3.6.8.9

المطلوب:

- 1- أحسب متوسط وتباين والانحراف المعياري للمجتمع
- 2- إذا علمت أن السحب بالإرجاع بحجم مشاهدين فأوجد مايلي:
 - متوسط توزيع المعينة للمتوسطات
 - تباين توزيع المعينة للمتوسطات
 - الانحراف المعياري لتوزيع المعينة للمتوسطات
 - متوسط توزيع المعينة للمتوسطات وتباينها وانحرافها المعياري اعتمادا على معلمات المجتمع
- 3- إذا كان السحب بدون ارجاع بحجم مشاهدين أجب على الأسئلة السابقة

التمرين الثالث:

مجتمع إحصائي مكون من 100 مصباح كهربائي يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط صلاحية 28.3 يوم وتباين 4.1 ؛ سحبت منه عينة عشوائية حجمها 6.

المطلوب:

- 1- أوجد احتمال اختيار مصباح كهربائي تتراوح مدة صلاحيته من 9 إلى 14 يوم.
- 2- أوجد احتمال اختيار مصباح كهربائي تتراوح مدة صلاحيته أقل من 17 يوم.
- 3- أوجد احتمال اختيار مصباح كهربائي تتراوح مدة صلاحيته أكثر من 31 يوم.

التمرين الرابع:

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

سحبت عينة عشوائية حجمها 25 من قسم العلوم الاقتصادية بجامعة البليدة، فكانت نسبة النجاح فيه 0.8%، وسحبت عينة عشوائية أخرى حجمها 40 من قسم العلوم الاقتصادية بجامعة المدية، فكانت نسبة النجاح فيه 0.55%. فإذا كانت نسبة النجاح في العينة الأولى $\bar{P}_1$ وفي العينة الثانية $\bar{P}_2$

المطلوب:

- 1- أوجد احتمال أن يكون الفرق بين نسبتي النجاح في العينتين أكبر من 30%؛
- 2- أوجد احتمال أن يكون الفرق بين نسبتي النجاح في العينتين محصور بين 25 و 45%.
- 3- أوجد احتمال أن يكون الفرق بين نسبتي النجاح في العينتين أكبر من 70%.

الفصل الثالث:

نظرية التقدير

تمهيد:

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

تلعب نظرية التقدير دورا أساسيا في الاستنتاج حيث يتم على ضوءها تقدير والإستدلال على معالم المجتمع الاحصائي أو توزيعه الاحتمالي انطلاقا من العينة المسحوبة منه؛ وهذا الإستدلال لا يصح إلا في ظل ظروف محددة؛ تتعلق أساسا بفرضيات تتمحور حول طبيعة بيانات المجتمع والعينة، وتزداد أهمية التقدير عندما نقوم بتحديد معالم المجتمع يكون عدد أفرادها كبيرا كونه يسمح لنا باقتصاد الوقت والتكلفة والجهد اللازم لاجراء التجربة حول الظاهرة المراد دراستها.

وهناك نوعان من التقدير؛ التقدير النقطي (أو القيمة الواحدة) إذ نحصل على قيمة واحدة من العينة وتستخدم هذه القيمة كتقريب أو كقدير لمعلمة المجتمع المجهولة، والتقدير بمجال (أو فترة التقدير أو الثقة) فإننا نحصل على مدى أو فترة تتحدد بحدين (حد أدنى وحد أعلى) نحصل عليهما من العينة وفي هذا المجال ان التقدير يحتوي على أكثر من قيمة بل قد يكون عدد القيم غير محدود أولا نهائي في كثير من الحالات.

1. مفاهيم أساسية

1.1 مفهوم التقدير (Estimation)

يعرف التقدير بأنه عملية استنتاج أو تقدير أحد معالم المجتمع (مثل الوسط الحسابي أو الإنحراف المعياري) من الإحصائية المناظرة والخاصة بعينة مسحوبة من المجتمع¹. كما يعرف على أنه الحصول على كمية ما أو مقدار عدم التيقن المقترن بها من خلال تعيين قيم عددية للملاحظة في صيغة تقدير أو مقدر².

وعليه فالتقدير هو تقدير معالم المجتمع (أو التوزيع الاحتمالي) والتي غالبا ما تكون مجهولة انطلاقا من معطيات العينة. فالتقدير هو عملية احصائية تسمح لنا بتحديد قيمة المعلمة ما محل اهتمام وذلك انطلاقا من إحصائية عينة مسحوبة عشوائيا من نفس المجتمع المراد دراسته. وللتقدير نوعين:

❖ التقدير النقطي *point estimation*؛

❖ التقدير بمجال *Interval estimation*.

2.1 مفهوم المقدر

¹ دومنيك سالفادور، الإحصاء والاقتصاد القياسي، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 1993، ص72.

² دبوش عبد القادر، الإحصاء 3، مطبوعة بيداغوجية، جامعة قلمة، قسم علوم التسيير، 2017-2018 الجزائر، ص33.

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

هو صيغة تحدد كيفية حساب القيم التقديرية لمعلمة مجتمع من خلال بيانات العينة.

3.1 أنواع التقدير

هناك نوعان للتقدير؛ تقدير النقطة والتقدير بمجال.

1.3.1 التقدير النقطي:

نحصل على قيمة واحدة يأخذها الثابت الإحصائي المقدر بدلالة التابع الإحصائي المقابل والمحسوب من تلك العينة المسحوبة من المجتمع الإحصائي والمراد تقدير أحد معالمه الإحصائية. أي تقدير معلمة المجتمع بقيمة واحدة انطلاقاً من العينة، فإذا كانت هذه القيمة الواحدة هي متوسط العينة فهي كتقريب أو كتقدير لمتوسط المجتمع المجهولة فمثلاً لو أخذنا المتوسط الحسابي للدخل لعينة مسحوبة من دولة ما كتقدير لمتوسط الدولة نكون قد حصلنا على تقدير نقطة (قيمة واحدة) لمتوسط دخل الدولة. وما ينطبق على المتوسط الحسابي ينطبق على المعالم الإحصائية الأخرى

مثال 01:

لتقدير عدد حبات التفاح في أحد الحقول النموذجية أخذت عينة حجمها 20 شجرة من ذلك الحقل، وتم حساب عدد التفاحات في كل شجرة كما يلي:

320؛ 315؛ 420؛ 280؛ 395؛ 426؛ 500؛ 220؛ 215؛ 312؛ 288؛ 417؛ 300؛
400؛ 376؛ 423؛ 299؛ 302؛ 367؛ 401.

- 1- ما هو متوسط عدد حبات التفاح في العينة المسحوبة؟
- 2- إذا كان الحقل يحتوي على 1120 شجرة فكم تقدر عدد حبات التفاح فيه؟

الحل:

- 1- متوسط عدد حبات التفاح في العينة المسحوبة:

لدينا:

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

$$\bar{X} = \frac{320 + 315 \dots \dots + 302 + 367 + 401}{20} = 348.8 \approx 349$$

ومنه متوسط عدد حبات التفاح في العينة العشوائية المسحوبة هو 349 حبة

2- تقدير عدد حبات التفاح في الحقل

إعتمادا على نظرية التقدير النقطي فإن متوسط حبات التفاح في الحقل هو نفسه متوسط العينة المسحوبة أي:

$$\bar{X} = \mu = 349$$

ومنه متوسط عدد حبات التفاح في الحقل هو 349 حبة

أما عدد حبات التفاح في الحقل فهو:

$$349 \times 1120 = 390880$$

ومنه عدد حبات التفاح في الحقل هو 390880 حبة.

ملاحظة:

إن التقدير النقطي يعطي قيمة واحدة لمعلمة المجتمع الذي نريد تقديرها؛ ومنه لا يمكننا الحكم على مدى دقة هذه القيمة في تمثيل المعلمة الحقيقية في المجتمع؛ لذا يفضل الاعتماد على النوع الثاني من التقدير الإحصائي ألا وهو التقدير لفترة.

2.3.1 حالة التقدير بمجال

في حالة التقدير بمجال نتحصل على مدى أو فترة تتحدد بحددين (حد أدنى وحد أعلى) نحصل عليهما من العينة، والتقدير بمجال يعطينا أكثر من قيمة وقد يكون عدد القيم غير محدود أو لا نهائي في كثير من الحالات.

بصفة عامة فإن التقدير بمجال عبارة عن تقدير معلمة المجتمع بمدى (فترة) معين من القيم باحتمال معين وهذا الاحتمال يسمى مستوى الثقة و يرمز له بالرمز $(1-\alpha)\%$ ؛ لذلك سميت الفترة بفترة الثقة. ومستوى الثقة يعطينا مدى ثقتنا أن هذه المعلمة ستقع بين الحد الأدنى والحد الأعلى للفترة. فمثلا يمكننا القول أن متوسط المبيعات اليومية لإحدى الشركات يتراوح بين 150 ألف دج، 200 ألف دج بدرجة ثقة 95%.

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

4.1 خصائص المقدّر الجيد:

الهدف من معاينة جزء من المجتمع هو الحصول على تقديرات لخصائص المجتمع محل الدراسة ويعتبر المقدّر جيداً إذا توفرت فيه الخصائص التالية:

- عدم التحيز؛
- الاتساق؛
- الكفاءة؛
- الكفاية.

1.4.1 الدقة وعدم الانحياز

نقول عن تقدير ما انه غير متحيز اذا كانت القيمة المتوقعة لمتوسط قيمة التقديرات المحسوبة من كل العينات الممكنة = القيمة الحقيقية لقيمة الدليل في المجتمع؛ فعدم الانحياز بتساوي الوسيط المراد تقديره θ مثلاً مع توقع وسيط للتقدير $\hat{\theta}$ أي أن مقدار الخطأ في التقدير يساوي صفراً وبعبارة رياضية نجد أن شرط عدم الانحياز¹ هو:

$$E(\hat{\theta}) = \theta$$

2.4.1 خاصية الاتساق:

يقال لتقدير ما انه تقدير متسق اذا كان هذا التقدير يصير مساوياً بالضبط لقيمته الحقيقية في المجتمع اذا صار حجم العينة مساوياً لحجم المجتمع ($n=N$)،

3.4.1 الكفاءة:

يقال لتقدير ما انه كفء اذا كان لهذا التقدير اقل تباين؛ والكفاءة خاصية نسبية تستخدم للمقارنة بين المقدرات المختلفة لنفس المعلمة ونفس حجم العينة، ويكون المقدّر الأكفأ هو الذي يعطي تقديرات قريبة من

¹ علاء الدين القبانجي، حسام حمامة كرمجي، الاحتمال والاحصاء، منشورات جامعة دمشق، 2011-2012، ص 212.

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

المعلمة المجهولة فإذا كان لدين مقدرين $\hat{\theta}_1$ و $\hat{\theta}_2$ لمعلمتين θ_1 و θ_2 على الترتيب فإن $\hat{\theta}_1$ أكفأ من $\hat{\theta}_2$ إذا كان ¹:

$$V(\hat{\theta}_1) < V(\hat{\theta}_2)$$

ويتم حساب كفاءة المقدر d من العلاقة ²:

$$e(d) = \frac{1}{V(d)nE\left(\frac{\partial \ln f(x, \theta)}{\partial \theta}\right)^2}$$

أو بصورة مكافئة:

$$e(d) = \frac{1}{V(d)nE\left(\frac{\theta^2 \ln f(x, \theta)}{\partial \theta^2}\right)^2}$$

4.4.1 الكفاءة:

يقال للمقدر $\hat{\theta}$ بأنه مقدر كاف لتقدير θ بأنه ذلك المقدر الذي يستعمل كل معلومات العينة، ومن ثم فإن أي مقدر آخر لا يمكنه أن يضيف جديدا باستخدام نفس العينة، فإذا كان التوزيع التكراري للعينة $(X_1, \dots, X_n)$ والمشروط بالشرط $\hat{\theta} = k$ لا يعتمد على الوسيط θ ذاته ولكافة قيم k ؛

والكفاية تعني عدم الحاجة الى اضافة عناصر أو المعلومات أخرى من المجتمع الاحصائي لأن هذه العناصر الاضافية سوف لن تعطي من المعلومات أكثر مما أعطاه المقدر $\hat{\theta}$ نفسه ³.

2. فترة الثقة للمتوسط المجتمع

كما تمت الإشارة اليه سابقا فإن التقدير بمجال يتحدد بحددين أدنى وأعلى، وهنا سنحاول تحديد تقديرات لمتوسط المجتمع بناء على مختلف الحالات التي يمكن أن نواجهها.

¹ تومي صالح، مدخل لنظرية القياس الاقتصادي، ديوان المطبوعات الجامعية، الطبعة الثانية، 2011، ص ص 22-24.

² تمار أمين، مطبوعة محاضرات وتمارين في الإحصاء 3، كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، جامعة البليدة 2، 2020-2021، ص 51.

³ عبد القادر محمد عبد القادر عطية، الحديث في الاقتصاد القياسي بين النظرية و التطبيق، الدار الجامعية، 2004، ص 218.

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

1.2 فترة الثقة لمتوسط مجتمع طبيعي تباينه معلوم:

إذا كان لدينا:

$$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$$

فإن:

$$\bar{x}_i \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

كما أن:

$$Z = \left(\frac{x - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \right) \sim N(0,1)$$

فنعرف فترة الثقة $(1-\alpha)\%$ أو نقول (فترة الثقة عند مستوى معنوية α) بأنها الفترة التي تحقق ما يلي :

$$p\left(-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} < \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

وبتبسيط فترة الاحتمال التالي:

$$-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} < \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

نحصل على:

$$\bar{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

حيث يسمى المقدار: $Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ حد $(1-\alpha)\%$ الخطأ في تقدير وسط المجتمع .

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

ملاحظة:

هي قيمة المتغير الطبيعي المعياري (الدرجة المعيارية الحرجة) التي تقع على يمينها مساحة تساوي $\frac{\alpha}{2}$ ومن الجدير بالانتباه في الحسابات العادية هو أن الاحتمال $P=1-\alpha$ الشائع في هذا الصدد هو $P=0.95$ أي أن $\alpha=0.05$ و من جدول التوزيع الطبيعي المعياري نجد:

$$Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{\frac{5\%}{2}} = Z_{0.025} = 1.96$$

أي:

$$p(Z > \lambda) = \frac{\alpha}{2} = \frac{5\%}{2} = 0.025$$

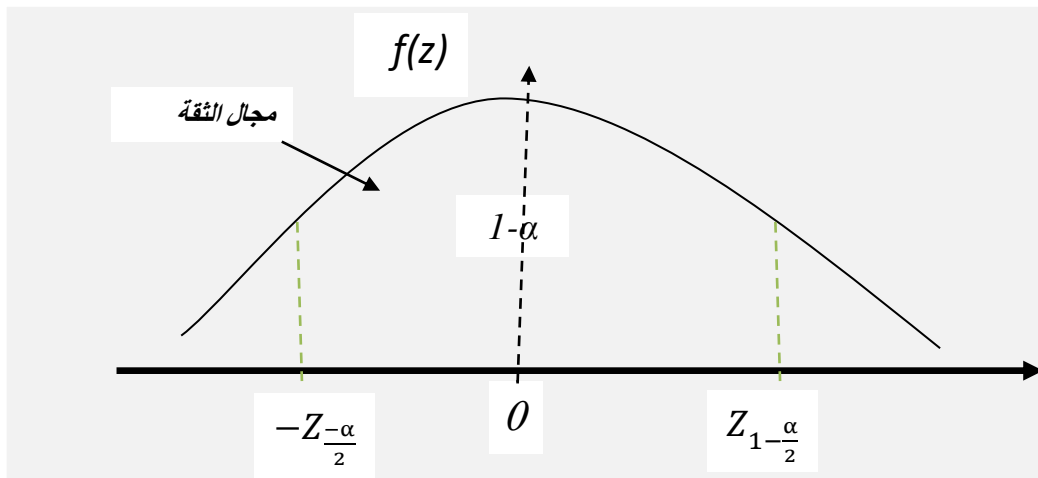
$$1 - p(Z < \lambda) = 0.025$$

$$p(Z < \lambda) = 1 - 0.025 = 0.975$$

من جدول التوزيع الطبيعي المعياري كما بينا في المحور الاول من المطبوعة وبطريقة القراءة العكسية نحصل على:

$\lambda = 1.96$ وهذا عند مستوى معنوية 5% .

الشكل رقم (3-01): التمثيل البياني لفترة الثقة للتوزيع الطبيعي



أما الجدول ادناه يبين باقي القيم:

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

الجدول رقم (01-03): جدول يوضح بعض قيم مستوى الثقة ومعامل الثقة.

0.5	0.8	0.90	0.95	0.98	0.99	مستوى الثقة $1-\alpha$
0.5	0.2	0.10	0.05	0.02	0.01	مستوى المعنوية α
0.75	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995	الاحتمال $1 - \frac{\alpha}{2}$
0.674	1.282	1.645	1.96	2.325	2.58	معامل الثقة $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

المصدر: من اعداد الباحث اعتمادا على جدول التوزيع الطبيعي المعياري والعلاقة الرياضية أعلاه.

وبالتالي إذا كان المجتمع المسحوب منه العينة ذات توزيعا طبيعيا وتباينه معروفا أو كانت العينة كبيرة أي أكثر من 30 فان توزيع المعاينة للوسط الحسابي يتبع التوزيع الطبيعي، ويرمز لفترة الثقة كما يلي:

$$IC_{\mu} = \left[\bar{X} \mp \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right]$$

مثال 02:

نريد تقدير متوسط مجتمع يتبع التوزيع الطبيعي بتباين معلوم 225، ولدينا عينة عشوائية حجمها 20 ومتوسطها 64.3 ، بمستوى ثقة 95%.

الحل:

لدينا مستوى الثقة: $1-\alpha=95\%$ ، وعليه فإن مستوى الخطأ او المعنوية : 5%

$$\text{ومنه: } Z_{1-\frac{\alpha}{2}}=1.96$$

بما أن توزيع المجتمع طبيعي فإن تقدير متوسط المجتمع وفق مستوى الثقة المطلوب يخضع للعلاقة التالية:

$$\bar{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

بالتعويض في العلاقة أعلاه:

$$64.3 - 1.96 \cdot \frac{15}{\sqrt{20}} < \mu < 64.3 + 1.96 \cdot \frac{15}{\sqrt{20}}$$

$$57.7 < \mu < 70.9$$

ونكتب:

$$IC_{\mu} = \left[64.3 \mp \frac{15}{\sqrt{20}} 1.96 \right]$$

أي عند الثقة مقدارها 95% ستكون قيمة متوسط عند المجال: [57.7 , 70.9]

إن فترة الثقة لمتوسط مجتمع طبيعي تباينه معلوم تتم ووفق المراحل التالية¹:

❖ حساب المتوسط الحسابي للعينة؛

❖ حساب الانحراف المعياري للمتوسط $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

❖ ضرب الانحراف المعياري للمتوسط في معامل الثقة المناسب $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ حسب درجة الثقة المطلوبة؛

❖ طرح وإضافة حاصل ضارب المرحلة من الوسط الحسابي للعينة فنحصل على حد أدنى وحد أعلى لفترة التقدير.

❖ بناء فترة الثقة:

$$IC_{\mu} = \left[\bar{X} \mp \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right]$$

2.2 تقدير متوسط مجتمع تباينه مجهول وعيناته كبيرة $n \geq 30$

في هذه الحالة فإن نستخدم التوزيع الطبيعي لأن حجم العينة المسحوبة من المجتمع كبيرة ($n > 30$)،

ويتم تقدير متوسط المجتمع وفق مجال الثقة المعطى وفق العلاقة التالية²:

¹ تمار أمين؛ مرجع سابق، ص 55.

² محمد صبحي أبو صالح، مبادئ الإحصاء، دار اليازوري، 2007، ص ص 311 - 312.

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

$$\bar{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma_{\bar{X}}}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma_{\bar{X}}}{\sqrt{n}}$$

ونستخدم الانحراف المعياري للعينة $\sigma_{\bar{X}}$ بدل المجتمع σ لأنه مجهول و يصبح لدينا :

$$IC_{\mu} = \left[\bar{X} \mp \frac{\sigma_{\bar{X}}}{\sqrt{n}} Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right]$$

في كثير من الاحيان لا تكون σ^2 معلومة ولذلك نستعمل S^2 (تبيان العينة كتقدير ل σ^2) وهذا اذا كان حجم العينة كبير $n \geq 30$.

مثال 03:

سحبت عينة عشوائية من مجتمع ما حجمها 36، وبلغ انحرافها المعياري $\sigma_{\bar{X}} = 8$ كما أن متوسطها الحسابي، $\bar{X} = 73$.

1- أوجد تقدير متوسط المجتمع عند مستوى ثقة 98 %.

الحل:

بما أن حجم العينة أكبر من 30 نعتمد على التوزيع الطبيعي في استخراج القيمة الحرجة لفترة الثقة الموافقة؛ كما أننا نستعمل الانحراف المعياري للعينة $\sigma_{\bar{X}}$ بدل المجتمع σ . بتطبيق العلاقة التالية:

$$\bar{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma_{\bar{X}}}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma_{\bar{X}}}{\sqrt{n}}$$

وبما أن مستوى الثقة: $1-\alpha=98\%$ فإن مستوى الخطأ أو المعنوية : 2%

لدينا: $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}=2.23$

وبالتعويض في العلاقة أعلاه:

$$73 - 2.325 \times \frac{8}{\sqrt{36}} < \mu < 73 + 2.325 \times \frac{8}{\sqrt{36}}$$

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

$$69.9 < \mu < 76.1$$

ونكتب:

$$IC_{\mu} = \left[73 \mp \frac{8}{\sqrt{36}} 2.325 \right]$$

أي عند فترة الثقة مقدارها 98% فإن متوسط المجتمع يكون ضمن المجال: [69.9 , 76.1]

3.2 تقدير متوسط مجتمع تباينه مجهول وعيناته $n \leq 30$:

في حالة ما كانت العينة صغيرة بمعنى $n < 30$ ، و الانحراف المعياري للمجتمع الطبيعي مجهول؛ فإن التوزيع الإحصائي المتبع فيمثل هذه الحالات هو ما يطلق عليه توزيع ستيودنت أو ما يعرف بتوزيع العينات الصغيرة كما يتم الاستبدال الانحراف المعياري للمجتمع σ بالانحراف المعياري للعينة S لأن تباين المجتمع مجهول. وعليه فان تقدير متوسط المجتمع وفق مجال الثقة عند مستوى معنوية α هو كالتالي:

$$\bar{X} - t_{(1-\frac{\alpha}{2}, n-1)} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + t_{(1-\frac{\alpha}{2}, n-1)} \cdot \frac{\sigma_{\bar{x}}}{\sqrt{n}}$$

ويصبح:

$$IC_{\mu} = \left[\bar{X} \mp \frac{s}{\sqrt{n}} t_{(1-\frac{\alpha}{2}, n-1)} \right]$$

مثال 04:

إذا كانت دخول مجموعة من الأفراد في دولة ما تتبع التوزيع الطبيعي، وسحبت منه عينة عشوائية

حجمها 15 أفراد، بمتوسط $\bar{X} = 52$ و انحراف معياري للعينة $\sigma_{\bar{x}} = 2.18$

1- أوجد تقدير لمتوسط دخل الأفراد في المجتمع عند مستوى ثقة 95%.

الحل:

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

بما أن حجم العينة صغير أقل من 30 وتباين المجتمع مجهول، فإن التوزيع المتبع في هذه الحالة هو توزيع ستودنت، وفق العلاقة التالية:

$$52 - t_{\left(1-\frac{0.05}{2}, 15-1\right)} \cdot \frac{2.18}{\sqrt{15}} < \mu < 52 + t_{\left(1-\frac{0.05}{2}, 15-1\right)} \cdot \frac{2.18}{\sqrt{15}}$$

$$50.79 < \mu < 53.20$$

حيث تم حساب: $t_{\left(1-\frac{0.05}{2}, 15-1\right)}$ من جدول توزيع ستودنت $t_{(0.975, 15)}$ و التي تقابل القيمة : 2.145

ويصبح لدينا مجال الثقة كالتالي:

$$IC_{\mu} = \left[52 \mp \frac{2.18}{\sqrt{15}} 2.145 \right]$$

إذا الوسط الحسابي للمداخل يتراوح ما بين 50.79 كحد أدنى و 53.20 كحد أعلى.

4.2 تحديد حجم العينة اللازم للتقدير:

بعد دراستنا لكيفية إيجاد فترات الثقة، ينشأ لدينا السؤال التالي: قبل اجراء التجربة وتسجيل قيم المشاهدات في العينة، ما هو حجم العينة المطلوبة كي نحصل على فترة ثقة بطول معلوم أو بطأ محدد لا نريد أن نتجاوزه.

لاحظ انه اذا كانت المعاينة من توزيع طبيعي تباينه معلوم أو من توزيع ما تباينه معلوم وحجم العينة كبير فان فترة القفة $100(1-\alpha)\%$ للوسط μ هي :

$$\bar{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

وطول هذه الفترة أو ما يسمى حد الخطأ يساوي $d = Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ فاذا أردنا طول الفترة لا يزيد عن d

فذلك يعني:

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq d \rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{d}{\sigma \cdot Z_{1-\frac{\alpha}{2}}} \rightarrow \sqrt{n} \leq \frac{\sigma Z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{d}$$

$$n \geq \left(\frac{\sigma Z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{d} \right)^2$$

مثال 05:

أوجد حجم العينة التي يجب أخذها من توزيع طبيعي للحصول على فترة 95 % للوسط وبطول خطأ لا يزيد عن 1.6 وانحراف معياري 10.

الحل:

من المعطيات: $Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.96$, $1-\alpha=95\%$, $d=1.6$

بالتعويض في العلاقة نجد:

$$n \geq \left(\frac{10 \times 1.96}{1.6} \right)^2$$

أي:

$$n \geq 150$$

3. فترة الثقة للفرق بين متوسطين

سنحاول من خلال هذا المحور تقدير فترة الثقة للفرق بين متوسطي مجتمعين في حالات مختلفة:

1.3 فترة الثقة للفرق بين متوسطي مجتمعين تباينيهما معلوم

إذا كان:

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

$$X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$$

فإن:

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$$

ومنه:

$$\frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0, 1)$$

وتكون فترة الثقة $(1-\alpha)\%$ كالتالي :

$$-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} < \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} < Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

و بعد حل المتباينة نجد :

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} < (\mu_1 - \mu_2) < (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

ويصبح مجال الثقة كالتالي:

$$Ic(\mu_1 - \mu_2) = \left[(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \mp Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \right]$$

مثال 06:

سحبت عيتان عشوائيتان من مجتمعين يتبعان التوزيع الطبيعي؛ فكانت نتائجهما كما يلي:

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

المجتمع 2	المجتمع 1	
45	60	حجم العينة
90	120	متوسط العينة
27	45	تباين العينة

المطلوب:

- حدد مجال الثقة عند مستوى خطر 5% للفرق بين متوسطي المجتمعين.

الحل:

بما أن مستوى خطر 5% فهذا يعني أن مستوى المعنوية 95% وعليه فإن القيمة $Z_{1-\frac{0.05}{2}}$ 1.96

كما لدينا:

$$\sigma_1^2 = 45, \sigma_2^2 = 27, \bar{x}_1 = 120, \bar{x}_2 = 90, n_1 = 60, n_2 = 45$$

ومنه فإن مجال الثقة للفرق بين متوسطي المجتمعين بعد التعويض في العلاقة التالية:

$$(120 - 90) - Z_{1-\frac{0.01}{2}} \sqrt{\frac{45}{60} + \frac{27}{45}} < (\mu_1 - \mu_2) < (120 - 90) + Z_{1-\frac{0.01}{2}} \sqrt{\frac{45}{60} + \frac{27}{45}}$$

$$250 < \mu_1 - \mu_2 < 710$$

أي عند مستوى ثقة 95% ستكون قيمة الفرق بين متوسط المجتمعين ضمن المجال:

$$[710 - 250]$$

2.3 فترة الثقة للفرق بين وسطين تباينهما مجهول

وهنا نميز بين حالتين:

الحالة الأولى: العينتان كبيرتان الحجم ($n_1, n_2 \geq 30$)

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

في هذه الحالة يبقى التوزيع المستخدم هو التوزيع الطبيعي المعياري مع تبديل σ_1^2 و σ_2^2 بتبايني العينين وتصبح العلاقة:

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} < (\mu_1 - \mu_2) < (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

الحالة الثانية: العينتان صغيرتان الحجم ($n_1, n_2 < 30$):

في هذه الحالة فإننا نستخدم بتوزيع t لايجاد مجال الثقة وفق العلاقة التالية :

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - t_{(1-\frac{\alpha}{2}, n_1+n_2-2)} \sqrt{\frac{\sigma_{\bar{x}_1}^2}{n_1} + \frac{\sigma_{\bar{x}_2}^2}{n_2}} < (\mu_1 - \mu_2) < (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + t_{(1-\frac{\alpha}{2}, n_1+n_2-2)} \sqrt{\frac{\sigma_{\bar{x}_1}^2}{n_1} + \frac{\sigma_{\bar{x}_2}^2}{n_2}}$$

ويتم حساب درجة الحرية وفق هذه للتوزيع ستودنت كالتالي: $v=n_1+n_2-2$ ويقع ضمن متباينة الثقة التالية و ذلك بدرجة ثقة $P=(1-\alpha)\%$.

ويصبح مجال الثقة كالتالي:

$$IC\mu_1 - \mu_2 = \left[(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \mp t_{(1-\frac{\alpha}{2}, n_1+n_2-2)} \sqrt{\frac{\sigma_{\bar{x}_1}^2}{n_1} + \frac{\sigma_{\bar{x}_2}^2}{n_2}} \right]$$

مثال 07:

أعد حل المثال السابق (10) في حالة مجهولية تباين المجتمعين وبافتراض تباين العينتين هما كالتالي:

$$\sigma_{\bar{x}_1}^2 = 500, \quad \sigma_{\bar{x}_2}^2 = 600$$

$$n_1 = 8, \quad n_2 = 12$$

الحل:

بتطبيق العلاقة التالية:

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - t_{(1-\frac{\alpha}{2}, n_1+n_2-2)} \sqrt{\frac{\sigma_{\bar{x}_1}^2}{n_1} + \frac{\sigma_{\bar{x}_2}^2}{n_2}} < (\mu_1 - \mu_2) < (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + t_{(1-\frac{\alpha}{2}, n_1+n_2-2)} \sqrt{\frac{\sigma_{\bar{x}_1}^2}{n_1} + \frac{\sigma_{\bar{x}_2}^2}{n_2}}$$

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

وبالتعويض نجد:

$$(1680 - 1200) - t_{(1-\frac{0.05}{2}, n_1+n_2-2)} \sqrt{\frac{500^2}{80} + \frac{600^2}{75}} < (\mu_1 - \mu_2) < (1680 - 1200) + t_{(1-\frac{0.05}{2}, n_1+n_2-2)} \sqrt{\frac{500^2}{80} + \frac{600^2}{75}}$$

$$مع: t_{(1-\frac{0.05}{2}, 8+12-2)} = t_{(0.995, 18)} = 2.878$$

أي:

$$223.79 < (\mu_1 - \mu_2) < 736.2066$$

4. فترة الثقة لتباين المجتمع

إن تحديد فترة الثقة لتباين المجتمع يقودنا الى استخدام توزيع اخر وهو مربع كاي الذي يفترض أن تكون العينة العشوائية المأخوذة من مجتمع احصائي ذي توزيع طبيعي، وذلك انطلاقا من العلاقة التالية:

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim (X_{n-1}^2)$$

وتعرف فترة الثقة لتباين المجتمع بأنها الفترة التي تحقق

$$p \left(X_{(1-\frac{\alpha}{2}, n-1)}^2 < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < X_{(\frac{\alpha}{2}, n-1)}^2 \right) = 1 - \alpha$$

وبعد حل المتباينة نجد أن فترة الثقة للتباين كالتالي:

$$\frac{(n-1)S^2}{X_{(1-\frac{\alpha}{2}, n-1)}^2} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{X_{(\frac{\alpha}{2}, n-1)}^2}$$

حيث:

n : حجم العينة، S^2 : يمثل تباين العينة العشوائية صغيرة كانت أو كبيرة.

ويصبح مجال الثقة كالتالي:

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

$$IC\sigma^2 = \left[\frac{(n-1)S^2}{X^2_{\left(1-\frac{\alpha}{2}, n-1\right)}}, \frac{(n-1)S^2}{X^2_{\left(\frac{\alpha}{2}, n-1\right)}} \right]$$

مثال 08:

أوجد فترة الثقة لتباين مجتمع سحبت منه عينة حجمها 12 و تباينها 12.6 عند مستوى معنوية 95%.

الحل:

لدينا من المعطيات:

$$S = 12.6, n = 12, \alpha = 0.05$$

من جدول توزيع كاي التربيع نجد:

$$X^2_{\left(1-\frac{0.05}{2}, 12-1\right)} = X^2_{(0.975, 11)} = 21.92$$

$$X^2_{\left(\frac{0.05}{2}, 12-1\right)} = X^2_{(0.025, 11)} = 3.82$$

بالتعويض في العلاقة نجد:

$$\frac{(12-1) \cdot 12.6}{21.92} < \sigma^2 < \frac{(12-1) \cdot 12.6}{3.82}$$

$$6.32 < \sigma^2 < 36.28$$

5. فترة الثقة للنسبة بين تبايني المجتمعين:

إذا كانت $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ قيم عينة مسحوبة من مجتمع يتبع التوزيع الطبيعي (μ_1, σ_1^2) وكانت $(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$ عينة عشوائية مسحوبة من مجتمع يتبع التوزيع الطبيعي (μ_2, σ_2^2)

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

مستقل عن التوزيع الأول فإن فترة الثقة عند مستوى $(1-\alpha)$ للنسبة $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ في هذه الحالة يخضع لتوزيع فيشر $F_{(n_1-1, n_2-1)}^p$ باستخدام احصائية فيشر التالية :

$$F = \frac{S_1^2 / \sigma_1^2}{S_2^2 / \sigma_2^2} = \frac{\sigma_2^2 \cdot S_1^2}{\sigma_1^2 \cdot S_2^2}$$

وبدرجتي حرية $v_2 = n_2 - 1, v_1 = n_1 - 1$ على الترتيب أي أن:

$$\frac{S_1^2}{S_2^2} \cdot F_{(n_1-1, n_2-1)}^{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{S_1^2}{S_2^2} \cdot F_{(n_1-1, n_2-1)}^{1-\frac{\alpha}{2}}$$

حيث يمكن تعويض:

$$\frac{S_1^2}{S_2^2} \cdot F_{(n_1-1, n_2-1)}^{\frac{\alpha}{2}} = \frac{S_1^2}{S_2^2} \cdot \frac{1}{F_{(n_2-1, n_1-1)}^{1-\frac{\alpha}{2}}}$$

مثال 09:

أخذت عينة حجمها 8 و تباينها 82 من مجتمع يتبع التوزيع الطبيعي؛ وعينة أخرى حجمها 11 مستقلة عن الأولى وتباينها 160 من مجتمع يتبع كذلك التوزيع الطبيعي.

1- أوجد فترة الثقة لنسبة تباين المجتمعين عند المستوى معنوية 10%.

الحل:

بالتعويض في علاقة فترة الثقة لنسبتين نجد:

$$\frac{82}{160} \cdot F_{(8-1, 11-1)}^{\frac{0.1}{2}} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{82}{160} \cdot F_{(8-1, 11-1)}^{1-\frac{0.1}{2}}$$

$$2.49 \cdot 0.28 < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 2.49 \cdot 3.14$$

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

حيث:

$$F_{(7,10)}^{0.95} = 3.14$$

$$F_{(7,10)}^{0.05} = \frac{1}{F_{(10,7)}^{0.95}} = \frac{1}{3.57} = 0.28$$

$$0.6972 < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 7.81$$

أي عند مستوى ثقة 95 % ستكون فيها قيمة نسبة التباين لمجتمعين تقع ضمن المجال
[0.6972 , 7.81]

6. فترة الثقة لنسبة المجتمع والفرق بين نسبتي

1.6 فترة الثقة لنسبة المجتمع:

إذا كانت P تمثل النسبة في المجتمع تحقق خاصية ما و $\bar{P}$ تمثل النسبة في العينة التي تحقق نفس الخاصية
فان توزيع المعاينة يقترب من التوزيع الطبيعي حسب نظرية النهاية المركزية لما $(n \geq 30)$ ؛ نعرف فترة الثقة %
 $(1-\alpha)$ للنسبة التي تحقق علاقة التالية: ¹

$$p \left(-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{P}-P}{\sqrt{\frac{P(1-p)}{n}}} \leq Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right) = 1 - \alpha$$

فنحصل على:

$$\bar{P} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{P(1-p)}{n}} \leq P \leq \bar{P} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{P(1-p)}{n}}$$

¹تمار أمين، مرجع سابق ص60.

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

ويصبح مجال الثقة كالتالي:

$$IC_p = \left[\bar{P} \mp Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{P(1-p)}{n}} \right]$$

مثال 10:

أخذت عينة عشوائية من إحدى المجتمعات تتكون من ذكور وإناث حجمها 85 وجد منها 10 ذكور، أوجد فترة الثقة لنسبة الذكور في المجتمع P عند فترة الثقة 95% .

الحل:

لدينا:

$$\bar{P} = \frac{10}{85} = 0.12 \quad n=85$$

$$\bar{P} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{P(1-p)}{n}} \leq p \leq \bar{P} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{P(1-p)}{n}}$$

بالتعويض:

$$0.12 - Z_{0.025} \sqrt{\frac{0.12(1-0.12)}{85}} \leq p$$

$$\leq 0.12 + Z_{0.025} \sqrt{\frac{0.12(1-0.12)}{85}}$$

$$0.05 \leq p \leq 0.19$$

أي أنه عند ثقة مقدارها 95% ستكون قيمة نسبة الذكور في المجتمع تقع ضمن المجال [0.05 , 0.19]

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

2.6 فترة الثقة للفرق بين نسبي مجتمعين :

إذا كان لدينا عينتين عشوائيتين ومستقلتين عن بعضهما البعض فإن فترة الثقة بين النسبتين تعطى كما يلي:

$$IC_{(P_1 - P_2)} = \left[(\bar{P}_1 - \bar{P}_2) \mp Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{P(1-p)}{n}} \right]$$

مثال 11:

في إحدى المسابقات الرياضية للرماية على هدف ساكن لـ 100 مرة أصاب رضا 60 مرة وأصاب محسن الهدف 25 مرة، فإذا كانت نسبة $(P_1 - P_2)$ هي النسبة الصحيحة لإصابة الهدف لكل من رضا ومحسن على التوالي.

- أوجد فترة الثقة للفرق بين نسبي المجتمعين عند 99%.

الحل:

لدينا:

$$P_1 = \frac{60}{100} = 0.6, P_2 = \frac{25}{100} = 0.25$$

بالتعويض علاقة أعلاه نجد:

$$(0.6 - 0.25) - 2.58 \sqrt{\frac{0.6(0.4)}{60} + \frac{0.25(0.75)}{25}} \leq (P_1 - P_2) \leq (0.6 -$$

$$0.25) + 2.58 \sqrt{\frac{0.6(0.4)}{60} + \frac{0.25(0.75)}{25}}$$

$$0.0733 \leq (P_1 - P_2) \leq 0.6266$$

أي أنه عند مستوى ثقة 99 % ستكون قيمة الفرق بين نسبي المجتمعين تقع ضمن المجال:

$$[0.0733, 0.6266]$$

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

7. تمارين مقترحة:

التمرين الاول:

شركة مختصة في نقل المسافرين تريد تقدير المدة المستغرقة من طرف حافلاتها في خط محدد فقامت بمعاينة عشوائية لإحدى الحافلات وتم تسجيل الفترات التي تقضيها خلال كل رحلة بالدقائق فكانت كما يلي:

103.96.98.102.100.110.97.80

المطلوب:

- (1) قدر نقطيا معدل الفترة التي تستغرقها حافلاتها خلال الرحلة
- (2) قدر نقطيا الانحراف المعياري للفترات المستغرقة خلال الرحلة الواحدة

التمرين الثاني:

يرغب أحد الخبراء الكفاءة باستخدام المتوسط الكفاءة الميكانيكية لعدد معين من العمال في إحدى الصناعات الكبيرة للسيارات، فإذا افترضوا بناء على الخبرة بأن $\sigma = 6.2$ فكم يكون أعلى خطأ في تقدير المتوسط الحسابي μ للمجتمع العمالي على أساس 0.99 من الثقة، وإذا افترضنا بأن متوسط الحسابي للعينة السابقة

$\bar{X} = 69.5$ فكم هو تقدير المتوسط الحسابي μ لكفاءة العمال كافة في تلك الصناعة وذلك بنفس الدرجة 0.99 من ثقة .

التمرين الثالث:

إذا كانت دخول مجموعة من الأفراد في دولة ما تتبع التوزيع الطبيعي، و سحبت منها عينة عشوائية حجمها 10 أفراد بوسط حسابي 72 ون و انحراف معياري بلغ 6.4 ون .

المطلوب:

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

أوجد مجال الثقة للمتوسط الحسابي لجميع الافراد بمستوى ثقة 95 %

التمرين الرابع:

يرغب باحث في تقدير متوسط الاجر الاسبوعي لعدة آلاف من العاملين بأحد المصانع في حدود زائد وناقص 20 دولار وبدرجة ثقة 95% ويعرف الباحث من خبرته الماضية أن توزيع الاجر الاسبوعي للعاملين يتبع التوزيع الطبيعي بانحراف معياري قدره 40 دولار، فما هو الحد الأدنى للعينة المطلوب؟

التمرين الخامس:

أخذت عينتان عشوائيتان حجمهما: $n_1 = 17$ و $n_2 = 15$ من مجتمعين يتبعان التوزيع الطبيعي وكان تباينهما كما يلي: $\sigma_{\bar{x}_1}^2 = 20$ ، $\sigma_{\bar{x}_2}^2 = 25$.

المطلوب:

- 1- أوجد مجال الثقة لتباين المجتمع الاول عند مستوى معنوية 1%؛
- 2- أوجد مجال ثقة للفرق بين الوسطين $\mu_1 - \mu_2$ على المستوى 10 %؛
- 3- أوجد

4- أوجد 10% للنسبة $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ بفرض أن التوزيعان مستقلان

التمرين السادس:

إذا أخذت عينة عشوائية من الدرجات الامتحانات حجمها $n=50$ و درجة من 200 درجة في امتحان لطلاب هندسة الحواسيب، و كان متوسطها الحسابي $\bar{X} = 75$ و انحرافها المعياري $\sigma_{\bar{X}} = 10$.

المطلوب:

- 1) أوجد فترة الثقة التقدير المتوسط الحسابي μ للمجتمع الاحصائي لدرجات الطلبة وبدرجة ثقة 95 .
- 2) حدد درجة الثقة في فترة التقدير التالية:

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

$$74 < \mu < 76$$

التمرين السابع:

لمقارنة متوسط الدخل الشهري للأسر القاطنة في مدينة العفرون بمتوسط الدخل الشهري للأسر القاطنة في مدينة البليدة، أخذت عينتين عشوائيتين حجمها على التوالي 20 و 25 ووجد أن متوسط الدخل في العينة المأخوذة من مدينة العفرون يقدر 25000 دج بتباين 640000 بينما في مدينة البليدة فتشير احصاءات العينة الى متوسط الدخل الشهري للأسر هو 21000 دج بتباين يقدر ب 360000 .

ما التقدير عند مستوى ثقة 95 % الفرق بين متوسطي الدخل الشهري للأسر في المدينتين؟

التمرين الثامن:

في عينة عشوائية حجمها 100 عامل من مصنع 1200 عامل، وجد أن 70 يفضلون الاشتراك في نظام للمعاشات كأفراد بدلا من الاشتراك في مشروع معاشات خاص بالشركة.

أوجد فترة الثقة 95% لنسبة العاملين الذين يفضلون مشروعات معاشات الفردية.

الفصل الرابع:

اختبار الفرضيات

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

تمهيد:

تم التطرق في الفصول السابقة إلى نظرية المعاينة وكيفية تقدير معالم المجتمع المجهولة من خلال إنشاء فترات ثقة لهذه المعالم واستخدامها في اتخاذ القرارات؛ وباستخدام بيانات العينة العشوائية المسحوبة من المجتمع المراد تقدير معالمه لإنشاء فترة الثقة المطلوبة عند مستوى ثقة $(1-\alpha)$. وعليه فإن النتيجة المحصلة من خلال فترات الثقة بأننا متأكدون بأن فترة الثقة المنشأة سوف تحتوي على القيمة الحقيقية المجهولة لمعلمة المجتمع.

إن فترة الثقة يتم إنشاؤها بالاعتماد على بيانات العينة العشوائية، ليتم استخدامها في عمليات الاستدلال الإحصائي حول القيمة الحقيقية لمعلمة المجتمع. ولكن في الواقع العملي غالبا ما يكون هنالك ادعاء مسبق حول قيمة المعلمة المجهولة. وليس بالضرورة أن يكون الادعاء مرتبط بقيمة محددة؛ إذ يمكن أن يكون الادعاء ذا صيغة رياضية مثلا قيمة المعلمة لا تزيد عن قيمة محددة؛ أو أن تكون أكبر من قيمة محددة. في هذه الحالة يكون الهدف من الاستدلال الإحصائي أكثر تحديدا منه في عملية إنشاء فترة ثقة، حيث يكون منصبا حول البحث في مصداقية الطرح المفروض وبالتالي الوصول إلى قرار بقبول أو رفض هذا الطرح (الإدعاء)¹.

1. مفاهيم أساسية

هناك جملة من المفاهيم المتعلقة بنظرية اختبار الفرضيات يتعين على الطالب الإلمام بجوانبها؛ حتى يسنى له الحصول على أكبر قدر من المعرفة في مجال الإحصاء الاستدلالي والتي سنتناولها في النقاط التالية:

1.1 تعريف الفرضية الإحصائية

عرف كيلنجر الفرضية بصفة عامة على أنها جملة تخمينية توضح العلاقة بين متغيرين أو أكثر²؛ ومن هذا التعريف يمكن استنباط مفهوم الفرضية الإحصائية فنقول: هي عبارة عن إدعاء أو تخمين معين حول معلمة من معالم المجتمع ويكون المطلوب اختبار صحة هذا الادعاء أو التخمين.

2.1 خصائص الفرضية الجيدة:

الفرضية الجيدة تتميز بعدد من الخصائص أهمها³:

¹ مقدمة في التحليل الإحصائي؛ جامعة الملك سعود، ص 409، أنظر الرابط: https://fac.ksu.edu.sa/sites/default/files/501kmy-511ml-537kmy-mqdm_mkhtSr_n_khtbr_lfrDyt_0.doc، تاريخ الإطلاع: 2022/04/03.

² حسن احمد الشافعي وآخرون: مبادئ البحث العلمي، دار الوفاء، الاسكندرية، ط1، 2009، ص35

³ موفق الحمداني وآخرون: مناهج البحث العلمي أساسيات البحث العلمي، ط1، عمان، مؤسسة الوراق للنشر والتوزيع، 2006م، ص63

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

- ان تكون الفرضية معقولة من حيث اتساعها وشمولها مع تجنب الفرضية ذات الدلالات الشاملة؛
- ان تكون الفرضية ذا صلة وثيقة بعمل الباحث، وان تكون منبثقة من ملاحظات ومتابعات؛
- ان تكون الفرضية متسقة مع الحقائق المعروفة ومن الصعب أن تكون الفرضية متسقة مع جميع الحقائق؛
- ينبغي على الفرضية ان لا تتعارض مع القانون العلمي الثابت لان قوانين العلم وحدة متكاملة. ولكن يجوز أن تعارض نظرية معروفة أو مشاعة؛
- أن تصاغ الفرض بطريقة قابلة للاختبار واثبات صحتها أو نفيها؛
- يجب ان تحدد علاقة بين متغيرات البحث، فالفرضية الذي يمكن قبولها على أساس معايير ومقاييس فهي فرضية يجب أن تحدد العلاقة بين متغيرين.

3.1 تقسيمات الفرضية

في هذا المقرر تنقسم الفرضين إلى قسمين؛ حيث يتم وضع رموز تمثل الادعاء وعكس الادعاء. فبالنسبة للفرضية الذي تنص على عدم وجود ظاهرة ومن ثم عدم صحة الادعاء يرمز لها بالرمز H_0 ؛ وفي المقابل استخدام الرمز H_1 للدلالة على الفرضية المغايرة لفرضية العدم.

1.3.1 الفرضية العدم H_0 (Null Hypothesis)

هي الفرضية التي تصاغ حول معلمة المجتمع التي تجري الاختبار عليها باستخدام بيانات من عينة وهي فرضية محايدة؛ وتعرف بأنها تلك الفرضية التي يتم اختبار امكانية رفضها بفرض أنها صحيحة، وعادة يتم صياغتها بشكل تبين فيه أن التقديرات للمعلمات التي يتم الحصول عليها من العينة مثلاً تكون مطابقة للمجتمع المسحوبة منه تلك العينة¹.

فالفرضية العدم تشير إلى عدم وجود فرق أو عدم وجود تغير، أي أن الفرق بين معلمة المجتمع والإحصائية من العينة ناتج عن الصدفة ولا فرق حقيقي بينهما. وهي الفرضية التي ننطلق منها ونرفضها عندما تتوفر دلائل على عدم صحتها، وخلاف ذلك نقبلها؛ وتعني كلمة Null انه لا يوجد فرق بين معلمة المجتمع والقيمة المدعاة (إحصائية العينة).

¹ كمال علوان خلف المشهدي، عماد حازم عبودي، اختبار الفرضيات الإحصائية، كلية الإدارة والاقتصاد، جامعة بغداد، العراق، بدون سنة نشر، ص06.

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

2.3.1 الفرضية البديلة H_1

وهي فرضية مكملية لفرضية العدم، وتبين أن تقديرات الملاحظات التي يتم الحصول عليها من العينة مثلاً لا تكون مطابقة للمجتمع¹، فهذه الفرضية يتم صياغتها كبديل عن فرضية العدم ونقبلها عندما نرفض فرضية العدم باعتبارها ليست صحيحة بناء على المعلومات المستقاة من العينة.

4.1 أنواع اختبار الفرضيات

عندما نقبل الفرضية المبدئية فإننا نقبلها بنسبة دقة 90% أو 95% أو 99% أو غير ذلك وتسمى مستويات الثقة Significance Levels أي يوجد نسبة خطأ معين في قبولنا لفرضية العدم، بمعنى أننا نقبل صحة فرضية العدم وهي خاطئة وهذا الخطأ هو الخطأ α ويسمى مستوى المعنوية، أي إذا كان مستوى الثقة 95% ($1 - \alpha$) فإن مستوى المعنوية α تساوي 5% وهي عبارة عن مساحة منطقة تحت منحنى التوزيع تمثل منطقة الرفض وتكون أما على صورة ذيل واحد جهة اليمين أو اليسار أو ذيلين متساويين في المساحة واحد جهة اليمين والثاني جهة اليسار.

1.4.1 تعريف اختبار الفرضيات من جانب واحد

هو الاختبار الذي تبين فيه الفروض البديلة أن المعلمة للمجتمع أكبر أو أصغر من إحصائية العينة، فهناك تحديد للاتجاه. وهنا نميز بين حالتين:

■ الحالة الأولى الفرضية البديلة أحادية الجانب من اليمين

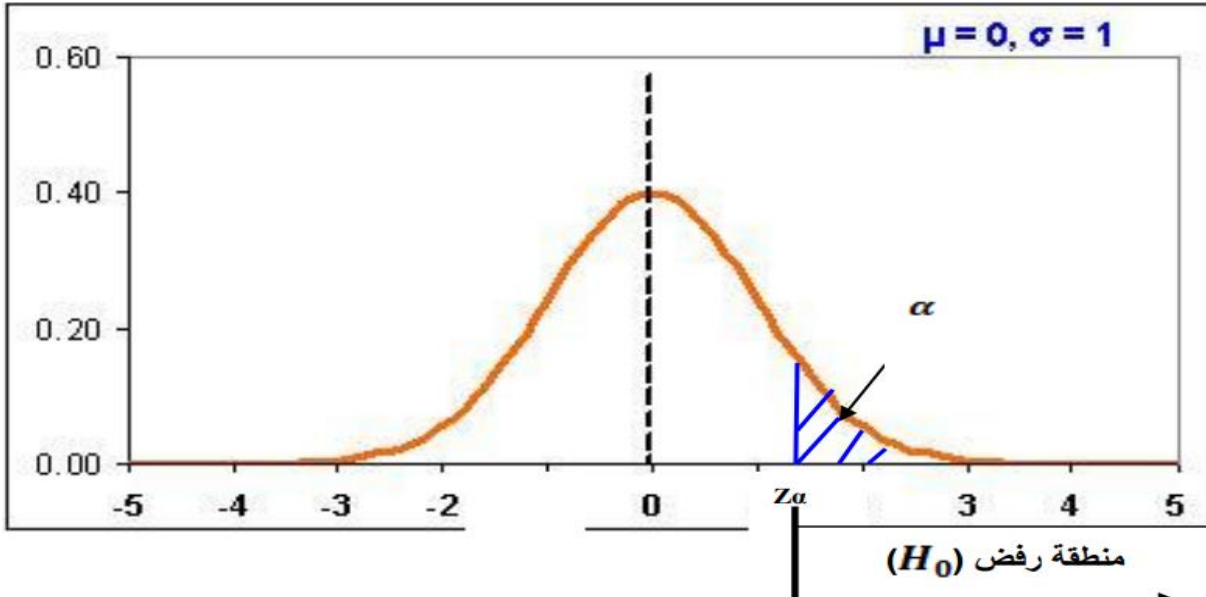
وتصاغ الفرضيات كما يلي:

$$\begin{cases} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu > \mu_0 \end{cases}$$

والتمثيل البياني يكون كما في الشكل التالي:

¹ خلف المشهداني، عبودي، مرجع سابق، ص 06.

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

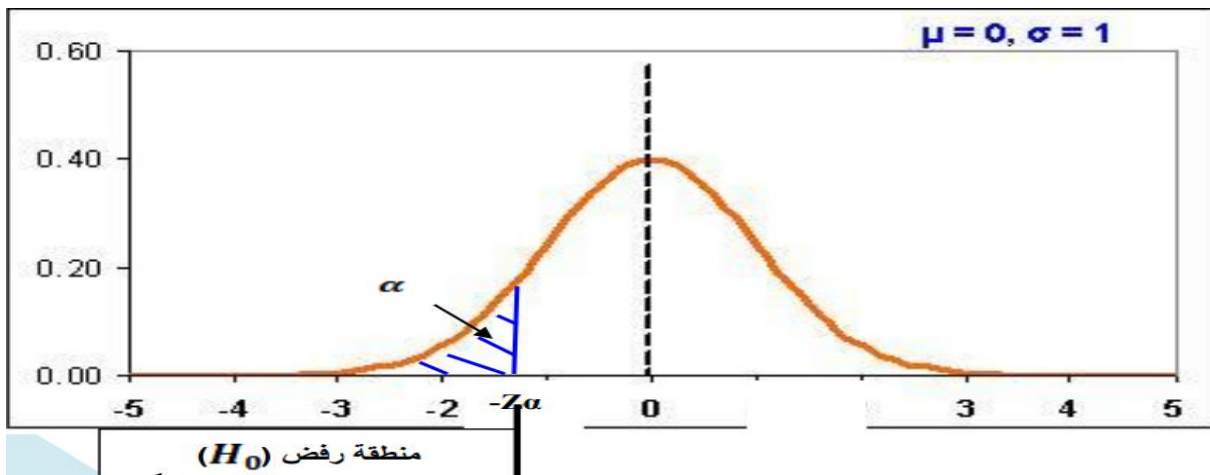


■ الحالة الثانية الفرضية البديلة أحادية الجانب من اليسار

وتصاغ الفرضيات كما يلي:

$$\begin{cases} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu < \mu_0 \end{cases}$$

والتمثيل البياني يكون كما في الشكل التالي:



2.4.1 تعريف اختبار الفرضيات من جانبيين (ذيلين):

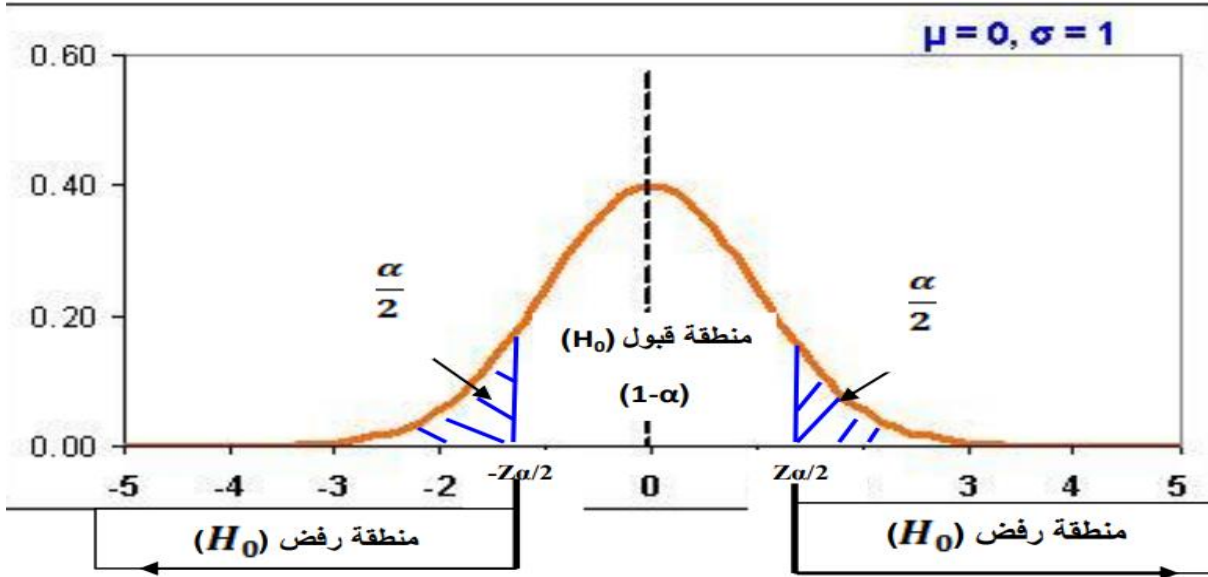
هو الاختبار الذي لا تبين فيه الفرضية البديلة أن معلمة المجتمع أكبر أو أصغر من إحصائية العينة، بل

مجرد أنها تختلف؛ كما يلي:

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

$$\begin{cases} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu \neq \mu_0 \end{cases}$$

والتمثيل البياني يكون كما في الشكل التالي:



وكمحصلة يمكن القول بان لكي يتم وضع فرضية عدم وفرضية بديلة رياضيا لابد من تحقيق عدة شروط هي:

➤ يجب في البداية تحديد المعلمة المجهولة القيمة والمطلوب إجراء الاختبار عليها، حيث يمكن أن تكون متوسط مجتمع أو الفرق بين متوسطين أو نسبة حدوث حدث في مجتمع أو الفرق بين نسبتي أو تباين مجتمع أو نسبة تباينين؛

➤ يتم تحديد القيمة المقابلة للمعلمة المجهولة والمتعلقة بالادعاء المطلوب اختباره؛

➤ يتم تحديد اتجاه العلاقة بين المعلمة والقيمة المقابلة، والتي يلزم أن تكون في إحدى ثلاث صيغ هي < أو > أو ≠، والتي ستكون الفرضية البديلة الممثلة للادعاء؛

➤ يتم في هذه الخطوة صياغة فرضية العدم، حيث تضم مكونات الفرضية البديلة مع تبديل العلاقة الرياضية بين المعلمة والقيمة المقابلة مع تغيير إشارة المتباينة لتعكس الحالة المقابلة للفرضية البديلة، وبالتالي لتمثل عكس الادعاء.

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

مثال 01:

بين فيما يلي معطيات الادعاء (المعلمة، القيمة المقابلة و العلاقة الرياضية) وقم بصياغة كل من فرضية العدم والفرضية البديلة.

- 1- ادعاء مدير إدارة الصيانة في إحدى الشركات بأن الوقت المستغرق في المتوسط لصيانة أي آلة أقل من 12 ساعة؛
- 2- يدعي أحد المصانع الوطنية للبطاريات الكهربائية بأن متوسط عمر البطارية المنتجة بواسطة المصنع أكثر من 1.5 سنة.
- 3- يدعي إحدى الباحثين بأن نسبة الطلاب الحاصلين على إشارات أكاديمية في جامعة الملك سعود أقل من 0.30 من إجمالي عدد الطلاب في الجامعة؛
- 4- يدعي إحدى المستثمرين بأن نسبة الربح في المتوسط من الاستثمار في الأسهم السعودية لا تساوي (تختلف عن) 0.10؛

الحل:

- 1- المعلمة: متوسط الوقت المستغرق لصيانة آلة (μ)

إن القيمة المقابلة: 12 يوم؛ كما أن العلاقة الرياضية: أقل من ($<$)؛ ومنه فرضيات هذه المعلمة تكون كالتالي:

$$\begin{cases} H_0: \mu \geq 12 \\ H_1: \mu < 12 \end{cases}$$

- 2- المعلمة: متوسط عمر البطارية (μ)

إن القيمة المقابلة: 1.5 سنة؛ كما أن العلاقة الرياضية: أكثر من ($>$)؛ ومنه فرضيات هذه المعلمة تكون كالتالي:

$$\begin{cases} H_0: \mu \leq 1.5 \\ H_1: \mu > 1.5 \end{cases}$$

- 3- المعلمة: نسبة الطلاب الحاصلين على إشارات (P)

إن القيمة المقابلة: 30% (0.30)؛ كما أن العلاقة الرياضية: أقل من ($<$)؛ ومنه فرضيات هذه المعلمة تكون كالتالي:

$$\begin{cases} H_0: P \geq 0.3 \\ H_1: P < 0.3 \end{cases}$$

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

4- المعلمة: نسبة الربح من الاستثمار في الأسهم P

إن القيمة المقابلة: 10%؛ كما أن العلاقة الرياضية: لا تساوي ($\neq$)؛ ومنه فرضيات هذه المعلمة تكون كالتالي:

$$\begin{cases} H_0: P = 0.1 \\ H_1: P \neq 0.1 \end{cases}$$

5.1 أخطاء اختبار الفرضيات

إن احتواء عملية اختبار الفرضيات على فرضيتين شاملتان ومتضادتان (فرضية العدم والفرضية البديلة) لذا فإن القرار المتعلق بإحداها يمثل القرار المعاكس للفرضية الأخرى. فقبول فرضية العدم يعني رفض الفرضية البديلة، والعكس صحيح. وهو ما ينجر عليه أخطاء بنسب معينة. يوجد نوعان من الأخطاء التي يحتمل حدوثها في عملية اختبار الفرضيات. ويمكن تلخيص ما سبق فيما يلي:

- الخطأ من النوع الأول: هو رفض فرضية عدم صحيحة ويرمز لاحتمال وقوعه بالرمز α ويطلق عليه مصطلح مستوى المعنوية.
 - الخطأ من النوع الثاني: هو قبول فرضية عدم خاطئة ويرمز لاحتمال وقوعه بالرمز β .
- ويمكن توضيح هذين الخطأين في الجدول التالي:

الحالة \ القرار	قبول H_0	رفض H_0
H_0 صحيحة	قرار صحيح	خطأ من النوع الأول α
H_0 غير صحيحة (خاطئة)	خطأ من النوع الثاني β	قرار صحيح

6.1 مراحل اختبار الفرضيات في حالة مجتمع واحد

تتمثل مراحل اختبار الفرضيات في حالة مجتمع واحد في ما يلي:

المرحلة الأولى: صياغة الفرضيات

ويتم فيها تحديد نوع الفرضية (ثنائية الاتجاه؛ أحادية الاتجاه من اليمين؛ ثنائية الاتجاه من

اليسار)

المرحلة الثانية: قاعدة القرار

وهي مقارنة القيمة المحسوبة المعيارية (Z_{cal}) للتوزيع الطبيعي أو (t_{cal}) لتوزيع ستودنت مع القيمة الجدولية (Z_{tab}) و (t_{tab})

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

المرحلة الثالثة: حساب القيمة المعيارية

تُحسب القيمة المعيارية في حالة التوزيع الطبيعي أو توزيع ستودنت كما يلي:

$$Z_{cal} = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma}$$

$$t_{cal} = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma}$$

يتم استخدام الانحراف المعياري للمجتمع في حالة معلومية تباين المجتمع؛ وفي حالة عدم معلوميته يتم استخدام الانحراف المعياري للعينة (كما تطرقنا له في الفصل المتعلق بتوزيع المعاينة ونظرية التقدير)

المرحلة الرابعة: إيجاد القيمة الجدولية

في حالة التوزيع الطبيعي:

$$Z_{tal} = Z_c = Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

في حالة توزيع ستودنت:

$$t_{tal} = t_{(\alpha, n-k)}$$

المرحلة الخامسة: اتخاذ القرار

ان اتخاذ القرار يتم بناء على النتائج المتوصل اليها وعلى قاعدة القرارة

2. اختبار الفرضيات لمتوسط المجتمع

عند اختبار الفرضيات لمتوسط المجتمع فإننا نميز بين ثلاث حالات؛ سنتطرق لها في النقاط التالية مع الأمثلة الشارحة لها.

1.2 اختبار الفرضيات لمتوسط مجتمع تباينه معلوم

إذا كان لدينا:

$$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$$

فإن:

$$\bar{x}_i \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

كما أن:

$$Z = \left(\frac{x - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \right) \sim N(0,1)$$

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

تسمى الاحصاءة (Z) بالقيمة المحسوبة من خلال بيانات العينة، ونقوم باختيار قيمة α والتي تمثل مستوى الخطر حيث على أساسه يتم تحديد القيم الحرجة وذلك حسب نوع الاختبار (أحادي الجانب أو ثنائي الجانب). ولتوضيح مراحل اختبار الفرضيات لمتوسط المجتمع نعتمد على المثال التالي:

مثال (02):

أخذت عينة من 56 طالب من إحدى الكليات فكان متوسط الطول لديهم 168 سم كما أن الانحراف المعياري للمجتمع كان 0.9 سم

1- اختبر عند مستوى معنوية 5% الفرضية التالية:

$$\begin{cases} H_0: \mu = 172 \\ H_1: \mu \neq 172 \end{cases}$$

الحل:

بتتبع مراحل اختبار الفرضيات

1- صياغة الفرضية: جاءت الفرضية في شكل ثنائية الاتجاه؛ حيث فرضية العدم مفادها انه لا يوجد اختلاف بين متوسط العينة والمتوسط الفرضي؛ أما الفرضية فتعني يوجد اختلاف بين متوسط العينة والمتوسط الفرضي.

2- قاعدة القرار: إن قرار رفض فرضية العدم (H_0) عند مستوى المعنوية المعطى يكون وفق العلاقة التالية:

$$Z > Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \text{ أو } Z < -Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

3- حساب القيمة المعيارية: بما أن حجم العينة ($n > 30$) فإن التوزيع طبيعي ومنه فالقيمة المعيارية تحسب وفق العلاقة التالية

$$Z_{cal} = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma} = \frac{168 - 172}{0.9} = 4.4444$$

4- حساب القيمة الجدولية:

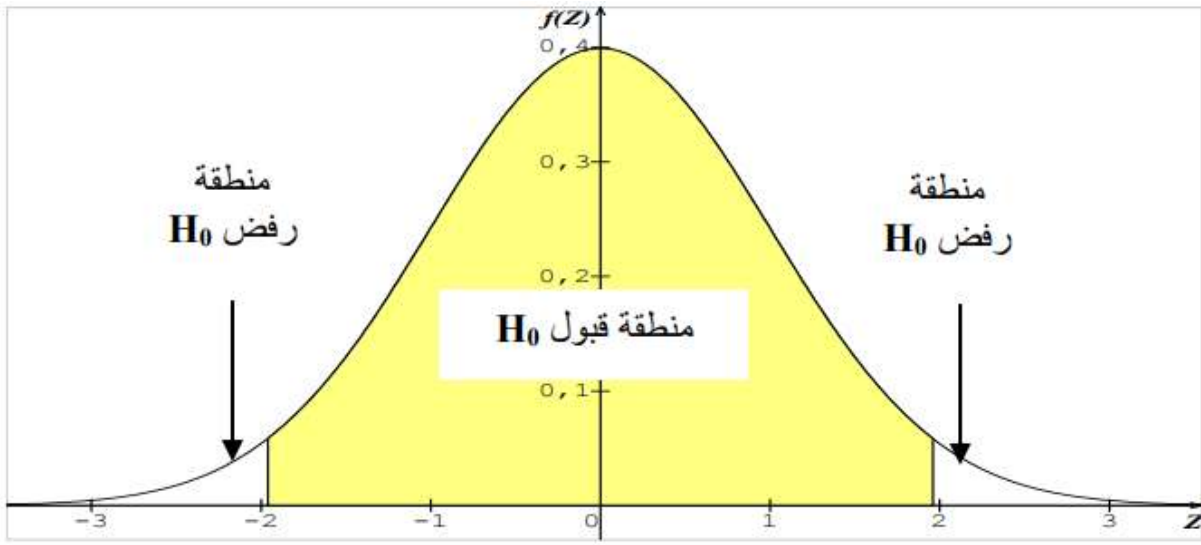
بما أن مستوى المعنوية 5% واختبار الفرضيات ثنائي الاتجاه (الطرفين)، فإن قيمة (Z) الجدولية هي:

$$Z_{tal} = Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-\frac{0.05}{2}} = Z_{0.975} = \pm 1.96$$

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

5- المقارنة واتخاذ القرار

من خلال النتائج نلاحظ أن قيمة (Z) المحسوبة أصغر من قيمة (Z) الجدولية أي أن (Z) تقع في منطقة الرفض؛ وبالتالي نرفض الفرضية الصفرية ونقبل بالفرضية البديلة أي أنه يوجد اختلاف بين متوسط أطوال الطلاب في العينة والمتوسط الفرضي ويمكن توضيح ذلك من خلال الشكل التالي:

2.2 اختبار الفرضيات لمتوسط مجتمع تباينه مجهول وعينات كبيرة ($n \geq 30$)

إن اختبار الفرضيات لمتوسط مجتمع تباينه مجهول والعينة المسحوبة منه كبيرة ($n \geq 30$) يخضع للتوزيع الطبيعي عند حساب إحصائية الاختبار وتكون كالتالي:

$$Z_{cal} = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma_{\bar{x}}}{\sqrt{n}}}$$

حيث تم استبدال الانحراف المعياري للمجتمع بالانحراف المعياري للعينة، كون أن تباين المجتمع والذي يحسب من خلال الانحراف المعياري للمجتمع مجهول.

3.2 اختبار الفرضيات لمتوسط مجتمع تباينه مجهول وعينات صغيرة ($n < 30$)

إن اختبار الفرضيات لمتوسط مجتمع تباينه مجهول والعينة المسحوبة منه صغيرة ($n < 30$) يخضع لتوزيع ستودنت عند حساب إحصائية الاختبار وتكون كالتالي:

$$t_{cal} = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma_{\bar{x}}}{\sqrt{n}}}$$

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

حيث تم استبدال الانحراف المعياري للمجتمع بالانحراف المعياري للعينة، كون أن تباين المجتمع والذي يحسب من خلال الانحراف المعياري للمجتمع مجهول.

مثال (03):

في محطة خدمات كانت مدة انتظار السيارات للتزود بالوقود هو 5 دقائق، فأرادت إدارة المحطة تقليص مدة الانتظار فاختارت عينة من 8 سيارات فأتضح أن مدة الانتظار 3.5 دقائق بانحراف قدره 30 ثانية؛

1- اختبر فرضية قرار المحطة بتخفيض مدة الانتظار عند مستوى معنوية 1%.

الحل:

بتتبع مراحل اختبار الفرضيات

1- صياغة الفرضية: بما أن الإدارة تهدف على تخفيض مدة الانتظار في صياغة الفرضية البديلة تكون ذات اتجاه واحد ومن اليسار (أقل من) وتكون صياغة الفرضيتين كما يلي:

$$\begin{cases} H_0: \mu = 5 \\ H_1: \mu < 5 \end{cases}$$

2- قاعدة القرار: بما أن تباين المجتمع مجهول وحجم العينة أقل من 30 فإن المتغيرة تتبع توزيع ستيودنت، وعليه تتحدد قاعدة القرار بناء على إحصاءة (t) المحسوبة والمجدولة، وعليه فإن قرار رفض فرضية العدم (H_0) عند مستوى المعنوية المعطى يكون وفق العلاقة التالية:

$$t < -t_{(0.99,7)}$$

3- حساب القيمة المعيارية: بما أن حجم العينة ($n < 30$) فإن التوزيع هو توزيع ستيودنت، ومنه فالقيمة المعيارية تحسب وفق العلاقة التالية

$$t_{cal} = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}} / \sqrt{n}} = \frac{3.5 - 5}{0.5 / \sqrt{8}} = \frac{-1.5}{0.1767} = -8.4889$$

4- حساب القيمة الجدولية:

بما أن مستوى المعنوية 1% واختبار الفرضيات أحادي الاتجاه (من اليسار)، فإن قيمة (t) الجدولية تكون كما يلي:

$$t_{tal} = t_{(0.99,7)} = -2.998$$

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

5- المقارنة واتخاذ القرار

من خلال النتائج نلاحظ أن قيمة (t) المحسوبة أصغر من قيمة (t) الجدولية أي أن (t) تقع في منطقة الرفض؛ وبالتالي نرفض الفرضية الصفرية ونقبل بالفرضية البديلة مما يعني أن قرار تنظيم صفوف السيارات من شأنه تخفيض فترة الإنتظار للتزود بالوقود.

3. اختبار الفرضيات للفرق بين متوسطي مجتمعين

لاختبار فرضيات الفرق بين متوسطي مجتمعين نفرق بين ثلاث حالات؛

1.3 اختبار الفرضيات للفرق بين متوسطي مجتمعين تباينهما معلوم

إذا كان

$$X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$$

فإن:

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$$

ومنه:

$$Z_c = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0, 1)$$

مثال (04):

ترغب إحدى المؤسسات أن تحدد عند مستوى معنوية 5%، ما إذا كان الأجر بالساعة للعمال

متساوي في المدينتين، فأخذت عينة عشوائية من المدينتين وتحصلت على المعلومات التالية:

$$n_1 = 40, \bar{X}_1 = 600, \sigma_1 = 600$$

$$n_2 = 54, \bar{X}_2 = 450, \sigma_2 = 180$$

الحل:

تحديد الفرضيات:

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

$$\begin{cases} H_0: \mu_1 = \mu_2 \text{ or } H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0 \\ H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \text{ or } H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0 \end{cases}$$

تحديد قاعدة القرار:

عند مستوى معنوية 5% فإن منطقة القبول تكون في المجال (± 1.96) ومنطقة الرفض خارج هذا

المجال

اتخاذ القرار

نقوم بحساب قيمة (Z) باستخدام العبارة التالية:

$$Z_c = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{(600 - 450) - 0}{\sqrt{\frac{600^2}{40} + \frac{180^2}{54}}} = 0.2158$$

نلاحظ أن قيمة (Z) المحسوبة تقع في منطقة القبول، ومنه فإننا نقبل فرضية العدم ونرفض الفرضية

البديلة، ومنه فإن الأجر بالساعة في كلتا المدينتين متساوي القيمة عند مستوى معنوية 5%.

2.3 اختبار الفرضيات للفرق بين متوسطي مجتمعين تباينهما مجهول وحجم العينتين كبير ($n > 30$)

إذا كانت قيمة تباين المجتمعين مجهولة؛ فإننا نستخدم التباين المحسوب في العينتين كمقدر لتباين

المجتمع؛ كما أن الاختبار يتبع التوزيع الطبيعي؛ وعلى هذا الأساس فإن القيمة المحسوبة للاختبار تعطى كما يلي:

$$Z_c = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_{\bar{x}_1}^2}{n_1} + \frac{\sigma_{\bar{x}_2}^2}{n_2}}} \sim N(0, 1)$$

مثال (05):

لبناء مركز تجاري؛ حصل مستثمر على المؤشرات التالية:

الموقع الأول	الموقع الثاني	
30	30	حجم العينة
15500	14600	متوسط العينة
2400	1800	الانحراف المعياري للعينة

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

1- بفرض تساوي دخل العمال في الموقعين اختبر هذه الفرضية عند مستوى معنوية 5%.
الحل:

تحديد الفرضيات:

$$\begin{cases} H_0: \mu_1 = \mu_2 \text{ or } H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0 \\ H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \text{ or } H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0 \end{cases}$$

تحديد قاعدة القرار:

عند مستوى معنوية 5% فإن منطقة القبول تكون في المجال (± 1.96) ومنطقة الرفض خارج هذا

المجال

اتخاذ القرار

نقوم بحساب قيمة (Z) باستخدام العبارة التالية:

$$Z_c = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_{\bar{x}_1}^2}{n_1} + \frac{\sigma_{\bar{x}_2}^2}{n_2}}} = \frac{(15500 - 14600) - 0}{\sqrt{\frac{2400^2}{30} + \frac{1800^2}{54}}} = 1.6431$$

نلاحظ أن قيمة (Z) المحسوبة تقع في منطقة القبول، ومنه فإننا نقبل فرضية العدم ونرفض الفرضية البديلة، ومنه فإن الأجر في الموقعين متساوي القيمة عند مستوى معنوية 5%.

2.3 اختبار الفرضيات للفرق بين متوسطي مجتمعين تباينهما مجهول وحجم العينتين صغير ($n < 30$)

في هذه الحالة فإن احصاء الاختبار تتبع توزيع ستودنت وتكون كما يلي:

$$t_c = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_{\bar{x}_1}^2}{n_1} + \frac{\sigma_{\bar{x}_2}^2}{n_2}}} \sim t(V, \alpha)$$

حيث أن: (V) تمثل درجة الحرية المشتركة وتحسب كما يلي:

$$V = \frac{\left(\frac{\sigma_{\bar{x}_1}^2}{n_1} + \frac{\sigma_{\bar{x}_2}^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{\sigma_{\bar{x}_1}^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\frac{\sigma_{\bar{x}_2}^2}{n_2}\right)^2}{n_2 - 1}}$$

مثال (06):

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

نسحب عينتين عشوائيتين من مجتمعين مستقلين فكانت النتائج كما يلي:

الموقع الأول	الموقع الثاني	
8	9	حجم العينة
28	25	متوسط العينة
2	1.2	الانحراف المعياري للعينة

1- اختبار فرضية عدم وجود فروق بين متوسطي المجتمعين عند مستوى معنوية 5%.

الحل:

تحديد الفرضيات:

$$\begin{cases} H_0: \mu_1 = \mu_2 \text{ or } H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0 \\ H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \text{ or } H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0 \end{cases}$$

تحديد قاعدة القرار:

بما أن حجمي العينتين أقل من 30 وتباينا المجتمعين مجهولين فإن الاختبار يتبع توزيع ستيودنت وتكون القيمة الجدولية عند مستوى معنوية 5% كما يلي:

$$t_c = t(V, \frac{\alpha}{2})$$

$$V = \frac{\left(\frac{\sigma_{\bar{x}_1}^2}{n_1} + \frac{\sigma_{\bar{x}_2}^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{\sigma_{\bar{x}_1}^2}{n_1}\right)^2}{n_1-1} + \frac{\left(\frac{\sigma_{\bar{x}_2}^2}{n_2}\right)^2}{n_2-1}} = \frac{\left(\frac{2^2}{8} + \frac{1.2^2}{9}\right)^2}{\frac{\left(\frac{2^2}{8}\right)^2}{8-1} + \frac{\left(\frac{1.2^2}{9}\right)^2}{9-1}} = 12.19$$

ومنه:

$$t_c = t\left(12, \frac{0.05}{2}\right) = \pm 2.179$$

تحديد الإحصائية (t) المحسوبة

$$t_c = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_{\bar{x}_1}^2}{n_1} + \frac{\sigma_{\bar{x}_2}^2}{n_2}}} = \frac{(28 - 25) - 0}{\sqrt{\frac{2^2}{8} + \frac{1.2^2}{9}}} = 3.79$$

اتخاذ القرار

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

نلاحظ أن قيمة (t) المحسوبة لا تقع في منطقة القبول، ومنه فإننا نقبل الفرضية البديلة؛ ومنه يوجد فرق خطر بين متوسطي المجتمعين عند مستوى معنوية 5%.

4. اختبار الفرضيات لنسبة المجتمع والفرق بين نسبي مجتمعين

1.4 اختبار الفرضيات لنسبة المجتمع

إذا سحبت عينة عشوائية حجمها (n) وكان حجم العينة كبيرا ونريد اختبار فرضية تساوي نسبة ظاهرة معينة في المجتمع لقيمة ما؛ فإن الفرضيات الإحصائية تأخذ الأشكال التالية:

نوع الاختبار	مجال قبول H_0	مجال رفض H_0
$\begin{cases} H_0: P = P_0 \\ H_1: P \neq P_0 \end{cases}$	$Z_c \in \left[Z_{\frac{\alpha}{2}}, Z_{\frac{\alpha}{2}} \right]$	$Z_c > +Z_{\frac{\alpha}{2}}$ $Z_c < -Z_{\frac{\alpha}{2}}$
$\begin{cases} H_0: P = P_0 \\ H_1: P > P_0 \end{cases}$	$Z_c \in [-\infty, +Z_{\alpha}]$	$Z_c > +Z_{\alpha}$
$\begin{cases} H_0: P = P_0 \\ H_1: P < P_0 \end{cases}$	$Z_c \in [-Z_{\alpha}, +\infty]$	$Z_c < -Z_{\alpha}$

المصدر: من اعداد الباحث

إن إحصائية الاختبار (Z_c) المحسوبة تعطي بالعلاقة التالية:

$$Z_c = \frac{\bar{P} - P_0}{\sqrt{\frac{P_0 * (1 - P_0)}{n}}}$$

مثال (07):

إذا كانت نسبة السيارات الفاسدة لأحد الشركات تساوي 25% اختيرت عينة مكونة من 1000 سيارة فكان من بينها 350 سيارة فاسدة

1- اختبر فرضية أن نسبة السيارات التالفة يزيد عن 25% عند مستوى معنوية 1%.

الحل:

تحديد الفرضيات الإحصائية

$$\begin{cases} H_0: P = 0.25 \\ H_1: P > 0.25 \end{cases}$$

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

حساب قيمة (Z) المحسوبة وفق العلاقة التالية:

$$Z_c = \frac{\bar{P} - P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}}, \bar{P} = \frac{x}{n} = \frac{350}{1000} = 0.35$$

$$Z_c = \frac{0.35 - 0.3}{\sqrt{\frac{0.3 \cdot 0.7}{1000}}} = 3.4722$$

تحديد قيمة (Z) الجدولية والتي تحدد من جدول التوزيع الطبيعي

$$Z_\alpha = Z_{0.99} = +2.33$$

اتخاذ القرار

نلاحظ أن قيمة (Z) المحسوبة أكبر من (Z) الجدولية ومنه نرفض فرضية العدم ونقبل بالفرضية

البديلة أي أن نسبة السيارات التالفة في المصنع يزيد عن 25% عند مستوى معنوية 1%.

2.4 اختبار الفرضيات للفرق بين نسبي مجتمعين

إن توزيع المعاينة لنسبة ظاهرة ما في المجتمعين تتبع التوزيع الطبيعي فإن الفرق بين نسبي المجتمعين

(P1-P2) تتبع التوزيع الطبيعي؛ وتعطي إحصائية الاختبار وفق العلاقة التالية:

$$Z = \frac{\bar{P}_1 - \bar{P}_2}{\sqrt{\frac{\bar{p}\bar{q}}{n_1} + \frac{\bar{p}\bar{q}}{n_2}}}$$

$$\bar{P} = \frac{n_1\bar{P}_1 + n_2\bar{P}_2}{n_1 + n_2}$$

حيث: $\bar{P}$ هو المتوسط المرجح لنسبة العينتين.

أما اتخاذ القرار الاحصائي فيكون حسب نوع الاختبار كما يلي:

نوع الاختبار	مجال قبول H_0	مجال رفض H_0
$\begin{cases} H_0: P_1 = P_2 \\ H_1: P_1 \neq P_2 \end{cases}$	$Z_c \in \left[Z_{\frac{\alpha}{2}}, Z_{\frac{\alpha}{2}} \right]$	$Z_c > +Z_{\frac{\alpha}{2}}$ $Z_c < -Z_{\frac{\alpha}{2}}$

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

$\begin{cases} H_0: P_1 = P_2 \\ H_1: P_1 > P_2 \end{cases}$	$Z_c \in [-\infty, +Z_\alpha]$	$Z_c > +Z_\alpha$
$\begin{cases} H_0: P_1 = P_2 \\ H_1: P_1 < P_2 \end{cases}$	$Z_c \in [-Z_\alpha, +\infty]$	$Z_c < -Z_\alpha$

مثال (08):

لمعرفة الفرق بين نسبة السائقين الذين يستعملون حزام الامن في ولايتي عنابة والبليدة، نسحب عينة عشوائية من كل ولاية حجمها 100 من كل ولاية، فأتضح أن 75 سائق من عنابة و65 من البليدة يستعملون حزام الأمن.

1. اختبر فرضيات الفرق بين نسبي استعمال حزام الأمن في المدينتين عند مستوى معنوية 5%.

الحل:

لدينا:

$$n_1 = 100, n_2 = 100, \bar{P}_1 = \frac{75}{100} = 0.75, \bar{P}_2 = \frac{65}{100} = 0.65$$

$$\bar{P} = \frac{n_1 \bar{P}_1 + n_2 \bar{P}_2}{n_1 + n_2} = \frac{100 * 0.75 + 100 * 0.65}{100 + 100} = 0.7$$

$$Z = \frac{\bar{P}_1 - \bar{P}_2}{\sqrt{\frac{\bar{p}\bar{q}}{n_1} + \frac{\bar{p}\bar{q}}{n_2}}} = \frac{0.75 - 0.65}{\sqrt{\frac{0.7*0.3}{100} + \frac{0.7*0.3}{100}}} = \frac{0.1}{0.0648} = 1.5432$$

نوع الاختبار	مجال قبول H_0	القرار الاحصائي
$\begin{cases} H_0: P_1 = P_2 \\ H_1: P_1 \neq P_2 \end{cases}$	$Z_c = 1.54 \in [-1.96, +1.96]$	نقبل H_0
$\begin{cases} H_0: P_1 = P_2 \\ H_1: P_1 > P_2 \end{cases}$	$Z_c = 1.54 \in [-\infty, +1.65]$	نقبل H_0
$\begin{cases} H_0: P_1 = P_2 \\ H_1: P_1 < P_2 \end{cases}$	$Z_c = 1.54 \in [-1.65, +\infty]$	نقبل H_0

5. اختبار الفرضيات لتباين المجتمع

لاختبار فرضية ان تباين المجتمع يساوي قيمة معينة؛ فإن احصاء الاختبار المناسبة هي:

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

$$x_c^2 = \frac{(n-1)\sigma_{\bar{x}}^2}{\sigma_0^2}$$

والتوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي يتبع توزيع كاي مربع بدرجة حرية (dl=n-1) ومنه فإن اتخاذ القرار الاحصائي يكون كما يلي:

نوع الاختبار	مجال قبول H_0	مجال رفض H_0
$\begin{cases} H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \end{cases}$	$x_c^2 \in \left[x_{(dl, 1-\frac{\alpha}{2})}^2, x_{(dl, \frac{\alpha}{2})}^2 \right]$	$x_c^2 > x_{(dl, \frac{\alpha}{2})}^2$ $x_c^2 < x_{(dl, 1-\frac{\alpha}{2})}^2$
$\begin{cases} H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2 \end{cases}$	$x_c^2 < x_{(dl, \alpha)}^2$	$x_c^2 > x_{(dl, \alpha)}^2$
$\begin{cases} H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2 \end{cases}$	$x_c^2 > x_{(dl, 1-\alpha)}^2$	$x_c^2 < x_{(dl, 1-\alpha)}^2$

مثال (09):

يدعي صاحب مؤسسة أن مدة صلاحية منتجه يزيد انحرافه عن سنة ونصف، ولمعرفة صحة هذا الادعاء أخذنا عينة عشوائية حجمها 24 فوجدنا متوسط صلاحية هذا المنتج هو 03 سنوات وانحرافه المعياري 2 سنة

1- هل تؤكد هذا الادعاء أم تفنده عند مستوى خطر 1%.

الحل:

تحديد الفرضيات الإحصائية: إن طبيعة الاختبار أحادي الإتجاه من اليمين وعليه الفرضيات تكون كما يلي:

$$\begin{cases} H_0: \sigma^2 = 1.5 \\ H_1: \sigma^2 > 1.5 \end{cases}$$

حساب قيمة توزيع كاي مربع الجدولية

$$x_{(dl, \alpha)}^2 = x_{(n-1, \alpha)}^2 = x_{(24-1, 0.01)}^2 = x_{(23, 0.01)}^2 = 41.64$$

حساب إحصائية (X_c^2)

$$x_c^2 = \frac{(n-1)\sigma_{\bar{x}}^2}{\sigma_0^2} = \frac{(24-1) * 2^2}{1.5^2} = 40.88$$

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

اتخاذ القرار الاحصائي

نلاحظ أن القيمة المحسوبة لاختبار توزيع كاي مربع أقل من القيمة الجدولية له؛ وعليه نقبل بالفرضية الصفرية (العدم H_0)، أي أن مدة صلاحية المنتج لا يزيد انحرافه عن 1.5.

6. اختبار الفرضيات لنسبة تباين مجتمعين

إذا أخذت عينة عشوائية حجمها (n_1) من مجتمع يتبع التوزيع الطبيعي، وعينة عشوائية أخرى حجمها (n_2) من مجتمع يتبع كذلك التوزيع الطبيعي، ولكلا العينتين التباين الخاص بها؛ فإن الاختبار المناسب لاختبار الفرضيات لنسبة تباين المجتمعين هو توزيع فيشر كما يلي:

$$F_c = \frac{\sigma_{\bar{x}_1}^2 / \sigma_1^2}{\sigma_{\bar{x}_2}^2 / \sigma_2^2} = \frac{\sigma_{\bar{x}_1}^2 \times \sigma_2^2}{\sigma_{\bar{x}_2}^2 \times \sigma_1^2}$$

ويتم اتخاذ القرار الاحصائي كما يلي:

الفرضية البديلة H_0	رفض H_0
$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	$F_c < F_{(d_1, d_2, 1-\frac{\alpha}{2})}$ أو $F_c > F_{(d_1, d_2, \frac{\alpha}{2})}$
$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	$F_c > F_{(d_1, d_2, \alpha)}$
$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	$F_c < F_{(d_1, d_2, 1-\alpha)}$

مثال (10):

سحبت عينتين عشوائيتين مستقلتين من مجتمعين مختلفين فكانت النتائج المتحصل عليها كما يلي:

$$n_1 = 16, n_2 = 11, \sigma_{\bar{x}_1}^2 = 100, \sigma_{\bar{x}_2}^2 = 144$$

اختبر فرضية تساوي تباين المجتمعين عند مستوى معنوية 10%.

الحل

تحديد الفرضيات الإحصائية: إن طبيعة الاختبار ثنائي الاتجاه وصياغة الفرضيات تكون من الشكل التالي:

$$\begin{cases} H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \end{cases}$$

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

إيجاد القيم الجدولية من توزيع فيشر F:

$$F_{(d_1, d_2, 1-\frac{\alpha}{2})} = F_{(n_1-1, n_2-1, 1-\frac{0.1}{2})} = F_{(16-1, 11-1, 1-\frac{0.1}{2})} = F_{(15, 10, 0.95)} = 2,85$$

$$F_{(d_1, d_2, \frac{\alpha}{2})} = F_{(n_1-1, n_2-1, \frac{0.1}{2})} = F_{(16-1, 11-1, \frac{0.1}{2})}$$

$$= F_{(15, 10, 0.05)} = \frac{1}{F_{10, 15}^{1-0.05}} = \frac{1}{F_{10, 15}^{0.95}} = \frac{1}{2.54} = 0.3937$$

إيجاد قيمة (F) المحسوبة:

$$F_c = \frac{\sigma_{\bar{x}_1}^2 / \sigma_1^2}{\sigma_{\bar{x}_2}^2 / \sigma_2^2} = \frac{\sigma_{\bar{x}_1}^2 \times \sigma_2^2}{\sigma_{\bar{x}_2}^2 \times \sigma_1^2} = \frac{100^2}{144^2} = 0.48$$

اتخاذ القرار الاحصائي:

نلاحظ أن :

$$F_c = 0.48 \in [0.3937, 2.85]$$

وبالتالي نقبل بفرضية العدم (H_0)

7. تمارين مقترحة

التمرين الأول:

يخضع الزمن الذي يستغرقه العامل لتغليف سلة للتوزيع الطبيعي بمتوسط قدره 40 دقيقة، فادخلت تعديلات على على عملية التغليف بهدف تقليص الوقت، واختبار فعالية التعديلات تم احتساب زمن التغليف لـ 10 عمال فكان المتوسط هو 43 دقيقة بانحراف معياري قدره 9.5 دقيقة، هل يمكن القول أن للتعديلات أثر حقيقي على عملية التغليف بمستوى معنوية 10%.

التمرين الثاني:

تعاقدت إحدى الشركات المتخصصة في نقل المسافرين مع إحدى الشركات المصنعة للحافلات، فاجعى مدير الشركة المصنعة أن متوسط تشغيل محرك الحافلة دون توقف هو 35 يوم، وللتحقق من صحة الادعاء تم اخضاء 30 محرك للاختبار فكان متوسط التشغيل هو 28 يوم بانحراف قدره 3 أيام، ما مدى صحة ادعاء مدير الشركة المنتجة بمستوى ثقة 90%.

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

التمرين الثالث:

أخذت عينة من 70 طالب من إحدى الكليات فكان متوسط الطول لديهم 174 سم كما أن الانحراف المعياري للمجتمع كان 0.7 سم

2- اختبر عند مستوى معنوية 5% الفرضية التالية:

$$\begin{cases} H_0: \mu = 168 \\ H_1: \mu \neq 168 \end{cases}$$

التمرين الرابع:

سحبت عينتين عشوائيتين مستقلتين من مجتمعين مختلفين فكانت النتائج المتحصل عليها كما يلي:

$$n_1 = 19, n_2 = 15, \sigma_{\bar{x}_1}^2 = 10, \sigma_{\bar{x}_2}^2 = 14.4$$

- اختبر فرضية تساوي تباين المجتمعين عند مستوى معنوية 5%.

التمرين الخامس:

يدعي صاحب مؤسسة أن مدة صلاحية منتجه يزيد انحرافه عن سنة ونصف، ولمعرفة ضحة هذا الادعاء أخذنا عينة عشوائية حجمها 20 فوجدنا متوسط صلاحية هذا المنتج هو 05 سنوات وانحرافه المعياري 3.3 سنة

2- هل تؤكد هذا الادعاء أم تفنده عند مستوى خطر 5%.

التمرين السادس:

لمعرفة الفرق بين نسبة السائقين الذين يستعملون حزام الامن في ولايتي المدية وهران، نسحب عينة عشوائية من كل ولاية حجمها 200 من كل ولاية، فأتضح أن 7.5 سائق من المدية و 6.5 من وهران يستعملون حزام الأمن.

1. اختبر فرضيات الفرق بين نسبي استعمال حزام الأمن في المدينتين عند مستوى معنوية 5%.

2. اختبر فرضيات الفرق بين نسبي استعمال حزام الأمن في المدينتين عند مستوى معنوية 10%.

3. اختبر فرضيات الفرق بين نسبي استعمال حزام الأمن في المدينتين عند مستوى معنوية 1%.

قائمة المراجع

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

قائمة المراجع

I. الكتب

1. تومي صالح، مدخل لنظرية القياس الاقتصادي، ديوان المطبوعات الجامعية، الطبعة الثانية، 2011.
2. حسن احمد الشافعي وآخرون : مبادئ البحث العلمي، دار الوفاء، الإسكندرية، ط1، 2009.
3. حميد عويد مشرف العلكة، عبيد جفين جليغم القحطاني، الإحصاء والاحتمالات (نظرية وتطبيقات)، دار جامعة الملك سعود للنشر، السعودية، 2019.
4. حميد عويد مشرف العلكة، عبيد جفين جليغم القحطاني: الإحصاء والاحتمالات (نظرية وتطبيقات)، دار جامعة الملك سعود للنشر، 2019.
5. دومنيك سالفادور، الإحصاء والاقتصاد القياسي، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 1993.
6. شوم إيزي: الاحتمالات والإحصاء، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية، مصر، 2004.
7. عبد القادر محمد عبد القادر عطية، الحديث في الاقتصاد القياسي بين النظرية و التطبيق، الدار الجامعية ، 2004.
8. علاء الدين القبانجي، حسام حمامة كرمجي ، الاحتمال والاحصاء ، منشورات جامعة دمشق ، 2011-2012.
9. علي عبد السلام العماري، علي حسين العجيلي: الإحصاء والاحتمالات النظرية والتطبيق، ط4، دار الحكمة للطباعة والنشر والتوزيع، طرابلس، ليبيا، 2013.
10. قيس ناجي عبد الجبار، أصول الإحصاء والطرق الإحصائية، ط1، دار المناهج للنشر والتوزيع، عمان، 2002.
11. كمال علوان خلف المشهداني، عماد حازم عبودي، اختبار الفرضيات الإحصائية، كلية الإدارة والإقتصاد، جامعة بغداد، العراق، بدون سنة نشر.
12. محمد صبح، عدنان عمورة، عزات قاسم: نظرية العينات، منشورات جامعة دمشق، سوريا، 2001.
13. محمد صبحي ابو صالح، مبادئ الاحصاء ، دار اليازوري ، 2007.
14. موفق الحمداني وآخرون :مناهج البحث العلمي أساسيات البحث العلمي ، ط1 ، عمان ، مؤسسة الوراق للنشر والتوزيع ، 2006.

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

II. المطبوعات البيداغوجية

1. بلحنيش عبد الرحمان، محاضرات مقياس إحصاء 3، مطبوعة بيداغوجية، كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، جامعة البويرة، ص 10.
2. تمار أمين، محاضرات وتمارين في الإحصاء 3، مطبوعة بيداغوجية، كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، جامعة البليدة 2، الجزائر، 2020-2021.
3. خليفة الحاج، دروس وأعمال موجهة في الإحصاء 3، مطبوعة بيداغوجية، جامعة عبد الحميد بن باديس - مستغانم، الجزائر، 2018-2019.
4. دبوش عبد القادر، الإحصاء 3، مطبوعة بيداغوجية، جامعة قالمة، قسم علوم التسيير، الجزائر، 2017-2018.

III. الرسائل والاطروحات

1. مقيدش نزيهة، أهمية أسلوب المعاينة في الدراسات الإحصائية دراسة تطبيقية حول الحوكمة في الجامعة الجزائرية من خلال سبر للأراء جامعة فرحات عباس سطيف، مذكرة ماجستير، جامعة فرحات عباس، سطيف، الجزائر، 2009-2010.

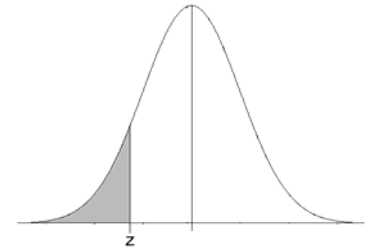
IV. المواقع الإلكترونية:

1. عبد الهادي الرفاعي، مقرر الإحصاء التطبيقي، كلية العلوم الإدارية، جامعة الشام، ص 04، أنظر الرابط: <http://www.aspu.edu.sy/lara>.
2. محمد عبد الحميد، إحصاء متقدم، جامعة الرقازيق، مصر، ص 03، أنظر الرابط: <https://sciences-library.blogspot.com/2018/01/Principles-of-Statistics-and-Probability-pdf.html>.
3. التوزيع الطبيعي، ص 08، أنظر الرابط: <https://vb.ckfu.org/attachments.doc>.
4. عبد الكاظم لفته ماضي، العينة - أنواعها وكيفية اختيارها ومشاكلها، الجامعة المستنصرية، بغداد، العراق، ص 08، أنظر الرابط: https://uomustansiriyah.edu.iq/media/lectures/13/13_2018_10_9_PM.doc.
5. مقدمة في التحليل الإحصائي؛ جامعة الملك سعود، ص 409، أنظر الرابط: https://fac.ksu.edu.sa/sites/default/files/501kmy-511ml-537kmy-mqdm_mkhtSr_n_khtbr_lfrDyt_0.doc.

أساسيات الإحصاء 4: دروس وتمارين تطبيقية

الملاحق

Standard Normal Cumulative Probability Table



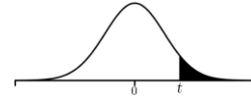
Cumulative probabilities for NEGATIVE z-values are shown in the following table:

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
-3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
-3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
-3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
-3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
-3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
-2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
-2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
-2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
-2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
-2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
-2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
-2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
-2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
-2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
-2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
-1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
-1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
-1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
-1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
-1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
-1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
-1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
-1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
-1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
-0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
-0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
-0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
-0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
-0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
-0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
-0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
-0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
-0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641

A normal distribution curve is shown with a vertical line at a point labeled z on the horizontal axis. The area under the curve to the left of z is shaded gray, representing the cumulative probability $P(Z \leq z)$.

$$Z$$

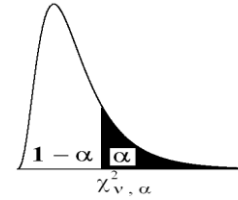
z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

Critical Values for Student's t -Distribution.

df	Upper Tail Probability: $\Pr(T > t)$									
	0.2	0.1	0.05	0.04	0.03	0.025	0.02	0.01	0.005	0.0005
1	1.376	3.078	6.314	7.916	10.579	12.706	15.895	31.821	63.657	636.619
2	1.061	1.886	2.920	3.320	3.896	4.303	4.849	6.965	9.925	31.599
3	0.978	1.638	2.353	2.605	2.951	3.182	3.482	4.541	5.841	12.924
4	0.941	1.533	2.132	2.333	2.601	2.776	2.999	3.747	4.604	8.610
5	0.920	1.476	2.015	2.191	2.422	2.571	2.757	3.365	4.032	6.869
6	0.906	1.440	1.943	2.104	2.313	2.447	2.612	3.143	3.707	5.959
7	0.896	1.415	1.895	2.046	2.241	2.365	2.517	2.998	3.499	5.408
8	0.889	1.397	1.860	2.004	2.189	2.306	2.449	2.896	3.355	5.041
9	0.883	1.383	1.833	1.973	2.150	2.262	2.398	2.821	3.250	4.781
10	0.879	1.372	1.812	1.948	2.120	2.228	2.359	2.764	3.169	4.587
11	0.876	1.363	1.796	1.928	2.096	2.201	2.328	2.718	3.106	4.437
12	0.873	1.356	1.782	1.912	2.076	2.179	2.303	2.681	3.055	4.318
13	0.870	1.350	1.771	1.899	2.060	2.160	2.282	2.650	3.012	4.221
14	0.868	1.345	1.761	1.887	2.046	2.145	2.264	2.624	2.977	4.140
15	0.866	1.341	1.753	1.878	2.034	2.131	2.249	2.602	2.947	4.073
16	0.865	1.337	1.746	1.869	2.024	2.120	2.235	2.583	2.921	4.015
17	0.863	1.333	1.740	1.862	2.015	2.110	2.224	2.567	2.898	3.965
18	0.862	1.330	1.734	1.855	2.007	2.101	2.214	2.552	2.878	3.922
19	0.861	1.328	1.729	1.850	2.000	2.093	2.205	2.539	2.861	3.883
20	0.860	1.325	1.725	1.844	1.994	2.086	2.197	2.528	2.845	3.850
21	0.859	1.323	1.721	1.840	1.988	2.080	2.189	2.518	2.831	3.819
22	0.858	1.321	1.717	1.835	1.983	2.074	2.183	2.508	2.819	3.792
23	0.858	1.319	1.714	1.832	1.978	2.069	2.177	2.500	2.807	3.768
24	0.857	1.318	1.711	1.828	1.974	2.064	2.172	2.492	2.797	3.745
25	0.856	1.316	1.708	1.825	1.970	2.060	2.167	2.485	2.787	3.725
26	0.856	1.315	1.706	1.822	1.967	2.056	2.162	2.479	2.779	3.707
27	0.855	1.314	1.703	1.819	1.963	2.052	2.158	2.473	2.771	3.690
28	0.855	1.313	1.701	1.817	1.960	2.048	2.154	2.467	2.763	3.674
29	0.854	1.311	1.699	1.814	1.957	2.045	2.150	2.462	2.756	3.659
30	0.854	1.310	1.697	1.812	1.955	2.042	2.147	2.457	2.750	3.646
31	0.853	1.309	1.696	1.810	1.952	2.040	2.144	2.453	2.744	3.633
32	0.853	1.309	1.694	1.808	1.950	2.037	2.141	2.449	2.738	3.622
33	0.853	1.308	1.692	1.806	1.948	2.035	2.138	2.445	2.733	3.611
34	0.852	1.307	1.691	1.805	1.946	2.032	2.136	2.441	2.728	3.601
35	0.852	1.306	1.690	1.803	1.944	2.030	2.133	2.438	2.724	3.591
36	0.852	1.306	1.688	1.802	1.942	2.028	2.131	2.434	2.719	3.582
37	0.851	1.305	1.687	1.800	1.940	2.026	2.129	2.431	2.715	3.574
38	0.851	1.304	1.686	1.799	1.939	2.024	2.127	2.429	2.712	3.566
39	0.851	1.304	1.685	1.798	1.937	2.023	2.125	2.426	2.708	3.558
40	0.851	1.303	1.684	1.796	1.936	2.021	2.123	2.423	2.704	3.551
41	0.850	1.303	1.683	1.795	1.934	2.020	2.121	2.421	2.701	3.544
42	0.850	1.302	1.682	1.794	1.933	2.018	2.120	2.418	2.698	3.538
43	0.850	1.302	1.681	1.793	1.932	2.017	2.118	2.416	2.695	3.532
44	0.850	1.301	1.680	1.792	1.931	2.015	2.116	2.414	2.692	3.526
45	0.850	1.301	1.679	1.791	1.929	2.014	2.115	2.412	2.690	3.520
46	0.850	1.300	1.679	1.790	1.928	2.013	2.114	2.410	2.687	3.515
47	0.849	1.300	1.678	1.789	1.927	2.012	2.112	2.408	2.685	3.510
48	0.849	1.299	1.677	1.789	1.926	2.011	2.111	2.407	2.682	3.505
49	0.849	1.299	1.677	1.788	1.925	2.010	2.110	2.405	2.680	3.500
50	0.849	1.299	1.676	1.787	1.924	2.009	2.109	2.403	2.678	3.496
60	0.848	1.296	1.671	1.781	1.917	2.000	2.099	2.390	2.660	3.460
70	0.847	1.294	1.667	1.776	1.912	1.994	2.093	2.381	2.648	3.435
80	0.846	1.292	1.664	1.773	1.908	1.990	2.088	2.374	2.639	3.416
90	0.846	1.291	1.662	1.771	1.905	1.987	2.084	2.368	2.632	3.402
100	0.845	1.290	1.660	1.769	1.902	1.984	2.081	2.364	2.626	3.390
120	0.845	1.289	1.658	1.766	1.899	1.980	2.076	2.358	2.617	3.373
140	0.844	1.288	1.656	1.763	1.896	1.977	2.073	2.353	2.611	3.361
180	0.844	1.286	1.653	1.761	1.893	1.973	2.069	2.347	2.603	3.345
200	0.843	1.286	1.653	1.760	1.892	1.972	2.067	2.345	2.601	3.340
500	0.842	1.283	1.648	1.754	1.885	1.965	2.059	2.334	2.586	3.310
1000	0.842	1.282	1.646	1.752	1.883	1.962	2.056	2.330	2.581	3.300
∞	0.842	1.282	1.645	1.751	1.881	1.960	2.054	2.326	2.576	3.291
	60%	80%	90%	92%	94%	95%	96%	98%	99%	99.9%
	Confidence Level									

Note: $t(\infty)_{\alpha/2} = Z_{\alpha/2}$ in our notation.

Percentage Points of the χ^2 Distribution; $\chi^2_{v, \alpha}$
 $P(\chi^2 > \chi^2_{v, \alpha}) = \alpha$



	α														
v	0.001	0.005	0.010	0.025	0.050	0.100	0.250	0.500	0.750	0.900	0.950	0.975	0.990	0.995	0.999
1	10.83	7.88	6.63	5.02	3.84	2.71	1.32	0.45	0.10	0.02					
2	13.82	10.60	9.21	7.38	5.99	4.61	2.77	1.39	0.58	0.21	0.10	0.05	0.02	0.01	
3	16.27	12.84	11.34	9.35	7.81	6.25	4.11	2.37	1.21	0.58	0.35	0.22	0.11	0.07	0.02
4	18.47	14.86	13.28	11.14	9.49	7.78	5.39	3.36	1.92	1.06	0.71	0.48	0.30	0.21	0.09
5	20.52	16.75	15.09	12.83	11.07	9.24	6.63	4.35	2.67	1.61	1.15	0.83	0.55	0.41	0.21
6	22.46	18.55	16.81	14.45	12.59	10.64	7.84	5.35	3.45	2.20	1.64	1.24	0.87	0.68	0.38
7	24.32	20.28	18.48	16.01	14.07	12.02	9.04	6.35	4.25	2.83	2.17	1.69	1.24	0.99	0.60
8	26.12	21.95	20.09	17.53	15.51	13.36	10.22	7.34	5.07	3.49	2.73	2.18	1.65	1.34	0.86
9	27.88	23.59	21.67	19.02	16.92	14.68	11.39	8.34	5.90	4.17	3.33	2.70	2.09	1.73	1.15
10	29.59	25.19	23.21	20.48	18.31	15.99	12.55	9.34	6.74	4.87	3.94	3.25	2.56	2.16	1.48
11	31.26	26.76	24.72	21.92	19.68	17.28	13.70	10.34	7.58	5.58	4.57	3.82	3.05	2.60	1.83
12	32.91	28.30	26.22	23.34	21.03	18.55	14.85	11.34	8.44	6.30	5.23	4.40	3.57	3.07	2.21
13	34.53	29.82	27.69	24.74	22.36	19.81	15.98	12.34	9.30	7.04	5.89	5.01	4.11	3.57	2.62
14	36.12	31.32	29.14	26.12	23.68	21.06	17.12	13.34	10.17	7.79	6.57	5.63	4.66	4.07	3.04
15	37.70	32.80	30.58	27.49	25.00	22.31	18.25	14.34	11.04	8.55	7.26	6.26	5.23	4.60	3.48
16	39.25	34.27	32.00	28.85	26.30	23.54	19.37	15.34	11.91	9.31	7.96	6.91	5.81	5.14	3.94
17	40.79	35.72	33.41	30.19	27.59	24.77	20.49	16.34	12.79	10.09	8.67	7.56	6.41	5.70	4.42
18	42.31	37.16	34.81	31.53	28.87	25.99	21.60	17.34	13.68	10.86	9.39	8.23	7.01	6.26	4.90
19	43.82	38.58	36.19	32.85	30.14	27.20	22.72	18.34	14.56	11.65	10.12	8.91	7.63	6.84	5.41
20	45.31	40.00	37.57	34.17	31.41	28.41	23.83	19.34	15.45	12.44	10.85	9.59	8.26	7.43	5.92
21	46.80	41.40	38.93	35.48	32.67	29.62	24.93	20.34	16.34	13.24	11.59	10.28	8.90	8.03	6.45
22	48.27	42.80	40.29	36.78	33.92	30.81	26.04	21.34	17.24	14.04	12.34	10.98	9.54	8.64	6.98
23	49.73	44.18	41.64	38.08	35.17	32.01	27.14	22.34	18.14	14.85	13.09	11.69	10.20	9.26	7.53
24	51.18	45.56	42.98	39.36	36.42	33.20	28.24	23.34	19.04	15.66	13.85	12.40	10.86	9.89	8.08
25	52.62	46.93	44.31	40.65	37.65	34.38	29.34	24.34	19.94	16.47	14.61	13.12	11.52	10.52	8.65
30	59.70	53.67	50.89	46.98	43.77	40.26	34.80	29.34	24.48	20.60	18.49	16.79	14.95	13.79	11.59
40	73.40	66.77	63.69	59.34	55.76	51.81	45.62	39.34	33.66	29.05	26.51	24.43	22.16	20.71	17.92
50	86.66	79.49	76.15	71.42	67.50	63.17	56.33	49.33	42.94	37.69	34.76	32.36	29.71	27.99	24.67
60	99.61	91.95	88.38	83.30	79.08	74.40	66.98	59.33	52.29	46.46	43.19	40.48	37.48	35.53	31.74
70	112.32	104.21	100.43	95.02	90.53	85.53	77.58	69.33	61.70	55.33	51.74	48.76	45.44	43.28	39.04
80	124.84	116.32	112.33	106.63	101.88	96.58	88.13	79.33	71.14	64.28	60.39	57.15	53.54	51.17	46.52
90	137.21	128.30	124.12	118.14	113.15	107.57	98.65	89.33	80.62	73.29	69.13	65.65	61.75	59.20	54.16
100	149.45	140.17	135.81	129.56	124.34	118.50	109.14	99.33	90.13	82.36	77.93	74.22	70.06	67.33	61.92

F Distribution Table

1

d.f.N. = degrees of freedom in numerator

d.f.D. = degrees of freedom in denominator

d.f.D.	$\alpha = 0.005$																		
	d.f.N.																		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	16211	20000	21615	22500	23056	23437	23715	23925	24091	24224	24426	24630	24836	24940	25044	25148	25253	25359	25465
2	198.5	199.0	199.2	199.2	199.3	199.3	199.4	199.4	199.4	199.4	199.4	199.4	199.4	199.5	199.5	199.5	199.5	199.5	199.5
3	55.55	49.80	47.47	46.19	45.39	44.84	44.43	44.13	43.88	43.69	43.39	43.08	42.78	42.62	42.47	42.31	42.15	41.99	41.83
4	31.33	26.28	24.26	23.15	22.46	21.97	21.62	21.35	21.14	20.97	20.70	20.44	20.17	20.03	19.89	19.75	19.61	19.47	19.32
5	22.78	18.31	16.53	15.56	14.94	14.51	14.20	13.96	13.77	13.62	13.38	13.15	12.90	12.78	12.66	12.53	12.40	12.27	12.14
6	18.63	14.54	12.92	12.03	11.46	11.07	10.79	10.57	10.39	10.25	10.03	9.81	9.59	9.47	9.36	9.24	9.12	9.00	8.88
7	16.24	12.40	10.88	10.05	9.52	9.16	8.89	8.68	8.51	8.38	8.18	7.97	7.75	7.65	7.53	7.42	7.31	7.19	7.08
8	14.69	11.04	9.60	8.81	8.30	7.95	7.69	7.50	7.34	7.21	7.01	6.81	6.61	6.50	6.40	6.29	6.18	6.06	5.95
9	13.61	10.11	8.72	7.96	7.47	7.13	6.88	6.69	6.54	6.42	6.23	6.03	5.83	5.73	5.62	5.52	5.41	5.30	5.19
10	12.83	9.43	8.08	7.34	6.87	6.54	6.30	6.12	5.97	5.85	5.66	5.47	5.27	5.17	5.07	4.97	4.86	4.75	4.64
11	12.23	8.91	7.60	6.88	6.42	6.10	5.86	5.68	5.54	5.42	5.24	5.05	4.86	4.76	4.65	4.55	4.44	4.34	4.23
12	11.75	8.51	7.23	6.52	6.07	5.76	5.52	5.35	5.20	5.09	4.91	4.72	4.53	4.43	4.33	4.23	4.12	4.01	3.90
13	11.37	8.19	6.93	6.23	5.79	5.48	5.25	5.08	4.94	4.82	4.64	4.46	4.27	4.17	4.07	3.97	3.87	3.76	3.65
14	11.06	7.92	6.68	6.00	5.56	5.26	5.03	4.86	4.72	4.60	4.43	4.25	4.06	3.96	3.86	3.76	3.66	3.55	3.44
15	10.80	7.70	6.48	5.80	5.37	5.07	4.85	4.67	4.54	4.42	4.25	4.07	3.88	3.79	3.69	3.58	3.48	3.37	3.26
16	10.58	7.51	6.30	5.64	5.21	4.91	4.69	4.52	4.38	4.27	4.10	3.92	3.73	3.64	3.54	3.44	3.33	3.22	3.11
17	10.38	7.35	6.16	5.50	5.07	4.78	4.56	4.39	4.25	4.14	3.97	3.79	3.61	3.51	3.41	3.31	3.21	3.10	2.98
18	10.22	7.21	6.03	5.37	4.96	4.66	4.44	4.28	4.14	4.03	3.86	3.68	3.50	3.40	3.30	3.20	3.10	2.99	2.87
19	10.07	7.09	5.92	5.27	4.85	4.56	4.34	4.18	4.04	3.93	3.76	3.59	3.40	3.31	3.21	3.11	3.00	2.89	2.78
20	9.94	6.99	5.82	5.17	4.76	4.47	4.26	4.09	3.96	3.85	3.68	3.50	3.32	3.22	3.12	3.02	2.92	2.81	2.69
21	9.83	6.89	5.73	5.09	4.68	4.39	4.18	4.01	3.88	3.77	3.60	3.43	3.24	3.15	3.05	2.95	2.84	2.73	2.61
22	9.73	6.81	5.65	5.02	4.61	4.32	4.11	3.94	3.81	3.70	3.54	3.36	3.18	3.08	2.98	2.88	2.77	2.66	2.55
23	9.63	6.73	5.58	4.95	4.54	4.26	4.05	3.88	3.75	3.64	3.47	3.30	3.12	3.02	2.92	2.82	2.71	2.60	2.48
24	9.55	6.66	5.52	4.89	4.49	4.20	3.99	3.83	3.69	3.59	3.42	3.25	3.06	2.97	2.87	2.77	2.66	2.55	2.43
25	9.48	6.60	5.46	4.84	4.43	4.15	3.94	3.78	3.63	3.54	3.37	3.20	3.01	2.92	2.82	2.72	2.61	2.50	2.38
26	9.41	6.54	5.41	4.79	4.38	4.10	3.89	3.73	3.60	3.49	3.33	3.15	2.97	2.87	2.77	2.67	2.56	2.45	2.33
27	9.34	6.49	5.36	4.74	4.34	4.06	3.85	3.69	3.56	3.45	3.28	3.11	2.93	2.83	2.73	2.63	2.52	2.41	2.25
28	9.28	6.44	5.32	4.70	4.30	4.02	3.81	3.65	3.52	3.41	3.25	3.07	2.89	2.79	2.69	2.59	2.48	2.37	2.29
29	9.23	6.40	5.28	4.66	4.26	3.98	3.77	3.61	3.48	3.38	3.21	3.04	2.86	2.76	2.66	2.56	2.45	2.33	2.24
30	9.18	6.35	5.24	4.62	4.23	3.95	3.74	3.58	3.45	3.34	3.18	3.01	2.82	2.73	2.63	2.52	2.42	2.30	2.18
40	8.83	6.07	4.98	4.37	3.99	3.71	3.51	3.35	3.22	3.12	2.95	2.78	2.60	2.50	2.40	2.30	2.18	2.06	1.93
60	8.49	5.79	4.73	4.14	3.76	3.49	3.29	3.13	3.01	2.90	2.74	2.57	2.39	2.29	2.19	2.08	1.96	1.83	1.69
120	8.18	5.54	4.50	3.92	3.55	3.28	3.09	2.93	2.81	2.71	2.54	2.37	2.19	2.09	1.98	1.87	1.75	1.61	1.43
∞	7.88	5.30	4.28	3.72	3.35	3.09	2.90	2.74	2.62	2.52	2.36	2.19	2.00	1.90	1.79	1.67	1.53	1.36	1.00

F Distribution Table

2

d.f.D.	$\alpha = 0.01$																		
	d.f.N.																		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	4052	4999.5	5403	5625	5764	5859	5928	5982	6022	6056	6106	6157	6209	6235	6261	6287	6313	6339	6366
2	98.50	99.00	99.17	99.25	99.30	99.33	99.36	99.37	99.39	99.40	99.42	99.43	99.45	99.46	99.47	99.47	99.48	99.49	99.50
3	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.35	27.23	27.05	26.87	26.69	26.60	26.50	26.41	26.32	26.22	26.13
4	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66	14.55	14.37	14.20	14.02	13.93	13.84	13.75	13.65	13.56	13.46
5	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16	10.05	9.89	9.72	9.55	9.47	9.38	9.29	9.20	9.11	9.02
6	13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.72	7.56	7.40	7.31	7.23	7.14	7.06	6.97	6.88
7	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.47	6.31	6.16	6.07	5.99	5.91	5.82	5.74	5.65
8	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.67	5.52	5.36	5.28	5.20	5.12	5.03	4.95	4.86
9	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.11	4.96	4.81	4.73	4.65	4.57	4.48	4.40	4.31
10	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.71	4.56	4.41	4.33	4.25	4.17	4.08	4.00	3.91
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.40	4.25	4.10	4.02	3.94	3.86	3.78	3.69	3.60
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.16	4.01	3.86	3.78	3.70	3.62	3.54	3.45	3.36
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	3.96	3.82	3.66	3.59	3.51	3.43	3.34	3.25	3.17
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.80	3.66	3.51	3.43	3.35	3.27	3.18	3.09	3.00
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.67	3.52	3.37	3.29	3.21	3.13	3.05	2.96	2.87
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.55	3.41	3.26	3.18	3.10	3.02	2.93	2.84	2.75
17	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.46	3.31	3.16	3.08	3.00	2.92	2.83	2.75	2.65
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.37	3.23	3.08	3.00	2.92	2.84	2.75	2.66	2.57
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.30	3.15	3.00	2.92	2.84	2.76	2.67	2.58	2.49
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.23	3.09	2.94	2.86	2.78	2.69	2.61	2.52	2.42
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40	3.31	3.17	3.03	2.88	2.80	2.72	2.64	2.55	2.46	2.36
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.12	2.98	2.83	2.75	2.67	2.58	2.50	2.40	2.31
23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3.21	3.07	2.93	2.78	2.70	2.62	2.54	2.45	2.35	2.26
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.03	2.89	2.74	2.66	2.58	2.49	2.40	2.31	2.21
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.85	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13	2.99	2.85	2.70	2.62	2.54	2.45	2.36	2.27	2.17
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18	3.09	2.96	2.81	2.66	2.58	2.50	2.42	2.33	2.23	2.13
27	7.68	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.15	3.06	2.93	2.78	2.63	2.55	2.47	2.38	2.29	2.20	2.10
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12	3.03	2.90	2.75	2.60	2.52	2.44	2.35	2.26	2.17	2.06
29	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.09	3.00	2.87	2.73	2.57	2.49	2.41	2.33	2.23	2.14	2.03
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.84	2.70	2.55	2.47	2.39	2.30	2.21	2.11	2.01
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.66	2.52	2.37	2.29	2.20	2.11	2.02	1.92	1.80
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.50	2.35	2.20	2.12	2.03	1.94	1.84	1.73	1.60
120	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47	2.34	2.19	2.03	1.95	1.86	1.76	1.66	1.53	1.38
∞	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	2.18	2.04	1.88	1.79	1.70	1.59	1.47	1.32	1.00

F Distribution Table

3

d.f.D.	$\alpha = 0.025$																		
	d.f.N.																		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	647.8	799.5	864.2	899.6	921.8	937.1	948.2	956.7	963.3	968.6	976.7	984.9	993.1	997.2	1001	1006	1010	1014	1018
2	38.51	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.39	39.40	39.41	39.43	39.45	39.46	39.46	39.47	39.48	39.49	39.50
3	17.44	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47	14.42	14.34	14.25	14.17	14.12	14.08	14.04	13.99	13.95	13.90
4	12.22	10.65	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84	8.75	8.66	8.56	8.51	8.46	8.41	8.36	8.31	8.26
5	10.01	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62	6.52	6.43	6.33	6.28	6.23	6.18	6.12	6.07	6.02
6	8.81	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46	5.37	5.27	5.17	5.12	5.07	5.01	4.96	4.90	4.85
7	8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76	4.67	4.57	4.47	4.42	4.36	4.31	4.25	4.20	4.14
8	7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30	4.20	4.10	4.00	3.95	3.89	3.84	3.78	3.73	3.67
9	7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03	3.96	3.87	3.77	3.67	3.61	3.56	3.51	3.45	3.39	3.33
10	6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72	3.62	3.52	3.42	3.37	3.31	3.26	3.20	3.14	3.08
11	6.72	5.26	4.63	4.28	4.04	3.88	3.76	3.66	3.59	3.53	3.43	3.33	3.23	3.17	3.12	3.06	3.00	2.94	2.88
12	6.55	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37	3.28	3.18	3.07	3.02	2.96	2.91	2.85	2.79	2.72
13	6.41	4.97	4.35	4.00	3.77	3.60	3.48	3.39	3.31	3.25	3.15	3.05	2.95	2.89	2.84	2.78	2.72	2.66	2.60
14	6.30	4.86	4.24	3.89	3.66	3.50	3.38	3.29	3.21	3.15	3.05	2.95	2.84	2.79	2.73	2.67	2.61	2.55	2.49
15	6.20	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12	3.06	2.96	2.86	2.76	2.70	2.64	2.59	2.52	2.46	2.40
16	6.12	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12	3.05	2.99	2.89	2.79	2.68	2.63	2.57	2.51	2.45	2.38	2.32
17	6.04	4.62	4.01	3.66	3.44	3.28	3.16	3.06	2.98	2.92	2.82	2.72	2.62	2.56	2.50	2.44	2.38	2.32	2.25
18	5.98	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.93	2.87	2.77	2.67	2.56	2.50	2.44	2.38	2.32	2.26	2.19
19	5.92	4.51	3.90	3.56	3.33	3.17	3.05	2.96	2.88	2.82	2.72	2.62	2.51	2.45	2.39	2.33	2.27	2.20	2.13
20	5.87	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77	2.68	2.57	2.46	2.41	2.35	2.29	2.22	2.16	2.09
21	5.83	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.80	2.73	2.64	2.53	2.42	2.37	2.31	2.25	2.18	2.11	2.04
22	5.79	4.38	3.78	3.44	3.22	3.05	2.93	2.84	2.76	2.70	2.60	2.50	2.39	2.33	2.27	2.21	2.14	2.08	2.00
23	5.75	4.35	3.75	3.41	3.18	3.02	2.90	2.81	2.73	2.67	2.57	2.47	2.36	2.30	2.24	2.18	2.11	2.04	1.97
24	5.72	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70	2.64	2.54	2.44	2.33	2.27	2.21	2.15	2.08	2.01	1.94
25	5.69	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.68	2.61	2.51	2.41	2.30	2.24	2.18	2.12	2.05	1.98	1.91
26	5.66	4.27	3.67	3.33	3.10	2.94	2.82	2.73	2.65	2.59	2.49	2.39	2.28	2.22	2.16	2.09	2.03	1.95	1.88
27	5.63	4.24	3.65	3.31	3.08	2.92	2.80	2.71	2.63	2.57	2.47	2.36	2.25	2.19	2.13	2.07	2.00	1.93	1.85
28	5.61	4.22	3.63	3.29	3.06	2.90	2.78	2.69	2.61	2.55	2.45	2.34	2.23	2.17	2.11	2.05	1.98	1.91	1.83
29	5.59	4.20	3.61	3.27	3.04	2.88	2.76	2.67	2.59	2.53	2.43	2.32	2.21	2.15	2.09	2.03	1.96	1.89	1.81
30	5.57	4.18	3.69	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51	2.41	2.31	2.20	2.14	2.07	2.01	1.94	1.87	1.79
40	5.42	4.05	3.46	3.13	2.90	2.74	2.62	2.53	2.45	2.39	2.29	2.18	2.07	2.01	1.94	1.88	1.80	1.72	1.64
60	5.29	3.93	3.34	3.01	2.79	2.63	2.51	2.41	2.33	2.27	2.17	2.06	1.94	1.88	1.82	1.74	1.67	1.58	1.48
120	5.15	3.80	3.23	2.89	2.67	2.52	2.39	2.30	2.22	2.16	2.05	1.94	1.82	1.76	1.69	1.61	1.53	1.43	1.31
∞	5.02	3.69	3.12	2.79	2.57	2.41	2.29	2.19	2.11	2.05	1.94	1.83	1.71	1.64	1.57	1.48	1.39	1.27	1.00

F Distribution Table

4

d.f.D.	$\alpha = 0.05$																		
	d.f.N.																		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	236.8	238.9	240.5	241.9	243.9	245.9	248.0	249.1	250.1	251.1	252.2	253.3	254.3
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.41	19.43	19.45	19.45	19.46	19.47	19.48	19.49	19.50
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.36
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.38	2.34	2.30
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27	2.22	2.18	2.13
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20	2.16	2.11	2.07
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35	2.28	2.24	2.19	2.15	2.11	2.06	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.31	2.23	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01	1.96
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.97	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.81
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.13	2.05	2.01	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79	1.73
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77	1.71
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.15	2.07	1.99	1.95	1.90	1.85	1.80	1.75	1.69
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20	2.13	2.06	1.97	1.93	1.88	1.84	1.79	1.73	1.67
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.12	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.77	1.71	1.65
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.10	2.03	1.94	1.90	1.85	1.81	1.75	1.70	1.64
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68	1.62
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.64	1.58	1.51
60	4.00	3.15	2.76	2.52	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59	1.53	1.47	1.39
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.17	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.50	1.43	1.35	1.25
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.39	1.32	1.22	1.00

F Distribution Table

5

d.f.D.	$\alpha = 0.10$																		
	d.f.N.																		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	39.86	49.50	53.59	55.83	57.24	58.20	58.91	59.44	59.86	60.19	60.71	61.22	61.74	62.00	62.26	62.53	62.79	63.06	63.33
2	8.53	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.38	9.39	9.41	9.42	9.44	9.45	9.46	9.47	9.47	9.48	9.49
3	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.24	5.23	5.22	5.20	5.18	5.18	5.17	5.16	5.15	5.14	5.13
4	4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.94	3.92	3.90	3.87	3.84	3.83	3.82	3.80	3.79	3.78	3.76
5	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.32	3.30	3.27	3.24	3.21	3.19	3.17	3.16	3.14	3.12	3.10
6	3.78	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.96	2.94	2.90	2.87	2.84	2.82	2.80	2.78	2.76	2.74	2.72
7	3.59	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78	2.75	2.72	2.70	2.67	2.63	2.59	2.58	2.56	2.54	2.51	2.49	2.47
8	3.46	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62	2.59	2.56	2.54	2.50	2.46	2.42	2.40	2.38	2.36	2.34	2.32	2.29
9	3.36	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47	2.44	2.42	2.38	2.34	2.30	2.28	2.25	2.23	2.21	2.18	2.16
10	3.29	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.35	2.32	2.28	2.24	2.20	2.18	2.16	2.13	2.11	2.08	2.06
11	3.23	2.86	2.66	2.54	2.45	2.39	2.34	2.30	2.27	2.25	2.21	2.17	2.12	2.10	2.08	2.05	2.03	2.00	1.97
12	3.18	2.81	2.61	2.48	2.39	2.33	2.28	2.24	2.21	2.19	2.15	2.10	2.06	2.04	2.01	1.99	1.96	1.93	1.90
13	3.14	2.76	2.56	2.43	2.35	2.28	2.23	2.20	2.16	2.14	2.10	2.05	2.01	1.98	1.96	1.93	1.90	1.88	1.85
14	3.10	2.73	2.52	2.39	2.31	2.24	2.19	2.15	2.12	2.10	2.05	2.01	1.96	1.94	1.91	1.89	1.86	1.83	1.80
15	3.07	2.70	2.49	2.36	2.27	2.21	2.16	2.12	2.09	2.06	2.02	1.97	1.92	1.90	1.87	1.85	1.82	1.79	1.76
16	3.05	2.67	2.46	2.33	2.24	2.18	2.13	2.09	2.06	2.03	1.99	1.94	1.89	1.87	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72
17	3.03	2.64	2.44	2.31	2.22	2.15	2.10	2.06	2.03	2.00	1.96	1.91	1.86	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72	1.69
18	3.01	2.62	2.42	2.29	2.20	2.13	2.08	2.04	2.00	1.98	1.93	1.89	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72	1.69	1.66
19	2.99	2.61	2.40	2.27	2.18	2.11	2.06	2.02	1.98	1.96	1.91	1.86	1.81	1.79	1.76	1.73	1.70	1.67	1.63
20	2.97	2.59	2.38	2.25	2.16	2.09	2.04	2.00	1.96	1.94	1.89	1.84	1.79	1.77	1.74	1.71	1.68	1.64	1.61
21	2.96	2.57	2.36	2.23	2.14	2.08	2.02	1.98	1.95	1.92	1.87	1.83	1.78	1.75	1.72	1.69	1.66	1.62	1.59
22	2.95	2.56	2.35	2.22	2.13	2.06	2.01	1.97	1.93	1.90	1.86	1.81	1.76	1.73	1.70	1.67	1.64	1.60	1.57
23	2.94	2.55	2.34	2.21	2.11	2.05	1.99	1.95	1.92	1.89	1.84	1.80	1.74	1.72	1.69	1.66	1.62	1.59	1.55
24	2.93	2.54	2.33	2.19	2.10	2.04	1.98	1.94	1.91	1.88	1.83	1.78	1.73	1.70	1.67	1.64	1.61	1.57	1.53
25	2.92	2.53	2.32	2.18	2.09	2.02	1.97	1.93	1.89	1.87	1.82	1.77	1.72	1.69	1.66	1.63	1.59	1.56	1.52
26	2.91	2.52	2.31	2.17	2.08	2.01	1.96	1.92	1.88	1.86	1.81	1.76	1.71	1.68	1.65	1.61	1.58	1.54	1.50
27	2.90	2.51	2.30	2.17	2.07	2.00	1.95	1.91	1.87	1.85	1.80	1.75	1.70	1.67	1.64	1.60	1.57	1.53	1.49
28	2.89	2.50	2.29	2.16	2.06	2.00	1.94	1.90	1.87	1.84	1.79	1.74	1.69	1.66	1.63	1.59	1.56	1.52	1.48
29	2.89	2.50	2.28	2.15	2.06	1.99	1.93	1.89	1.86	1.83	1.78	1.73	1.68	1.65	1.62	1.58	1.55	1.51	1.47
30	2.88	2.49	2.28	2.14	2.05	1.98	1.93	1.88	1.85	1.82	1.77	1.72	1.67	1.64	1.61	1.57	1.54	1.50	1.46
40	2.84	2.44	2.23	2.09	2.00	1.93	1.87	1.83	1.79	1.76	1.71	1.66	1.61	1.57	1.54	1.51	1.47	1.42	1.38
60	2.79	2.39	2.18	2.04	1.95	1.87	1.82	1.77	1.74	1.71	1.66	1.60	1.54	1.51	1.48	1.44	1.40	1.35	1.29
120	2.75	2.35	2.13	1.99	1.90	1.82	1.77	1.72	1.68	1.65	1.60	1.55	1.48	1.45	1.41	1.37	1.32	1.26	1.19
∞	2.71	2.30	2.08	1.94	1.85	1.77	1.72	1.67	1.63	1.60	1.55	1.49	1.42	1.38	1.34	1.30	1.24	1.17	1.00

